Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 2, с. 71 – 74 © 2016 г. 25 июля

Низкоэнергетическое соотношение для тензора энергии-импульса в КХД и глюонный конденсат в магнитном поле

Н. О. Агасян[1)]

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 мая 2016 г.

Изучается непертурбативный вакуум КХД в магнитном поле. Получено низкоэнергетическое соотношение для следа тензора энергии-импульса в магнитном поле. Показано, что производные по магнитному полю от кваркового и глюонного вкладов в след тензора энергии-импульса совпадают. Вычислена зависимость глюонного конденсата от магнитного поля в случае сильных и слабых полей.

DOI: 10.7868/S0370274X16140010

1. В последние годы важным объектом исследований стало изучение фазовой структуры вакуума под влиянием внешнего магнитного поля B. Недавно было показано, что при столкновении тяжелых ионов могут рождаться сильные магнитные поля с напряженностью $eB \sim 10^2 \div 10^4$ МэВ^2. Данные магнитные поля могут приводить к наблюдаемым явлениям (так называемому киральному магнитному эффекту) [1–5] в экспериментах на RHIC и LHC. Также в ранней Вселенной, на энергетической шкале сильных взаимодействий, могли существовать сильные магнитные поля $eB \sim \Lambda^2_{QCD}$. Такие напряженности магнитных полей могут приводить к новым интересным явлениям на стадии кварк-адронного фазового перехода [6–29].

В квантово-полевых теориях важную роль играют соотношения, которые являются следствиями симметрийных свойств теории. Поиски симметрий и ограничений, которые эти симметрии накладывают на физические характеристики системы, приобретают особое значение в КХД-теории с конфайнментом, где "наблюдаемыми" величинами являются составные состояния – адроны. В понимании непертурбативных вакуумных свойств КХД принципиально важную роль играют низкоэнергетические теоремы или тождества Уорда (масштабные и киральные). В КХД низкоэнергетические теоремы были получены в начале 1980-х гг. [30]. Низкоэнергетические теоремы КХД, следующие из общих симметрийных свойств и не зависящие от деталей механизма конфайнмента, позволяют получить информацию, которую иногда невозможно получить каким-либо другим путем. Также они могут быть использованы как "физически разумные" ограничения при построении эффективных теорий и различных моделей КХД-вакуума. В КХД низкоэнергетические теоремы при $T \neq 0$, $\mu_q \neq 0$ были получены в [31, 32]. В магнитном поле низкоэнергетические теоремы и их приложения к различным физическим процессам исследовались в [33–36]. Низкоэнергетические соотношения для тензора энергии-импульса при конечной температуре изучались в [37, 38].

В настоящей работе получено низкоэнергетическое соотношение для тензора энергии-импульса в КХД в магнитном поле. На основе этого соотношения найдена зависимость глюонного конденсата от магнитного поля в случае сильных и слабых полей.

2. В евклидовой формулировке статистическая сумма КХД при наличии внешнего абелева поля A_μ может быть записана в виде

$$Z = \exp\left\{-\frac{1}{4e^2}\int d^4x F^2_{\mu\nu}\right\} \times$$
$$\times \int [DC][D\bar{q}][Dq] \exp\left\{-\int d^4x \mathcal{L}\right\}, \qquad (1)$$

где лагранжиан КХД в фоновом поле имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g_0^2}(G^a_{\mu\nu})^2 + \sum_{q=u,d} \bar{q}[\gamma_\mu(\partial_\mu - iQ_qA_\mu - i\frac{\lambda^a}{2}C^a_\mu) + m_{0q}]q. \qquad (2)$$

Здесь Q_q – зарядовая матрица кварков с ароматом $q = (u, d)$ и затравочной массой m_{0q} и для простоты явно не выписаны "духовые" и фиксирующие калибровку слагаемые. Плотность энергии дается выражением $V_4\varepsilon\ (B, m_{0u}, m_{0d}) = -\ln Z$. Из (1) следу-

[1)]e-mail: agasian@itep.ru

ет соотношение для глюонного конденсата ($\langle G^2\rangle \equiv \equiv \langle (G^a_{\mu\nu})^2\rangle$)

$$\langle G^2\rangle(B, m_{0u}, m_{0d}) = 4\frac{\partial\varepsilon}{\partial(1/g_0^2)}. \qquad (3)$$

Система, описываемая статистической суммой (1), характеризуется набором размерных параметров $M, B, m_{0q}(M)$ и безразмерным зарядом $g_0^2(M)$, где M есть ультрафиолетовое обрезание. С другой стороны можно рассмотреть перенормированную плотность энергии ε_R и, используя размерные и ренормгрупповые свойства ε_R, выразить (3) в форме, содержащей производные относительно физического параметра B и перенормированных масс m_q.

