Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 1, с. 52 – 57 © 2016 г. 10 июля

Квантовые матрицы Рака и 3-нитевые косы в представлениях размера 4

А. Миронов[+*×∘1)], *А. Морозов*[*×∘1)], *Ан. Морозов*[×∘∇1)], *А. Слепцов*[*×∘∇]

[+] *Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[*] *Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия*

[×] *Институт проблем передачи информации им. Харкевича, 127994 Москва, Россия*

[∘] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

[∇] *Лаборатория квантовой топологии, Челябинский государственный университет, 454001 Челябинск, Россия*

Поступила в редакцию 24 мая 2016 г.

Мы описываем инклюзивные матрицы Рака для простейшего не (анти)симметрического прямоугольного представления $R = [2, 2]$ для квантовых групп $U_q(sl_N)$. Большая часть из них размера 2, 3 и 4 и полностью описываются гипотезой о собственных значениях. Из двух матриц размера 6×6 одна также описывается таким образом, в случае другой, однако, собственные значения вырождены, и потому она была получена с помощью вычисления старших векторов. Вместе с намного более сложным вычислением для представления $R = [3, 1]$ и новым методом вычисления эксклюзивных матриц $\mathcal{S}$ и $\bar{\mathcal{S}}$ из инклюзивных, задачу о матрицах Рака для $|R| \leq 4$ можно считать закрытой, что позволяет вычислять и изучать соответствующие цветные полиномы ХОМФЛИ для 3-нитевых и древесных узлов.

DOI: 10.7868/S0370274X16130117

1. Введение. Матрицы Рака или $6j$-символы играют важную роль в теоретической физике с самых ранних ее дней. Достаточно сказать, что в [1] им отведена целая глава. Это отражает значимость симметрий в описании природы, но также и служит важным примером того, насколько сложно изучение симметрий самих по себе. Действительно, вычисление коэффициентов Рака, – это старая классическая задача, которая все еще далека от своего окончательного решения. Современный подход к таким задачам состоит в изучении физических (квантовополевых) моделей, которые не содержат ничего, кроме искомых величин: в данном случае это модель, где корреляторы сделаны из матриц Рака. Такая теория сейчас хорошо известна: это либо двумерная модель конформной теории поля Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ) [2], либо трехмерная теория Черна-Саймонса [3], наблюдаемые которой также известны как *полиномы узлов* [4]. Говоря современным языком, эти две теории связаны разновидностью голографической дуальности, которая является далеким обобщением этого архетипического примера.

Сложности с вычислением коэффициентов Рака, – это, тем самым, сложности с вычислением полиномов узлов, или, что практически то же самое, монодромий конформных блоков. Оба объекта сейчас активно изучаются, и цель данной работы состоит в описании недавних результатов. А именно, используя недавно разработанный в [5] метод старших весов (МСВ), мы смогли найти *инклюзивные* (т.е. для всех $Q \in R^{\otimes 3}$) квантовые матрицы Рака $\mathcal{U}_Q$

$$\Big\{(R \otimes R) \otimes R \longrightarrow Q\Big\} \xrightarrow{\mathcal{U}_Q} \Big\{R \otimes (R \otimes R) \longrightarrow Q\Big\} \quad (1)$$

для всех представлений R размером до 4: новые результаты связаны в первую очередь с $R = [3, 1]$ и $R = [2, 2]$. Для симметрических представлений $R = [1], [2], [3], [4]$, ответы известны из [6, 7], и описываются гипотезой о собственных значениях [7], для антисимметрических $R = [1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 1, 1]$ они могут быть получены с помощью замены переменных $q \longrightarrow q^{-1}$, для $R = [21]$ они были построены в [5]. Эти $\mathcal{U}_Q$ на самом деле являются матрицами, действующими в пространстве представлений $Y \in R^{\otimes 2}$, которые появляются в произведении $(R \otimes R)$ в (1) и дают вклад в данный Q. Для непрямоугольных представлений (т.е. для тех, чья диаграмма Юнга R не прямоугольна), представления Y и Q входят с нетривиальными множественностями, что приводит

[1)] e-mal: mironov@lpi.ru; mironov@itep.ru; morozov@itep.ru; andrey.morozov@itep.ru, sleptsov@itep.ru

к вырождениям и заметно усложняет задачу вычисления коэффициентов Рака. Часть проблемы состоит в том, что в таких случаях *матрицы* Рака зависят от выбора базиса и не имеют инвариантного (не зависящего от базиса) определения, таким образом отвращая математиков от таких исследований, несмотря на необходимость явных ответов для целей квантовой теории поля и теории струн. Мы детально описали эту задачу в недавней работе [8] и не будем углубляться в подробности MCB здесь. Вместо этого в данной работе мы заострим внимание на случае прямоугольного представления $R = [2,2]$, для которого эти дополнительные сложности отсутствуют. Наша цель состоит в перечислении необходимых для вычисления элементов и проверок, которые могут быть проделаны с полученным результатом.

