Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 1, с. 18 – 23 © 2016 г. 10 июля

Линейная теория случайных текстур ^{3}He-A в аэрогеле

И. А. Фомин[1)]

Институт физических проблем им. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 мая 2016 г.

Пространственное изменение орбитальной части параметра порядка ^{3}He-A в аэрогеле представлено как случайное блуждание единичного вектора $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ по сфере под действием случайной анизотропии, созданной системой волокон аэрогеля. Исследованы статистические свойства возникающей в результате случайной текстуры. Для расстояний, при которых изменение $\mathbf{l}$ мало по сравнению с его величиной, средний квадрат изменения $\mathbf{l}$: $\langle\delta\mathbf{l}^2\rangle$ выражен через коррелятор компонент тензора случайной анизотропии. При упрощающих предположениях о структуре этого коррелятора аналитически найдена зависимость $\langle\delta\mathbf{l}^2\rangle$ от r для изотопного и аксиально анизотропного аэрогеля. Для анизотропного аэрогеля средние значения квадратов проекций $\mathbf{l}$ на оси анизотропии выражены через параметры аэрогеля. С помощью простой модели сделаны численные оценки характерного масштаба, на котором нарушается дальний порядок и величины глобальной анизотропии, достаточной для восстановления дальнего порядка. Полученные величины сравниваются с другими оценками.

DOI: 10.7868/S0370274X16130051

1. Параметр порядка A-фазы сверхтекучего ^{3}He имеет вид:

$$A_{\mu j} = \Delta\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{d}_\mu(\hat{m}_j + i\hat{n}_j). \tag{1}$$

В объеме жидкости имеется непрерывное вырождение по отношению к поворотам спиновой части параметра порядка – единичного вектора $\hat{d}_\mu$ и орбитальной части – комбинации $\hat{m}_j + i\hat{n}_j$, где $\hat{m}_j$ и $\hat{n}_j$ – взаимно ортогональные единичные векторы. Обычно их дополняют до ортогональной тройки вектором $\mathbf{l} = \mathbf{m}\times\mathbf{n}$. Орбитальное вырождение частично снимается стенками контейнера или посторонними объектами.

Аэрогель при помещении его в ^{3}He-A создает в нем локальную случайную анизотропию, которая влияет на ориентацию орбитальной части параметра порядка. Анизотропия изменяется на масштабе порядка среднего расстояния между нитями, образующими аэрогель $\xi_c \sim 20$ нм. Следуя аргументам Ларкина [1] и Имри и Ма [2], Воловик [3] показал, что эта случайная анизотропия должна привести к разрушению дальнего порядка и образованию в ^{3}He-A стеклообразного состояния Ларкина–Имри–Ма (ЛИМ). Это – *случайная текстура*, в которой параметр порядка локально сохраняет вид (1), но ориентация его орбитальной части изменяется на некотором пространственном масштабе $\xi_{\rm LIM}$. Величина $\xi_{\rm LIM}$ определяется конкуренцией пространственных флуктуаций случайной анизотропии с градиентной энергией ^{3}He-A. Если, помимо локальной, присутствует также и глобальная анизотропия, то могут возникать разные случайные текстуры. Кроме орбитального стекла (ОС), в литературе обсуждаются орбитальный ферромагнетик (ОФ), двумерное состояние ЛИМ, а также текстуры, в которых случайно изменяется спиновый вектор $\hat{d}_\mu$ [4, 5]. Макроскопические аргументы [1, 3] позволяют оценить по порядку величины $\xi_{\rm LIM}$ и величину минимальной анизотропии, необходимой для восстановления дальнего порядка. Для более подробной интерпретации существующих экспериментов и постановки новых требуется, однако, более точная теория.

В настоящей статье рассматриваются только орбитальные случайные текстуры. Предлагаемая теория основана на анализе корреляционной функции направлений $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ в двух точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, достаточно близких для того, чтобы изменение $\mathbf{l}$ было малым по сравнению с его величиной. Такой подход идейно аналогичен использованному ранее в теории ферромагнетиков со слабой случайной анизотропией [6], однако конкретные результаты указанной работы нельзя перенести буквально на рассматриваемые здесь случайные текстуры. Главной причиной является существенное различие параметров порядка обеих систем, которое в свою очередь приводит к разнице в выборе наиболее интересных вопросов, в их постановке и решении.