Явление размерной трансмутации приводит к появлению непертурбативного размерного параметра

$$\Lambda = M\exp\left\{\int_{\alpha_s(M)}^{\infty}\frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}\right\}, \qquad (4)$$

где $\alpha_s = g_0^2/4\pi$, и $\beta(\alpha_s) = d\alpha_s(M)/d\ln M$ – функция Гелл-Манна–Лоу. Хорошо известно, что масса кварка имеет аномальную размерность и зависит от масштаба M. Ренорм-групповое уравнение для бегущей массы $m_0(M)$ имеет вид $d\ln m_0/d\ln M = -\gamma_m$, и мы использовали $\overline{MS}$-схему, для которой β и γ_m являются независимыми от кварковой массы [32, 39]. Ренорминвариантная масса имеет вид

$$m_q = m_{oq}(M)\exp\{\int^{\alpha_s(M)}\frac{\gamma_{m_q}(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)}d\alpha_s\}, \qquad (5)$$

Далее мы заметим, что т.к. плотность энергии является реном-инвариантной величиной, то ее аномальная размерность равна нулю. Таким образом, ε_R имеет только нормальную (каноническую) размерность, равную 4. Используя ренорм-инвариантность of Λ, можно записать в наиболее общем виде

$$\varepsilon_R = \Lambda^4 f(\frac{B}{\Lambda^2}, \frac{m_u}{\Lambda}, \frac{m_d}{\Lambda}), \qquad (6)$$

где f есть некоторая функция. Из (4), (5) и (6) получаем

$$\frac{\partial\varepsilon_R}{\partial(1/g_0^2)} = \frac{\partial\varepsilon_R}{\partial\Lambda}\frac{\partial\Lambda}{\partial(1/g_0^2)} + \sum_q\frac{\partial\varepsilon_R}{\partial m_q}\frac{\partial m_q}{\partial(1/g_0^2)}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial m_q}{\partial(1/g_0^2)} = -4\pi\alpha_s^2 m_q\frac{\gamma_{m_q}(\alpha_s)}{\beta(\alpha_s)}. \qquad (8)$$

С учетом (3) глюонный конденсат дается выражением

$$\langle G^2\rangle(B, m_u, m_d) = \frac{16\pi\alpha_s^2}{\beta(\alpha_s)}\left(4 - 2B\frac{\partial}{\partial B} - \sum_q(1+\gamma_{m_q})m_q\frac{\partial}{\partial m_q}\right)\varepsilon_R. \qquad (9)$$

Удобно выбрать такой большой масштаб, что можно взять нижний порядок выражений, $\beta(\alpha_s) \to \to -b\alpha_s^2/2\pi$, где $b = (11N_c - 2N_f)/3$ и $1+\gamma_m \to 1$. Таким образом, мы имеем следующие уравнения для конденсатов [8]

$$\langle G^2\rangle(B) = -\frac{32\pi^2}{b}\left(4 - 2B\frac{\partial}{\partial B} - \sum_q m_q\frac{\partial}{\partial m_q}\right)\varepsilon_R \equiv -\hat{D}\varepsilon_R, \qquad (10)$$

$$\langle\bar{q}q\rangle(B) = \frac{\partial\varepsilon_R}{\partial m_q}. \qquad (11)$$

3. В КХД эффективная плотность энергии, из которой можно получить конденсаты $\langle\bar{q}q\rangle(B)$ и $\langle G^2\rangle(B)$, используя общие соотношения (10) и (11), записывается в виде

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}}(B) = \varepsilon_{\mathrm{vac}} + \varepsilon_h(B), \qquad (12)$$