Матрицы Рака сами по себе появляются в выражениях для полиномов узлов в двух случаях: эксклюзивные матрицы $(R, R, \bar{R} \longrightarrow R)$ описывают древесные узлы [9, 10], тогда как инклюзивные $(R, R, R \longrightarrow Q)$ описывают 3-нитевые узлы. Эксклюзивные матрицы на самом деле можно получить из инклюзивных [11], и в данной работе мы сконцентрируемся на последних. Узлы с большим числом нитей требуют сложных комбинаций матриц Рака (которые назывались *матрицами смешивания* в [6]), которые также проще чем кажется, однако, это выходит за рамки данной работы.

2. Структура матриц Рака для $|R| = 4$. *2.1. Представление $R = [4]$.* Случай симметричеcкого представления был исчерпывающим образом описан в [6, 7] и может служить образцом для других представлений. Тем не менее, это простейший случай, так как все матрицы Рака можно получить с помощью выражений для $U_q(sl_2)$. Квадрат симметрического представления [4] раскладывается очень простым образом:

$$[4] \otimes [4] = [8]_+ + [7,1]_- + [6,2]_+ + [5,3]_- + [4,4]_+, \quad (2)$$

где индексы плюс и минус отмечают представления из симметрического и антисимметрического квадрата, соответственно. Куб представления устроен как

$$[4] \otimes [4] \otimes [4] = [12] + [6,6] + 3\,[7,5] + 5\,[8,4] +$$
$$+4\,[9,3] + 3\,[10,2] + 2\,[11,1] + [4,4,4] + 2\,[5,4,3] + [5,5,2] +$$
$$+[6,3,3] + 3\,[6,4,2] + 2\,[6,5,1] + 2\,[7,3,2] + 4\,[7,4,1] +$$
$$+[8,2,2] + 3\,[8,3,1] + 2\,[9,2,1] + [10,1,1].$$

Большая часть представлений входят сюда с неединичными множественностями. Тем не менее, эти множественности находятся во взаимно-однозначном соответствии с промежуточными представлениями $Y \in R^{\otimes 2}$. Таким образом, оказывается возможным получить инклюзивную матрицу Рака:

Matrix size	Q	Number of matrices
1	$[12], [10,1,1], [8,2,2], [6,6], [6,3,3], [5,5,2], [4,4,4]$	7
2	$[11,1], [5,4,3], [6,5,1], [7,3,2], [9,2,1]$	5
3	$[10,2], [8,3,1], [7,5], [6,4,2]$	4
4	$[9,3], [7,4,1]$	2
5	$[8,4]$	1

Размер самой большой матрицы 5×5. Это означает, что все матрицы Рака, возникающие в $4^{\otimes 3}$, могут быть получены с помощью гипотезы о собственных значениях [7].

2.2. Представление $R = [3,1]$. Это сложный случай, детально описанный в [8]. Результаты в этой работе приведены в той же форме, что и в данной работе.

2.3. Представление $R = [2,2]$. Это случай относительно прост, однако это новый результат.

Разложение квадрата

$$[22] \otimes [22] = [44] \oplus [431]_- \oplus [422] \oplus [3311] \oplus$$
$$\oplus [3221]_- \oplus [2222] \quad (3)$$

содержит шесть неприводимых представлений. Заметим, что диаграммы $Y = [332]$ и $Y = [4211]$ отсутствуют в данном выражении.

Это подразумевает, что максимальный размер смешивающих матриц Рака 6×6. Еще один упрощающий фактор состоит в том, что все представления входят без множественностей, боле того, все $\mathcal{R}$-матрицы различны (отсутствуют случайные совпадения, которые часто появляются при изучении непрямоугольных представлений R). Вместе эти два факта дают надежду, что матрицы смешивания могут быть получены с помощью гипотезы о собственных значениях [7], которая дает явные выражения для элементов матриц Рака через собственные значения $\mathcal{R}$-матриц (они приведены в [7] для размеров до 5, а матрицы размера 6 описаны в [12]).