Многие наблюдаемые свойства ^{3}He-A, такие как величина сдвига ЯМР и анизотропия сверхтекучей

[1)]e-mail: igor_fomin@list.ru

плотности, зависят от ориентации вектора $\mathbf{l}$. Теория позволяет найти зависимость функции $\langle\delta\mathbf{l}^2\rangle \equiv \langle(\mathbf{l}(\mathbf{r}_2)-\mathbf{l}(\mathbf{r}_1))^2\rangle$ от расстояния $|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$ в той области, где $\langle\delta\mathbf{l}^2\rangle \ll \mathbf{l}_0^2$. Угловые скобки здесь и в дальнейшем обозначают усреднение по ансамблю. Экстраполяция полученного выражения в область $\langle\delta\mathbf{l}^2\rangle/\mathbf{l}_0^2 \sim 1$ дает альтернативную оценку длины $\xi_{\rm LIM}$. Из тех же формул можно оценить величину глобальной анизотропии, достаточную для восстановления дальнего порядка. Эти оценки не противоречат недавним макроскопическим оценкам [7]. Знание корреляционной функции направлений $\mathbf{l}$ и ее зависимости от параметров аэрогеля позволяет более точно характеризовать случайную текстуру и, возможно, влиять на нее. Для анизотропных аэрогелей оказывается возможным вычисление величин средних квадратов проекций $\mathbf{l}$ на оси анизотропии. Эти величины входят в выражения для сдвигов частоты ЯМР. Физическая система ^{3}He-A плюс аэрогель интересна также и в более общем смысле. В спектре возбуждений ^{3}He-A имеется щель. Эта щель локально анизотропна и обращается в нуль в направлениях $\pm\mathbf{l}$. После усреднения по направлениям $\mathbf{l}$ спектр становится *псевдощелевым*, при этом в целом жидкость может не быть сверхтекучей так же, как это имеет место в высокотемпературных сверхпроводниках. Это увеличивает интерес к исследованию стеклообразных состояний сверхтекучих жидкостей.

2. Взаимодействие аэрогеля с параметром порядка формально описывается дополнительным членом в плотности свободной энергии. Этот член пропорционален $\eta_{jl}(\mathbf{r})A_{\mu j}A^*_{\mu l}$, где $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ – случайный вещественный тензор с равным нулю следом. Изотропная часть взаимодействия включена в величину локального подавления T_c, она влияет на величину, но не на ориентацию параметра порядка. Вблизи температуры перехода равновесная текстура может быть найдена путем минимизации функционала Гинзбурга и Ландау. Для интересующих нас высокопористых аэрогелей добавку, содержащую $\eta_{jl}(\mathbf{r})$, можно рассматривать как возмущение. Удерживая в выражении для свободной энергии только зависящие от ориентации параметра порядка вклады, имеем:

$$F_{\rm GL} = N(0)\Delta^2 \times \tag{2}$$

$$\times \int d^3r\left\{\eta_{jl}(\mathbf{r})\Delta_j\Delta_l^* + \xi_s^2\left(|{\rm rot}\boldsymbol{\Delta}|^2 + 3|{\rm div}\boldsymbol{\Delta}|^2\right)\right\},$$

где $\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{m}+i\mathbf{n})$, $\xi_s^2 = \frac{7\zeta(3)}{20}\xi_0^2$, $\xi_0^2 = \frac{\hbar v_F}{2\pi T_c}$ [8]. Для варьирования этого функционала по ориентации тройки $(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{l})$ удобно ввести бесконечно малый вектор локального поворота $\boldsymbol{\theta}$, согласно определению $\delta\mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{m}$ и т.д. Уравнение, определяющее равновесную текстуру, имеет вид:

$$\mathbf{l}\times\overrightarrow{\eta\mathbf{l}} + \xi_s^2[\mathbf{m}\times(2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{m}) + \nabla^2\mathbf{m}) +$$

$$+\,\mathbf{n}\times(2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{n}) + \nabla^2\mathbf{n})] = 0. \tag{3}$$