где $\varepsilon_{\mathrm{vac}} = \frac{1}{4}\langle\theta_{\mu\mu}\rangle$ – непертурбативная плотность энергии вакуума при $B = 0$ и

$$\langle\theta_{\mu\mu}\rangle = -\frac{b}{32\pi^2}\langle G^2\rangle + \sum_{q=u,d}m_q\langle\bar{q}q\rangle \qquad (13)$$

– след тензора энергии-импульса. В уравнении (12) $\varepsilon_h(B)$ – плотность энергии, создаваемая адронами в магнитном поле. Кварковый и глюонный конденсаты даются уравнениями

$$\langle\bar{q}q\rangle(B) = \frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{eff}}}{\partial m_q}, \qquad (14)$$

$$\langle G^2\rangle(B) = -\hat{D}\varepsilon_{\mathrm{eff}}, \qquad (15)$$

где оператор $\hat{D}$ определен соотношением (10)

$$\hat{D} = \frac{32\pi^2}{b}\left((4 - 2B\frac{\partial}{\partial B} - \sum_q m_q\frac{\partial}{\partial m_q}\right). \qquad (16)$$

Рассмотрим случай $B = 0$. Используем низкоэнергетическую теорему для производной глюонного конденсата по массе кварка [30]

$$\frac{\partial}{\partial m_q}\langle G^2\rangle = \int d^4x\langle G^2(0)\bar{q}q(x)\rangle = -\frac{96\pi^2}{b}\langle\bar{q}q\rangle + O(m_q), \qquad (17)$$

где $O(m_q)$ обозначает линейные члены по массам легких кварков. Получаем следующее соотношение

$$\frac{\partial\varepsilon_{\rm vac}}{\partial m_q} = -\frac{b}{128\pi^2}\frac{\partial}{\partial m_q}\langle G^2\rangle + \frac{1}{4}\langle\bar{q}q\rangle = \\ = \frac{3}{4}\langle\bar{q}q\rangle + \frac{1}{4}\langle\bar{q}q\rangle = \langle\bar{q}q\rangle. \quad (18)$$

Заметим, что три четверти кваркового конденсата происходят из глюонной части непертурбативной плотности энергии вакуума. Действуя аналогичным образом, получим выражение для глюонного конденсата

$$-\hat{D}\varepsilon_{\rm vac} = \langle G^2\rangle. \quad (19)$$

Для того чтобы получить зависимость кваркового и глюонного конденсатов от магнитного поля B, используем соотношение Гелл-Манна–Оакса–Реннера (ГОР) ($\Sigma = |\langle\bar{u}u\rangle| = |\langle\bar{d}d\rangle|$)

$$F_\pi^2 M_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d)\langle\bar{u}u + \bar{d}d\rangle = (m_u + m_d)\Sigma. \quad (20)$$

Тогда мы находим следующие соотношения

$$\frac{\partial}{\partial m_q} = \frac{\Sigma}{F_\pi^2}\frac{\partial}{\partial M_\pi^2}, \quad (21)$$

$$\sum_q m_q\frac{\partial}{\partial m_q} = (m_u + m_d)\frac{\Sigma}{F_\pi^2}\frac{\partial}{\partial M_\pi^2} = M_\pi^2\frac{\partial}{\partial M_\pi^2}, \quad (22)$$

$$\hat{D} = \frac{32\pi^2}{b}\left(4 - 2B\frac{\partial}{\partial B} - M_\pi^2\frac{\partial}{\partial M_\pi^2}\right). \quad (23)$$

В рамках описанного выше подхода, можно получить низкоэнергетическое соотношение для квантовой аномалии в следе тензора энергии-импульса в магнитном поле. Главный вклад в плотность энергии в магнитном поле дают легчайшие адроны, а именно π-мезоны. Общее выражение для плотности энергии в магнитном поле имеет вид

$$\varepsilon_\pi = B^2\varphi(M_\pi^2/B)\ , \quad (24)$$

где φ есть функция отношения M_π^2/B. Тогда найдем следующие соотношения

$$\left(4 - 2B\frac{\partial}{\partial B} - M_\pi^2\frac{\partial}{\partial M_\pi^2}\right)\varepsilon_\pi = M_\pi^2\frac{\partial\varepsilon_\pi}{\partial M_\pi^2}. \quad (25)$$