Куб представления устроен как

$$
\begin{gathered}
[2,2]\otimes\Big([2,2]\otimes[2,2]\Big) = 3\,[4,2,2,2,2] + \ [4,2,2,2,1,1] + [3,3,2,2,2] + 3\,[3,3,2,2,1,1] + 2\,[3,2,2,2,2,1] + \\
+ [2,2,2,2,2,2] + 4\,[5,3,2,1,1] + 3\,[5,3,2,2] + 3\,[5,3,3,1] + [3,3,3,1,1,1] + 2\,[6,3,2,1] + 3\,[4,4,3,1] + \\
+ [6,3,3] + \ [4,4,4] + [6,4,1,1] + 2\,[5,4,1,1,1] + 6\,[5,4,2,1] + 2\,[5,4,3] + 3\,[5,5,1,1] + [5,5,2] + 2\,[3,3,3,2,1] + \\
+ [3,3,3,3] + 2\,[4,3,2,1,1,1] + 6\,[4,3,2,2,1] + 3\,[4,3,3,1,1] + 3\,[4,3,3,2] + \ [6,2,2,2] + \\
+ [4,4,1,1,1,1] + 3\,[4,4,2,1,1] + 3\,[6,4,2] + 2\,[5,2,2,2,1] + 2\,[6,5,1] + \ [6,6] + 6\,[4,4,2,2],
\end{gathered}
$$

тогда как инклюзивные матрицы Рака принадлежат к следующему набору

Matrix size	Q	Number of matrices
1	[6,6],[6,3,3],[6,4,1,1],[6,2,2,2],[5,5,2],[4,4,4],[4,4,1,1,1,1],[4,2,2,2,1,1],[3,3,3,3],[3,3,2,2,2],[3,3,3,1,1,1], [2,2,2,2,2,2]	12
2	[6,5,1],[6,3,2,1],[5,4,3],[5,4,1,1,1],[5,2,2,2,1],[4,3,2,1,1,1],[3,3,3,2,1],[3,2,2,2,2,1]	8
3	[6,4,2],[5,5,1,1],[5,3,3,1],[5,3,2,2],[4,4,3,1],[4,3,3,2],[4,4,2,1,1],[4,3,3,1,1],[4,2,2,2,2],[3,3,2,2,1,1]	10
4	[5,3,2,1,1]	1
5	–	0
6	[5,4,2,1],[4,4,2,2],[4,3,2,2,1]	3

Все матрицы размера до четырех хорошо описываются гипотезой о собственных значениях (эти выражения были также проверены нами с помощью вычислений методом старших весов). Мы не будем приводить их здесь. Матрица 6×6

$$
\mathcal{U}_{[4,4,2,2]} = \begin{pmatrix}
\frac{[2]^2}{[5][4]^2} & \sqrt{\frac{[3]}{[5]}}\frac{[2]^2}{[4]^2} & \sqrt{\frac{1}{[5]}}\frac{[2]}{[4]} & -\sqrt{[7][3]}\frac{[3][2]}{[5][4]} & -\sqrt{[7]}\frac{[2]^2}{[4]^2} & \sqrt{\frac{[7][3]}{[5]}}\frac{[6][2]}{[4]^2[3]} \\
-\sqrt{\frac{[3]}{[5]}}\frac{[2]^2}{[4]^2} & -\frac{[3][2]([7]+[3]-2)}{[6][4]^2} & \sqrt{[3]}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & \sqrt{\frac{[7]}{[5]}}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & \sqrt{[7][5][3]}\frac{[3][2]}{[6][4]^2} & \sqrt{[7]}\frac{[2]^2}{[4]^2} \\
\sqrt{\frac{1}{[5]}}\frac{[2]}{[4]} & -\sqrt{[3]}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & \frac{[3]([9]-[5]+[3]+2)}{[6][5][2]} & \sqrt{\frac{[7][3]}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]} & \sqrt{\frac{[7]}{[5]}}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & \sqrt{[7][3]}\frac{[2]}{[5][4]} \\
\sqrt{[7][3]}\frac{[2]}{[5][4]} & -\sqrt{\frac{[7]}{[5]}}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & \sqrt{\frac{[7][3]}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]} & \frac{[3]([9]-[5]+[3]+2)}{[6][5][2]} & \sqrt{[3]}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & -\sqrt{\frac{1}{[5]}}\frac{[2]}{[4]} \\
\sqrt{[7]}\frac{[2]^2}{[4]^2} & \sqrt{[7][5][3]}\frac{[3][2]}{[6][4]^2} & -\sqrt{\frac{[7]}{[5]}}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & -\sqrt{[3]}\frac{[8][3]}{[6][4]^2} & -\frac{[3][2]([7]+[3]-2)}{[6][4]^2} & -\sqrt{\frac{[3]}{[5]}}\frac{[2]^2}{[4]^2} \\
\sqrt{\frac{[7][3]}{[5]}}\frac{[6][2]}{[4]^2[3]} & -\sqrt{[7]}\frac{[2]^2}{[4]^2} & \sqrt{[7][3]}\frac{[3][2]}{[5][4]} & -\sqrt{\frac{1}{[5]}}\frac{[2]}{[4]} & \sqrt{\frac{[3]}{[5]}}\frac{[2]^2}{[4]^2} & \frac{[2]^2}{[5][4]^2}
\end{pmatrix} \tag{4}
$$