Проектирование этого уравнения на каждое из направлений $\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{l}$ дает три скалярных уравнения:

$$\mathbf{n}\cdot(\overrightarrow{D\mathbf{m}}) = \mathbf{m}\cdot(\overrightarrow{D\mathbf{n}}), \tag{4}$$

$$\mathbf{l}\cdot(\overrightarrow{D\mathbf{m}}) = \mathbf{m}\cdot(\overrightarrow{\eta\mathbf{l}}), \tag{5}$$

$$\mathbf{l}\cdot(\overrightarrow{D\mathbf{n}}) = \mathbf{n}\cdot(\overrightarrow{\eta\mathbf{l}}), \tag{6}$$

где введены сокращенные обозначения $\overrightarrow{D\mathbf{m}} = \xi_s^2[2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{m}) + \nabla^2\mathbf{m}]$ и $\overrightarrow{D\mathbf{n}} = \xi_s^2[2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{n}) + \nabla^2\mathbf{n}]$. В нулевом приближении по η_{jl} уравнениям (4)–(6) удовлетворяет любая пространственно однородная тройка $(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{l})$, т.е. решение непрерывно вырождено. Рассмотрим сначала изотропный аэрогель, для которого $\langle\eta_{jl}(\mathbf{r})\rangle = 0$. В силу упомянутого выше аргумента ЛИМ сколь угодно малое возмущение разрушает ориентационный дальний порядок (т.е. $\langle\mathbf{l}(\mathbf{r})\rangle = 0$), сохраняя ориентацию тройки $(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{l})$ только на расстояниях порядка корреляционной длины $\xi_{\rm LIM}$, которая растет при уменьшении η_{jl}. Поскольку $\xi_{\rm LIM} \gg \xi_c$ пространственное изменение ориентации параметра порядка можно рассматривать как случайное блуждание. Для двух точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ из области $\xi_c \ll |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| \ll \xi_{\rm LIM}$ координатную зависимость параметра порядка можно представить как $\mathbf{l}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{l}_0 + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{l}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{l}_0 + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_2)$ и т.д., где $\mathbf{m}_0,\mathbf{n}_0,\mathbf{l}_0$ – средняя по области ориентация тройки, а $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1)$ и $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_2)$ малы. С учетом нормировки добавку $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ можно представить как $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})\times\mathbf{l}_0$, где $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})$ – вектор малого поворота. Этот вектор определяет поворот всей тройки $(\mathbf{m},\mathbf{n},\mathbf{l})$: $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}_0 + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})\times\mathbf{m}_0$ и $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_0 + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})\times\mathbf{n}_0$.

Интересующее нас среднее $\langle(\mathbf{l}(\mathbf{r}_2)-\mathbf{l}(\mathbf{r}_1))^2\rangle = \langle(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_2)-\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1))^2\rangle = 2\langle(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1))^2 - \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1)\cdot\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_2)\rangle$ можно выразить через $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})$: $\langle(\mathbf{l}(\mathbf{r}_2)-\mathbf{l}(\mathbf{r}_1))^2\rangle = 2\langle\boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r}_1)\boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r}_1) - \boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r}_2)\boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r}_1)\rangle\mathbf{l}_0^2$, где $\boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r}_2)\boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r}_1) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}_2)\cdot\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}_1) - (\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{l}_0)(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{l}_0)/\mathbf{l}_0^2$, т.е. $\boldsymbol{\theta}_\perp(\mathbf{r})$ – это проекция $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})$ на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{l}_0$. Чтобы найти решение уравнений (4)–(6) в первом приближении по η_{jl} следует подставить в эти уравнения добавки $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}),\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}),\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$, выраженные через $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})$, и линеаризовать полученные уравнения по $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r})$. В системе координат с осями x,y,z, ориентированными, соответственно, вдоль $\mathbf{m}_0,\mathbf{n}_0,\mathbf{l}_0$, линеаризованные уравнения имеют вид:

$$\nabla^2\theta_x + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial z} - \frac{\partial\theta_z}{\partial x}\right) = \frac{\eta_{yz}}{\xi_s^2}, \tag{7}$$

$$\nabla^2\theta_y + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial z} - \frac{\partial\theta_z}{\partial y}\right) = -\frac{\eta_{xz}}{\xi_s^2}, \tag{8}$$

$$2\nabla^2\theta_z - \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\boldsymbol{\theta} = 0. \tag{9}$$