С учетом (14), (15), (18), (22) и (25) получим

$$\Delta\langle\bar{q}q\rangle = \frac{\partial\varepsilon_\pi}{\partial m_q},\ \ \Delta\langle G^2\rangle = -\frac{32\pi^2}{b}M_\pi^2\frac{\partial\varepsilon_\pi}{\partial M_\pi^2}, \quad (26)$$

где $\Delta\langle\bar{q}q\rangle = \langle\bar{q}q\rangle_B - \langle\bar{q}q\rangle$ и $\Delta\langle G^2\rangle = \langle G^2\rangle_B - \langle G^2\rangle$. Используя (22), можно записать (26) в форме

$$\Delta\langle G^2\rangle = -\frac{32\pi^2}{b}\sum_q m_q\Delta\langle\bar{q}q\rangle. \quad (27)$$

Разделим обе стороны (27) на ΔB и перейдем к пределу $\Delta B\to 0$. Тогда находим

$$\frac{\partial\langle G^2\rangle}{\partial B} = -\frac{32\pi^2}{b}\sum_q m_q\frac{\partial\langle\bar{q}q\rangle}{\partial B}. \quad (28)$$

Это соотношение может быть переписано в виде

$$\frac{\partial\langle\theta^g_{\mu\mu}\rangle}{\partial B} = \frac{\partial\langle\theta^q_{\mu\mu}\rangle}{\partial B}, \quad (29)$$

где $\langle\theta^q_{\mu\mu}\rangle = \sum m_q\langle\bar{q}q\rangle$ и $\langle\theta^g_{\mu\mu}\rangle = (\beta(\alpha_s)/16\pi\alpha_s^2)\langle G^2\rangle$ являются, соответственно, кварковым и глюонным вкладами в след тензора энергии-импульса. Заметим, что при выводе этого результата мы использовали соотношение ГОР, и поэтому соотношения (28), (29) справедливы в теории с легкими кварками. Следовательно в области, где возбуждениями массивных адронов и взаимодействием пионов можно пренебречь, уравнение (29) становится строгой теоремой КХД.

В киральном пределе ($m_q = 0$) из уравнения (27) следует, что глюонный конденсат (в отличие от кваркового) не зависит от магнитного поля ($\Delta\langle G^2\rangle = 0$). Это связано с тем, что безмассовые, невзаимодействующие π-мезоны являются масштабно-инвариантной системой и, следовательно, не дают вклада в след тензора энергии-импульса.

4. Зная зависимость кваркового конденсата от магнитного поля, полученные выше соотношения позволяют найти зависимость глюонного конденсата от магнитного поля. В киральной теории возмущений (КТВ) разложение для кваркового конденсата в магнитном поле [7] ведется по параметру $\xi = eB/(4\pi F_\pi)^2$. Тогда, в рамках КТВ, при $\xi < 1$ поля можно считать слабыми. Однако, с физической точки зрения, необходимо рассматривать радиус кривизны движения частицы в поле (радиус Лармора) $1/\sqrt{eB}$. Если радиус Лармора меньше зарядового радиуса π-мезона, $1/\sqrt{eB} < r_\pi$, то частицу нельзя рассматривать как точечную и необходимо учитывать кварковую структуру π-мезона. Для слабых магнитных полей сдвиг кваркового конденсата в магнитном поле был найден в [8] ($\Delta\Sigma = -\Delta\langle\bar{q}q\rangle$)

$$\frac{\Delta\Sigma}{\Sigma} = \frac{(eB)^2}{96\pi^2F_\pi^2M_\pi^2}. \quad (30)$$

Из уравнения (27), с учетом соотношения ГОР (20), найдем поведение глюонного конденсата в слабом магнитном поле

$$\langle G^2\rangle(B) = \langle G^2\rangle + \frac{(eB)^2}{3b}. \quad (31)$$

В случае сильного магнитного поля кварковый конденсат был вычислен в [6]

$$\frac{\Delta\Sigma}{\Sigma} = \frac{eB}{(4\pi F_\pi)^2}\ln 2. \qquad (32)$$

Тогда для глюонного конденсата в сильных полях находим

$$\langle G^2\rangle(B) = \langle G^2\rangle + \frac{2\ln 2}{b} M_\pi^2(eB). \qquad (33)$$

Квадратичный рост глюонного конденсата в слабых магнитных полях согласуется с результатом вычислений на решетке [40], где данное явление было названо глюонным катализом.