была вычислена с помощью МСВ, но также может *a постериори* быть описана из собственных значений выражением [12, уравнение (17)] с

$$
\lambda_{[4,4]} = q^{-8},\ \lambda_{[4,3,1]} = -q^{-4},\ \lambda_{[4,2,2]} = q^{-2},\ \lambda_{[3,3,1,1]} = q^{2},\ \lambda_{[3,2,2,1]} = -q^{4},\ \lambda_{[2,2,2,2]} = q^{8}. \tag{5}
$$

Оставшиеся две матрицы 6×6 соответствуют транспонированным диаграммам и связаны, таким образом, посредством замены $q \longrightarrow -q^{-1}$ (дуальность ранг-уровень [13–15]), поэтому только одну из них необходимо вычислить. В данном случае присутствует пара совпадающих собственных значений, таким образом ожидается, что она будет иметь блочный вид при соответствующем выборе базиса. Нам, однако, не удалось подтвердить это естественное ожидание. Вместо этого мы построили эту матрицу напрямую с помощью МСВ:

$$\mathcal{U}_{[5,4,2,1]} = \begin{pmatrix} \frac{[2]}{[5][4]} & \sqrt{\frac{[6][2]}{[5]\alpha_0}}\frac{[3]}{[4]} & -\sqrt{\frac{[8][3]}{[5][4]\alpha_0}}\frac{[2]}{[4]} & -\sqrt{\frac{1}{[5]}} & -\sqrt{\frac{[8][3]}{[4]}}\frac{1}{[5]} & \sqrt{\frac{[8]}{[5][4]}} \\ \sqrt{\frac{[6][2]}{[5]\alpha_0}}\frac{[3]}{[4]} & \frac{[3]}{[2]^2\alpha_0} & -\sqrt{\frac{[8][3]}{[6][4][2]}}\frac{\alpha_1}{[4]\alpha_0} & \sqrt{\frac{1}{[6][2]\alpha_0}}\frac{[4][3]}{[2]^2} & -\sqrt{\frac{[8][3][2]\alpha_0}{[6][5][4]}}\frac{1}{[2]^2} & -\sqrt{\frac{[8][2]}{[6][4]\alpha_0}}\frac{[5][3]}{[4][2]} \\ -\sqrt{\frac{[8][3]}{[5][4]\alpha_0}}\frac{[2]}{[4]} & -\sqrt{\frac{[8][3]}{[6][4][2]}}\frac{\alpha_1}{[4]\alpha_0} & \frac{[3]\alpha_2}{[6][4]\alpha_0} & \sqrt{\frac{[8][2]}{[4]\alpha_0}}\frac{[3]}{[4][2]} & -\sqrt{\frac{\alpha_0}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]} & \sqrt{\frac{[3]}{\alpha_0}}\frac{[7][3]}{[6][4]} \\ -\sqrt{\frac{1}{[5]}} & \sqrt{\frac{1}{[6][2]\alpha_0}}\frac{[4][3]}{[2]^2} & \sqrt{\frac{[8][2]}{[4]\alpha_0}}\frac{[3]}{[4][2]} & -\frac{[3]^2-3[3]}{[6][2]} & -\sqrt{\frac{[8][4][3]}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]^2} & -\sqrt{\frac{[8]}{[4]}}\frac{[3]}{[6][2]} \\ -\sqrt{\frac{[8][3]}{[4]}}\frac{1}{[5]} & -\sqrt{\frac{[8][3][2]\alpha_0}{[6][5][4]}}\frac{1}{[2]^2} & -\sqrt{\frac{\alpha_0}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]} & -\sqrt{\frac{[8][4][3]}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]^2} & -\frac{[8][3]}{[6][5][4][2]} & -\sqrt{\frac{[3]}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]} \\ \sqrt{\frac{[8]}{[5][4]}} & -\sqrt{\frac{[8][2]}{[6][4]\alpha_0}}\frac{[5][3]}{[4][2]} & \sqrt{\frac{[3]}{\alpha_0}}\frac{[7][3]}{[6][4]} & -\sqrt{\frac{[8]}{[4]}}\frac{[3]}{[6][2]} & -\sqrt{\frac{[3]}{[5]}}\frac{[3]}{[6][2]} & -\frac{[3]}{[6][4]} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\alpha_2 = [11] - [7] + 1,\ \alpha_1 = [9] + 2[7] + 2[5] + [3] - 1,\ \alpha_0 = [7] + [5] - 1.$