Взаимодействие случайной анизотропии с параметром порядка в функционале (2) можно переписать в виде $-\eta_{jl}l_jl_l$, содержащем только $\mathbf{l}$. Векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ испытывают влияние анизотропии косвенно. Изменение ориентации векторов $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ в пространстве может вызвать ток g_i [8]:

$$g_i = \frac{2m}{\hbar}\Delta_0^2 \times \tag{10}$$

$$\times\left[(2\delta_{ij} - l_il_j)(\mathbf{m}\cdot\nabla_i\mathbf{n}) + (\frac{1}{2}\delta_{ij} - l_il_j)(\nabla\times\mathbf{l})_j\right],$$

причем этот ток не обязательно связан с изменением $\mathbf{l}$, он может оставаться конечным и при однородном $\mathbf{l}$. Для выделения физически интересного решения, связанного с действием $\eta_{jl}(\mathbf{r})$, на изменение $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ следует наложить дополнительное условие. Масштаб ξ_c близок к длине сверхтекучей корреляции ξ_0. Неоднородности с таким масштабом приводят к изменению энергии на величину порядка энергии спаривания. При обсуждении текстурных эффектов эта энергия считается бесконечной. Естественно потребовать, чтобы изменение $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ на масштабе ξ_c подчинялось условию $\mathbf{g} = 0$. Следует заметить, однако, что уравнения (7)–(9) получены в главном приближении по η_{jl} и их точности не хватает для того, чтобы делать утверждения о "текстурных" токах с пространственным масштабом $\sim \xi_{\mathrm{LIM}}$. Такие токи могут оставаться конечными.

В линейном приближении по $\boldsymbol{\theta}$

$$g_i = \frac{2m}{\hbar}\Delta_0^2\left[-2\frac{\partial\theta_z}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta_i}{\partial z} + \frac{1}{2}\hat{z}_i(\mathrm{div}\boldsymbol{\theta})\right]. \tag{11}$$

В этом приближении уравнение (9) есть закон сохранения массы: $\mathrm{div}\boldsymbol{g} = 0$. Требование $\mathbf{g} = 0$ приводит к трем дополнительным соотношениям между производными компонент $\boldsymbol{\theta}$: $\frac{\partial\theta_x}{\partial z} = 4\frac{\partial\theta_z}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta_y}{\partial z} = 4\frac{\partial\theta_z}{\partial y}$ и $\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y} = 2\frac{\partial\theta_z}{\partial z}$. С помощью этих соотношений уравнения (7)–(9) можно преобразовать к виду:

$$\nabla^2\theta_x + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial z^2} = \frac{\eta_{yz}}{\xi_s^2}, \tag{12}$$

$$\nabla^2\theta_y + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial z^2} = -\frac{\eta_{xz}}{\xi_s^2}, \tag{13}$$

$$\nabla^2\theta_z - \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_z}{\partial z^2} = 0. \tag{14}$$

Уравнения (12) и (13) – это уравнения на "быстро" изменяющиеся переменные θ_x и θ_y, их можно решить с помощью преобразования Фурье: $\theta_{x,y}(\mathbf{r}) = \int \exp(i\mathbf{kr})\theta_{x,y}(\mathbf{k})\frac{Vd^3k}{(2\pi)^3}$, где V – нормировочный объем.

В выражение для $\langle(\mathbf{l}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{l}(\mathbf{r}_1))^2\rangle \equiv \langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, входят только компоненты θ_x и θ_y. Тогда в главном приближении по η_{jl} имеем:

$$\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} = \int[1 - \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\frac{K(\mathbf{k})}{\xi_s^4(k_x^2 + k_y^2 + \gamma^2k_z^2)^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{15}$$

где $K(\mathbf{k}) \equiv \langle\eta_{xz}(-\mathbf{k})\eta_{xz}(\mathbf{k}) + \eta_{yz}(-\mathbf{k})\eta_{yz}(\mathbf{k})\rangle V$, а γ^2 – это отношение "продольной" и "поперечной" жесткостей, вблизи T_c отношение $\gamma^2 = 5/2$. Коррелятор $K(\mathbf{k})$ можно связать со средней флуктуацией случайного тензора $\eta_{mz}(\mathbf{r})$:

$$\int K(\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \int\frac{d^3r}{V}\langle\eta_{zm}(\mathbf{r})\eta_{mz}(\mathbf{r}) - [\eta_{zz}(\mathbf{r})]^2\rangle. \tag{16}$$