Теперь мы рассмотрим особенно важные применения этих результатов для нетривиальных матриц Рака: связанные с *цветными* полиномами узлов.

3. [22]-цветные полиномы и их свойства. *3.1. 2- и 3-нитевые полиномы ХОМФЛИ.* Основная формула в теории полиномов узлов, раскрывающая их групповую природу – это выражение для полиномов ХОМФЛИ 2-нитевой косы с m пересечениями (которая описывает торические узлы/зацепления), окрашенные представлением (диаграммой Юнга) R:

$$H_R^{(m)} = \sum_{Y \in R\otimes R} \frac{d_Y}{d_R} \cdot \left(\frac{\epsilon_Y q^{\varkappa_Y}}{q^{4\varkappa_R} A^{|R|}}\right)^m, \qquad (7)$$

где $\epsilon_Y = \pm 1$ зависит от того, относится ли Y к симметрическому или антисимметрическому квадрату представления R, а q в степени собственного значения Казимира $\varkappa_Y = \sum_{(i,j)\in Y} \big(i - j\big)$ описывает собственные значения квантовой $\mathcal{R}$-матрицы, связанные с представлениями Y с квантовой размерностью

$$d_Y = \dim_q(Y) = \mathrm{Schur}_Y\left(p_k = \{A^k\}/\{q^k\}\right) = \\ = \prod_{(i,j)\in Y} \frac{\{Aq^{i-j}\}}{\{q^{1+\mathrm{arm}(i,j)+\mathrm{leg}(i,j)}\}}. \qquad (8)$$

Как обычно, $\{x\} = x - x^{-1}$. Для много-нитевых кос *эволюционный множитель* в степени m заменяется на более сложный элемент группы кос, который строится из матриц Рака и сплетающих $\mathcal{R}$, которые действуют на различные пары соседних кос. Согласно citeMMMkn12, полином узла/зацепления для замыкания 3-нитевой косы $B^{m_1,n_1|m_2,n_2|\dots}$ равен

$$H_R^{(m_1,n_1|m_2,n_2|\dots)} = \\ = \sum_{Q\in R^{\otimes 3}} \frac{d_Q}{d_R} \cdot \mathrm{Tr}_Q\Big\{\mathcal{R}_Q^{m_1}\mathcal{U}_Q\mathcal{R}_Q^{n_1}\mathcal{U}_Q^\dagger\mathcal{R}_Q^{m_2}\mathcal{U}_Q\mathcal{R}_Q^{n_2}\mathcal{U}_Q^\dagger\dots\Big\}. \qquad (9)$$

На рис. 1 $m_1 = 0, n_1 = -2, m_2 = 2, n_2 = -1, m_3 = 3$.

На самом деле (7) – это частный случай (9) для однопараметрического подсемейства $(m, 0)$, а эволюция по любому из параметров n может быть описана с помощью ее простого обобщения:

$$H_R^{(m,n_1|m_2,n_2|\dots)} = \sum_{Y\in R\otimes R} \frac{d_Y}{d_R} \cdot \\ \cdot \left(\frac{\epsilon_Y q^{\varkappa_Y}}{q^{4\varkappa_R} A^{|R|}}\right)^m \cdot C_{R,Y}^{(\cdot,n_1|m_2,n_2|\dots)}(A,q), \qquad (10)$$

где поправочные коэффициенты $C_{R,Y}$ зависят от других параметров косы. Несмотря на то, что они не равны единице, как в (7), они часто обладают относительно простой и познаваемой структурой, см. [8] и уравнение (17) ниже. Похожая формула для двухпараметрической эволюции

$$H_R^{(m_1,n_1|m_2,n_2|\dots)} = \sum_{Y_1,Y_2\in R\otimes R} \left(\frac{\epsilon_{Y_1} q^{\varkappa_{Y_1}}}{q^{4\varkappa_R} A^{|R|}}\right)^{m_1} \times \\ \times \left(\frac{\epsilon_{Y_2} q^{\varkappa_{Y_2}}}{q^{4\varkappa_R} A^{|R|}}\right)^{m_2} \cdot h_{R,Y_1,Y_2}^{(\cdot,n_1|\cdot,n_2|\dots)}(A,q) \qquad (11)$$

играет центральную роль в $\mathcal{U}-\mathcal{S}$ соотношении в [11].

3.2. Представление $R = [2,2]$. Эти вычисленные нами матрицы Рака позволяют нам рассмотреть представление $R = [2,2]$. Прежде полиномы

ХОМФЛИ в этом представлении были доступны только для конкретного набора торических узлов, где полный ответ дается формулой Россо–Джонса, являющейся обобщением (7). Новые результаты для всех узлов из таблицы Рольфсена (до 10 пересечений), которые обладают представлением 3-нитевой косы (см. [17]). Они все обладают свойствами факторизации [13, 15, 18]

$$H_R(q=1,A) \;=\; H_{[1]}(q=1,A)^{|R|} \tag{12}$$

и [19]

$$\begin{gathered} H_{[22]} = H_{[31]} = H_{[4]} = H_{[2]}^2 \;\text{ при }\; q^4 = 1, \\ H_{[22]} = H_{[4]} \;\text{ при }\; q^6 = 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Заметим, что из-за того, что $R = [2,2]$ это не диаграмма-крюк, простое утверждение о цветных полиномах Александера при $A = 1$ *не* выполняется.

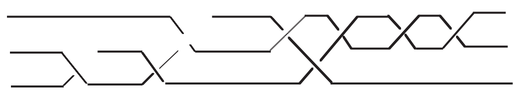

Рис. 1

Также остаются верными и свойства пертурбативного разложения [20] и разложения по родам (разложение Гурвица) [21], описанные в разделе 6 [8], хотя возможные проверки и ограничены по причинам, аналогичным приведенным в той работе.

Что касается дифференциального разложения [15, 22–24], – это отдельная интересная задача. Для прямоугольных диаграмм $R = [r^s]$ теория представлений предсказывает, что

$$H_{[r^s]}^{\mathcal{K}} - 1 \sim \{Aq^r\}\{A/q^s\}, \tag{14}$$

но следующие слагаемые не настолько очевидны. Мы приводим здесь только простой пример узла-восьмерки, который служил основой для идеи такого разложения для симметрических представлений [15]:

$$\begin{gathered} H_{[22]}^{4_1} = 1 + \{Aq^2\}\{A/q^2\}\Big\{[2]^2 - [3]\Big(\{Aq^3\}\{A/q\} + \\ \{Aq\}\{A/q^3\}\Big) + [2]^2\{Aq^3\}\{Aq\}\{A/q\}\{A/q^3\} + \\ + \{Aq^3\}\{Aq^2\}\{Aq\}\{A/q\}\{A/q^2\}\{A/q^3\}\Big\}. \end{gathered} \tag{15}$$

Последнее, что мы хотели бы упомянуть в данной работе – это краткое описание $H_{[22]}$ для простого, но важного подсемейства трехнитевых кос.