При случайном блуждании $\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle$ растет с $\mathbf{r}$. Уравнение (15) применимо до тех пор, пока $\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle \ll \mathbf{l}_0^2$. Расстояние $\mathbf{r}$, соответствующее границе области $\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle \sim \mathbf{l}_0^2$, можно рассматривать как оценку ξ_{LIM}. Скорость роста $\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle$ зависит от явного вида коррелятора $K(\mathbf{k})$. Если $K(\mathbf{k})$ не зависит от $\mathbf{k}$, интегрирование в формуле (15) можно проделать явно. Интегрирование упрощается путем изменения масштаба в направлении z, т.е. с помощью подстановки вместо $\mathbf{r}$ нового вектора $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z/\gamma)$ и, соответственно, вместо $\mathbf{k}$ вектора $\mathbf{q}$, согласно $k_x = q_x, k_y = q_y, k_z = q_z/\gamma$. Используя значение интеграла $\int_0^\infty\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{4}$, имеем:

$$\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} = \frac{K}{8\pi\gamma\xi_s^4}\rho = \frac{\rho}{\xi_{\mathrm{LIM}}}, \tag{17}$$

где $\xi_{\mathrm{LIM}} = \frac{8\pi\gamma\xi_s^4}{K}$. Поскольку ρ – это расстояние, сжатое в направлении $\mathbf{l}_0$, настоящая длина, на которой разрушается порядок, анизотропна – условие $\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} \sim 1$ выполняется для $r \sim \xi_{\mathrm{LIM}}$, если $\mathbf{r}$ перпендикулярен $\mathbf{l}_0$ и для $r \sim \gamma\xi_{\mathrm{LIM}}$, если оба вектора параллельны.

В качестве примера рассмотрим $K(\mathbf{k})$ для ансамбля случайно расположенных и случайно ориентированных одинаковых аксиально-симметричных примесей. Следуя теории "малых объектов" в сверхтекучем ^{3}He [9], находим:

$$\eta_{jl}(\mathbf{r}) = \frac{\pi^2}{4}\xi_0\sum_s\left[\sigma^{(i)}\delta_{jl} + \sigma^{(a)}(3\hat{a}_j^s\hat{a}_l^s - \delta_{jl})\right]\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \tag{18}$$

где $\mathbf{r}_s$ – это координаты примесей, $\hat{a}_j^{(s)}$ – единичный вектор в направлении оси симметрии примеси, находящейся в точке $\mathbf{r}_s$, а $\sigma_{tr}^{(i)}$ и $\sigma_{tr}^{(a)}$ – соответственно, изотропная и анизотропная части транспортного сечения рассеяния квазичастиц примесями (более точное определение см. в [9]). Подставляя формулу (16) в определение, $K(\mathbf{k})$ дает:

$$K(\mathbf{k}) = \frac{1}{2V}\left(\frac{3\pi^2\xi_0}{2}\right)^2 \times \\ \times \left\langle \sum_{s,t} (\sigma_{tr}^{(a)})^2 \hat{a}_x^s \hat{a}_z^s \hat{a}_x^t \hat{a}_z^t \exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_s)] \right\rangle. \quad (19)$$

Если положения и ориентации примесей не коррелированы, то в сумму по s и t после усреднения конечный вклад дают только члены с $s = t$. Усреднение по направлениям дает множитель $1/15$. В результате $K(\mathbf{k}) = \frac{3n}{40}(\pi^2\xi_0\sigma_{tr}^{(a)})^2$ не зависит от $\mathbf{k}$, и после подстановки в (17) имеем:

$$\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} = \frac{3\pi^2}{320}\frac{(\xi_0\sigma_{tr}^{(a)})^2}{\gamma\xi_s^4} n\rho. \quad (20)$$