3.3. Эволюция для $(m,-1|1,-1)$. Это семейство включает в себя набор интересных простых узлов: $4_1, 5_2, 6_2, 7_3, 8_2, 9_3, 10_2, \ldots,$ связано с крендельными узлами $(m,\bar{2},1)$ [8, 25] и описывается формулой (10). Наше знание матриц Рака позволяет нам вычислить поправочные коэффициенты C для $R = [2,2]$ (мы сохраняем только индекс диаграммы Y для упрощения формул):

$$\begin{gathered} H_{[2,2]}^{(m,-1\,|\,1,-1)} = \frac{A^{-4m}}{\{q\}^4 d_{[22]}}\Big(d_{[44]}C_{[44]}\cdot q^{8m} + \\ + d_{[431]}C_{[431]}\cdot(-q^4)^m + d_{[422]}C_{[422]}\cdot q^{2m} + \\ + d_{[3311]}C_{[3311]}\cdot q^{-2m} + d_{[3221]}C_{[3221]}\cdot(-q^{-4})^m + \\ + d_{[2222]}C_{[2222]}\cdot q^{-8m}\Big), \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} C_{[44]} = A^8 - q^2[2]^2A^6\{q\} + q^4[3][2]A^4\{q\}^2 \times \\ \times(q + q^{-1}[3]) - q^6[3][2]^3A^2\{q\}^3 + q^8[3][2]^2\{q\}^4, \\ C_{[431]} = A^8 - q^2[2]A^6\{q\}([3] - q^{-4}) + q^2[3]^2[2]A^4\{q\}^2 \times \\ \times(q - q^{-1}) - q^2[3][2]A^2\{q\}^3(q^4 - [3]) - q^4[3][2]^2\{q\}^4, \\ C_{[422]} = A^8 + q^{-2}[2]A^6\{q\}(1 - q^5[2]) + q^4[3][2]A^4\{q\}^2 \times \\ \times(q - q^{-2}[2]) + q^4[3][2]A^2\{q\}^3(1 - q^{-5}[2]) + q^2[3][2]^2\{q\}^4, \\ C_{[3311]} = A^8 - q^2[2]A^6\{q\}(1 - q^{-5}[2]) + q^{-4}[3][2]A^4\{q\}^2 \times \\ \times(q^{-1} - q^2[2]) - q^{-4}[3][2]A^2\{q\}^3(1 - q^5[2]) + q^{-2}[3][2]^2\{q\}^4, \\ C_{[3221]} = A^8 + q^{-2}[2]A^6\{q\}([3] - q^4) + q^2[3]^2[2]A^4\{q\}^2 \times \\ \times(q^{-1} - q) + q^{-2}[3][2]A^2\{q\}^3(q^{-4} - [3] - q^{-4}[3][2]^2\{q\}^4, \\ C_{[222]} = A^8 + q^{-2}[2]^2A^6\{q\} + q^{-4}[3][2]A^4\{q\}^2 \times \\ \times(q^{-1} + q[3]) + q^{-6}[3][2]^3A^2\{q\}^3 + q^{-8}[3][2]^2\{q\}^4. \end{gathered} \tag{17}$$

Аналогичный результат для (анти)симметрических представлений и для $R = [3,1]$ приведены в [8], обобщение с (10) на (11) приведен в [11].

4. Заключение. Мы привели результаты вычислений инклюзивных матриц Рака для представления $R = [2,2]$. Это простой и красивый пример, в котором вычисления уже замысловаты, но результат относительно прост и может быть приведен в коротком виде. Этот результат не только является шагом вперед в старой задаче теоретической физики, но также и находит применение в изучении цветных полиномов узлов, которые являются обобщением конформных блоков и находятся в фокусе внимание современной науки. Явные вычисления подтверждают некоторые из имеющихся гипотез в этой области и ставят новые вопросы о разложении по родам, разложению Гурвица и дифференциальному разложению, важным разделам квантовой теории поля в различных размерностях.

Данная работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант # 16-11-10291).

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М. (1974).
2. J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B **37**, 95 (1971); S. Novikov, UMN **37**, 37 (1982); E. Witten, Comm. Math. Phys. **92**, 455 (1984); V. Knizhnik

and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **247**, 83 (1984); A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, and S. Shatashvili, Int. J. Mod. Phys. A **5**, 2495 (1990).