В соответствии с определением (17) $\xi_{\text{LIM}} = \frac{320}{3\pi^3}\frac{\gamma\xi_s^4}{n(\xi_0\sigma_{tr}^{(a)})^2}$. Для численной оценки этой длины будем считать, что примеси имеют форму круговых цилиндров с высотой b и радиусом основания ϱ. При применении этой модели к аэрогелю концентрацию n можно выразить через его пористость P, как $n\pi\varrho^2 b = 1 - P$. Требуемое сечение рассеяния $\sigma_{tr}^{(a)} = -(\pi b\varrho)/8$ [10]. Строго говоря, вклад одного цилиндра в $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ выражается через сечение рассеяния только при $b \ll \xi_0$, но, как было показано ранее [11], для более длинных цилиндров существенный вклад в $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ дает только ближайшая к $\mathbf{r}$ часть с размером $\sim\xi_0$. Для оценки можно подставить в выражение для сечения "эффективную" высоту цилиндров $b = 2\xi_0$. При таких предположениях $\xi_{\text{LIM}} \approx 10\frac{\xi_0}{1-P}$. Для 98 % аэрогеля на основе SiO_2 имеем отсюда $\xi_{\text{LIM}} \sim 10$ мкм. Это на порядок больше, чем у Воловика. Значение 1 мкм лучше соответствует данным ЯМР [4], согласно которым длина ξ_{LIM} должна быть малой по сравнению с дипольной длиной $\xi_D \sim 10$ мкм. Разница может возникнуть из-за того, что здесь упрощенная модель используется буквально, хотя некоторые из заложенных в нее предположений заведомо не соответствуют свойствам аэрогеля. В первую очередь это относится к отсутствию корреляций. Корреляции в расположении и ориентации элементов аэрогеля существуют [12] и оказывают заметное влияние на поведение сверхтекучих фаз ^{3}He. Корреляционные поправки содержат множитель порядка $(R/\xi_0)^2$, где R – корреляционный радиус [13]. Для 98 % аэрогеля на основе SiO_2 этот множитель может в $\approx 6 \div 9$ раз уменьшить оценку для ξ_{LIM} и устранить видимое различие между двумя оценками.

3. Глобальная анизотропия образцов аэрогеля может возникать как в процессе их приготовления, так и при деформации изотропных образцов [14]. Формально глобальная деформация описывается дополнительным членом вида $\kappa_{jl}\Delta_j\Delta_l^*$ в выражении (2) для свободной энергии, где κ_{jl} – это постоянный симметричный тензор с равным нулю следом. В результате возникают дополнительные члены в уравнениях равновесия. Уравнение (4) сохраняет прежний вид, а уравнения (5) и (6) переписываются как:

$$\mathbf{l}\cdot(\overrightarrow{D\mathbf{m}}) = \mathbf{m}\cdot(\overrightarrow{\eta\mathbf{l}}) + \mathbf{m}\cdot(\overrightarrow{\kappa\mathbf{l}}), \quad (21)$$

$$\mathbf{l}\cdot(\overrightarrow{D\mathbf{n}}) = \mathbf{n}\cdot(\overrightarrow{\eta\mathbf{l}}) + \mathbf{n}\cdot(\overrightarrow{\kappa\mathbf{l}}). \quad (22)$$

В нулевом приближении по $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ уравнения (4), (21) и (22) имеют пространственно однородные решения, удовлетворяющие условиям: $\mathbf{m}\cdot\overrightarrow{\kappa\mathbf{l}} = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{\kappa\mathbf{l}} = 0$. Эти условия означают, что в равновесии $\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{l}_0$ должны быть направлены вдоль главных направлений κ_{jl}. Эти направления удобно обозначить как $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, им соответствуют главные значения $\kappa_u, \kappa_v, \kappa_w$. Как и раньше, $\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{l}_0$ используются как базис системы координат $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. В этих координатах уравнения для $\boldsymbol{\theta}$ имеют вид:

$$\nabla^2\theta_x + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial z^2} + \frac{\kappa_y - \kappa_z}{\xi_s^2}\theta_x = \frac{\eta_{yz}}{\xi_s^2}, \quad (23)$$

$$\nabla^2\theta_y + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial z^2} + \frac{\kappa_x - \kappa_z}{\xi_s^2}\theta_y = -\frac{\eta_{xz}}{\xi_s^2}. \quad (24)$$

Выигрыш ориентационной энергии пропорционален $\sim \kappa_{jl}l_jl_l$. Энергия минимальна, когда $\mathbf{l}$ параллелен или антипараллелен главному направлению κ_{jl}, соответствующему максимальному главному значению. В результате $\kappa_z - \kappa_y$ и $\kappa_z - \kappa_x$ не отрицательны.