3. S.-S. Chern and J. Simons, Ann. Math. **99**, 48 (1974); E. Witten, Comm. Math. Phys. **121**, 351 (1989); E. Guadagnini, M. Martellini, and M. Mintchev, Clausthal (1989), Procs. 307-317; Phys. Lett. B **235**, 275 (1990); R. K. Kaul and T. R. Govindarajan, Nucl. Phys. B **380**, 293 (1992); hep-th/9111063; Nucl. Phys. B **393**, 392 (1993); P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, and R. K. Kaul, Nucl. Phys. B **402**, 548 (1993); hep-th/9212110; Nucl. Phys. B **422**, 291 (1994); hep-th/9312215; Mod. Phys. Lett. A **10**, 1635 (1995); hep-th/9412084; A. Morozov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **835**, 284 (2010); arXiv:1001.2003.
4. J. W. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. **30**(2), 275 (1928); J. H. Conway, In: *Computational Problems in Abstract Algebra*, ed. by J. Leech, Proc. Conf. Oxford (1967), Pergamon Press, Oxford-N.Y. (1970), p. 329; V. F. R. Jones, Invent. Math. **72**, 1 (1983); Bull. AMS **12**, 103 (1985); Ann. Math. **126**, 335 (1987); L. Kauffman, Topology **26**, 395 (1987); P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millet, and A. Ocneanu, Bull. AMS. **12**, 239 (1985); J. H. Przytycki and K. P. Traczyk, Kobe J. Math. **4**, 115 (1987); D. Bar-Natan and S. Morrison, http://www.katlas.org.
5. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, J. Mod. Phys. A **30**, 1550169 (2015); arXiv:1508.02870.
6. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, in: *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer*, ed. by A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, and E. Scheidegger, World Scietific Publishins Co. Pte. Ltd. (2013), p.101; arXiv:1112.5754; JHEP **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654; A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, Nucl. Phys. B **868**, 271 (2013); arXiv:1207.0279; A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, Adv. High Energy Physics **2013**, 931830 (2013); arXiv:1304.1486; A. Anokhina and An. Morozov, Theor. Math. Phys. **178**, 1 (2014); arXiv:1307.2216; A. Anokhina, arXiv:1412.8444.
7. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, IJMP A **28**, 1340009 (2013); arXiv:1209.6304.
8. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, arXiv:1605.02313.
9. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, and V. K. Singh, JHEP **1507**, 109 (2015); arXiv:1504.00371.
10. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov, arXiv:1601.04199.
11. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, to appear.
12. A. Mironov and A .Morozov, Phys. Lett. B **755**, 47 (2016); arXiv:1511.09077.
13. P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, and A. Smirnov, JHEP **03**, 021 (2013); arXiv:1106.4305.
14. S. Gukov and M. Stosic, arXiv:1112.0030.
15. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **2012**, 131 (2012); arXiv:1203.5978.
16. M. Rosso and V. F. R. Jones, J. Knot Theory Ramifications **2**, 97 (1993); X.-S. Lin and H. Zheng, Trans. Amer. Math. Soc. **362**, 1 (2010); math/0601267.
17. http://knotebook.org.
18. K. Liu and P. Peng, arXiv:0704.1526; Sh. Zhu, arXiv:1206.5886.
19. Ya. Kononov and A. Morozov, Phys. Lett. B **747**, 500 (2015), arXiv:1505.06170.
20. M. Kontsevich, Advances in Soviet Math. **16**, 137 (1993); M. Alvarez, J. M. F. Labastida, and E. Perez, Nucl. Phys. B **488**, 677 (1997); arXiv:hep-th/9607030; S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press, May 2012, arXiv:1103.5628; P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov, and A. Smirnov, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1330025 (2013); arXiv:1112.5406.
21. A. Mironov, A. Morozov, and A. Sleptsov, Theor. Math. Phys. **177**, 179 (2013), arXiv:1303.1015; Eur. Phys. J. C **73**, 2492 (2013); arXiv:1304.7499; A. Sleptsov, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1430063 (2014).
22. N. M. Dunfield, S. Gukov, and J. Rasmussen, Experimental Math. **15**, 129 (2006); math/0505662; E. Gorsky, S. Gukov, and M. Stosic, arXiv:1304.3481.
23. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, AIP Conf. Proc. **1562**, 123 (2013); arXiv:1306.3197.
24. S. Arthamonov, A. Mironov, and A. Morozov, Theor. Math. Phys. **179**, 509 (2014) [Teor. Mat. Fiz. **179**, 147 (2014)]; arXiv:1306.5682.
25. A. Mironov, A. Morozov, and A. Sleptsov, JHEP **07**, 069 (2015); arXiv:1412.8432.