Рассмотрим подробно аксиально симметричный аэрогель, когда два из трех собственных значений совпадают. В этом случае все три можно выразить через один параметр κ: $\kappa_u = \kappa_v = \kappa$ и $\kappa_w = -2\kappa$. Есть две возможности: 1) $\kappa < 0$, тогда максимальное главное значение κ_w не вырождено. Такая анизотропия возникает при одноосном сжатии изотропного аэрогеля. В этом случае $\kappa_x - \kappa_z = \kappa_y - \kappa_z = 3\kappa$ и рассуждения, использованные при выводе соотношения (15), приводят к следующему результату:

$$\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} = \quad (25)$$

$$= \int [1 - \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\frac{K(\mathbf{k})}{\xi_s^4(p^2 + k_x^2 + k_y^2 + \gamma^2 k_z^2)^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Здесь $p^2 = 3|\kappa|/\xi_s^2$. Для не зависящего от $\mathbf{k}$ коррелятора $K(\mathbf{k})$ зависимость $\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle$ от ρ может быть выписана явно:

$$\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} = \frac{1}{\xi_{\mathrm{LIM}}}\frac{1-e^{-p\rho}}{p}. \tag{26}$$

Для малых $p\rho \ll 1$ мы возвращаемся к линейному росту $\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle$ с расстоянием ρ в согласии с уравнением (20), но когда $p\rho \gg 1$ отношение $\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2}$ стремится к постоянному значению $D \equiv \frac{\xi_s}{\xi_{\mathrm{LIM}}\sqrt{3|\kappa|}}$. Если $D \ll 1$ (или $3|\kappa| \gg \left(\frac{\xi_s}{\xi_{\mathrm{LIM}}}\right)^2$), линейная теория применима при всех ρ. В терминах работы [4] реализуется состояние орбитального ферромагнетика (OF) с конечными поперечными флуктуациями. Измеримой характеристикой состояния является среднее $\langle l_z^2\rangle$. Это среднее входит в выражение для общего множителя $q = \frac{3}{2}\left(\langle l_z^2\rangle - \frac{1}{3}\right)$ в формуле для сдвига частоты ЯМР [4]. Множитель q выражается через $\boldsymbol{\theta}$: $q = 1 - \frac{3}{2}(\langle\theta_x^2\rangle + \langle\theta_y^2\rangle)$. Повторяя выкладки, предшествующие уравнению (15), имеем:

$$\langle\theta_x^2\rangle + \langle\theta_y^2\rangle = \int \frac{K(\mathbf{k})}{\xi_s^4(p^2+k_x^2+k_y^2+\gamma^2k_z^2)^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{27}$$

При не зависящем от $\mathbf{k}$ корреляторе $K(\mathbf{k})$ имеем: $\langle\theta_x^2\rangle + \langle\theta_y^2\rangle = D$. Если анизотропия создана деформацией аэрогеля, то $\kappa \sim \epsilon$, где ϵ – это параметр, характеризующий одноосную деформацию. Например, для простого сжатия вдоль оси z: $\epsilon = \delta h_z/h_z$. При q, близких к единице, зависимость q от ϵ такова: $q = 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\epsilon}}$, где характерная деформация $\epsilon_c = \frac{3\epsilon}{4|\kappa|}\left(\frac{\xi_s}{\xi_{\mathrm{LIM}}}\right)^2$ зависит от структуры аэрогеля. Для "модели случайных цилиндров" в случае простого сжатия, согласно результатам [10], $\epsilon_c = \frac{2\cdot7\cdot\zeta(3)}{\pi^2(1-P)}\frac{\varrho\xi_0}{\xi_{\mathrm{LIM}}^2}$. Для 98 % аэрогеля с $\varrho \approx 2$ нм и $\xi_0 \approx 20$ нм имеем $\epsilon_c \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$, как в работе [7]. Состояние орбитального ферромагнетика должно стабилизироваться при $\epsilon \gg \epsilon_c$.

В случае 2) ($\kappa > 0$) – каждое из двух совпадающих собственных значений превосходит третье. Вектор $\mathbf{l}$ принадлежит плоскости u, v, пусть, например, $\mathbf{l}$ параллелен оси u, тогда $\kappa_z = \kappa_y \equiv \kappa$. Третье главное значение $\kappa_x = -2\kappa$. В этом случае уравнения (23) и (24) выглядят так:

$$\nabla^2\theta_x + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial z^2} = \frac{\eta_{yz}}{\xi_s^2}, \tag{28}$$

$$\nabla^2\theta_y + \frac{3}{2}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial z^2} - \frac{3\kappa}{\xi_s^2}\theta_y = -\frac{\eta_{xz}}{\xi_s^2}. \tag{29}$$

Решая эти уравнения при тех же предположениях о виде $K(\mathbf{k})$, имеем:

$$\frac{\langle[\delta\mathbf{l}(\mathbf{r})]^2\rangle}{\mathbf{l}_0^2} = \frac{1}{2\xi_{\mathrm{LIM}}}\left(\rho + \frac{1-e^{-p\rho}}{p}\right). \tag{30}$$

При $p\rho \gg 1$ первый член в скобках является главным и реализуется стеклообразное состояние. Это состояние отличается, однако, от состояния, описанного в предыдущем разделе. Непосредственное вычисление показывает, что $\langle l_x^2\rangle/l_0^2 = \langle\theta_y^2\rangle = \frac{D}{2}$. Если $D \ll 1$, вектор $\mathbf{l}$ в основном изменяется в плоскости yz или, по отношению к осям $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ – в плоскости u, v. В терминах работы [4] это – планарное состояние ЛИМ. Приведенные рассуждения не трудно переформулировать для случая, когда все три собственных значения κ_{jl} различны.

Рассмотренная выше линейная теория связывает статистические свойства случайных текстур орбитальной части параметра порядка ^{3}He-A с корреляционной функцией поля случайной анизотропии, созданного нитями аэрогеля. Точность предсказаний теории ограничивается точностью, с которой известна эта функция. Здесь для определения корреляционной функции была использована простейшая модель аэрогеля, допускающая аналитическое исследование. Применение более реалистических моделей а также использование экспериментальных данных о корреляциях в аэрогеле должны улучшить сделанные оценки.

Более существенным является ограничение применимости теории расстояниями $r \ll \xi_{\mathrm{LIM}}$, т.е. она описывает локальные свойства случайных текстур. Вопрос о связи между локальными и глобальными свойствами стеклообразных состояний ^{3}He-A остается не ясным и заслуживает дальнейшего исследования.

Автор благодарен В.В. Дмитриеву за полезное обсуждение и критические замечания. Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 14-02-00054-а.

1. А.И. Ларкин, ЖЭТФ **58**, 1466 (1970) [Sov. Phys. JETP **31**, 784 (1970)].
2. Y. Imry and S. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
3. G.E. Volovik, Письма в ЖЭТФ **63**, 281 (1996) [JETP Lett. **63**, 301 (1996)].
4. V.V. Dmitriev, D.A. Krasnikhin, N. Mulders, A.A. Senin, G.E. Volovik, and A.N. Yudin, Письма в ЖЭТФ **91**, 669 (2010) [JETP Lett. **91**, 599 (2010)].
5. T. Kunimatsu, T. Sato, K. Izumina, A. Matsubara, Y. Sasaki, M. Kubota, O. Ishikawa, T. Mizusaki, and Yu.M. Bunkov, Письма в ЖЭТФ **86**, 244 (2007) [JETP Lett. **86**, 321 (2007)].

6. E. M. Chudnovsky, W. M. Saslow, and R. A. Serota, Phys. Rev. B **73**, 251 (1986).
7. G. E. Volovik, J. Low Temp. Phys. **150**, 453 (2008).
8. D. Vollhardt and P. Woelfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Dover Publications, Inc. Mineola, N.Y. (2013).
9. D. Rainer and M. Vuorio, J. Phys. C: Solid State Phys. **10**, 3093 (1977).
10. I. A. Fomin and E. V. Surovtsev, Phys. Rev. B **92**, 064509 (2015).
11. E. V. Surovtsev and I. A. Fomin, J. Low Temp. Phys. **150**, 487 (2008).
12. J. V. Porto and J. M. Parpia, Phys. Rev. Lett. **74**, 4667 (1995).
13. И. А. Фомин, Письма в ЖЭТФ **88**, 65 (2008) [JETP Lett. **88**, 187 (2002)].
14. J. Pollanen, K. R. Shrier, S. Blinstein, J. P. Davis, H. Choi, T. M. Lippman, L. B. Lurio, and W. P. Halperin, J. Non-Crystalline Solids **354**, 4668 (2008).