5. В предлагаемой работе изучался непертурбативный вакуум КХД в магнитном поле. Из первых принципов выведено низкоэнергетическое соотношение для следа тензора энергии-импульса в магнитном поле. Найдено уравнение, связывающее кварковый и глюонный конденсаты в магнитном поле. Получены аналитические выражения для глюонного конденсата в магнитном поле в случае слабых и сильных полей.

1. D. Kharzeev, R. D. Pisarski, and M. H. G. Tytgat, Phys. Rev. Lett. **81**, 512 (1998).
2. D. Kharzeev, Phys. Lett. B **633**, 260 (2006).
3. D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa, Nucl. Phys. A **803**, 227 (2008).
4. K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008).
5. K. Fukushima, M. Ruggieri, and R. Gatto, Phys. Rev. D **81**, 114031 (2010).
6. I. A. Shushpanov and A. V. Smilga, Phys. Lett. B **402**, 351 (1997); doi:10.1016/S0370-2693(97)00441-3 [hep-ph/9703201].
7. N. O. Agasian and I. A. Shushpanov, Phys. Lett. B **472**, 143 (2000).
8. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **64**, 554 (2001) [Yad. Fiz. **64**, 608 (2001)].
9. N. O. Agasian and I. A. Shushpanov, JHEP **0110**, 006 (2001).
10. N. O. Agasian and S. M. Fedorov, Phys. Lett. B **663**, 445 (2008).
11. E. S. Fraga and A. J. Mizher, Phys. Rev. D **78**, 025016 (2008).
12. A. J. Mizher, M. N. Chernodub, and E. S. Fraga, Phys. Rev. D **82**, 105016 (2010).
13. E. S. Fraga, Lect. Notes Phys. **871**, 121 (2013).
14. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **71**, 1967 (2008) [Yad. Fiz. **71**, 1998 (2008)].
15. R. Gatto and M. Ruggieri, Phys. Rev. D **83**, 034016 (2011).
16. R. Gatto and M. Ruggieri, Lect. Notes Phys. **871**, 87 (2013).
17. A. Ayala, C. A. Dominguez, L. A. Hernandez, M. Loewe, and R. Zamora, Phys. Rev. D **92**(9), 096011 (2015) [Phys. Rev. D **92**(11), 119905 (2015)].
18. A. Ayala, C. A. Dominguez, L. A. Hernandez, M. Loewe, J. C. Rojas, and C. Villavicencio, Phys. Rev. D **92**(1), 016006 (2015).
19. J. O. Andersen and A. Tranberg, JHEP **1208**, 002 (2012).
20. J. O. Andersen, W. R. Naylor, and A. Tranberg, Rev. Mod. Phys. **88**, 025001 (2016).
21. G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, and A. Schafer, Phys. Rev. D **86**, 071502 (2012).
22. V. D. Orlovsky and Y. A. Simonov, Phys. Rev. D **89**(5), 054012 (2014).
23. V. D. Orlovsky and Y. A. Simonov, JHEP **1309**, 136 (2013).
24. M. A. Andreichikov, B. O. Kerbikov, V. D. Orlovsky, and Y. A. Simonov, Phys. Rev. D **87**(9), 094029 (2013).
25. V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rept. **576**, 1 (2015).
26. E.-M. Ilgenfritz, M. Kalinowski, M. Muller-Preussker, B. Petersson, and A. Schreiber, Phys. Rev. D **85**, 114504 (2012).
27. E.-M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, B. Petersson, and A. Schreiber, Phys. Rev. D **89**(5), 054512 (2014).
28. P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, E. V. Luschevskaya, and M. I. Polikarpov, Phys. Rev. D **80**, 054503 (2009).
29. M. D'Elia, S. Mukherjee, and F. Sanfilippo, Phys. Rev. D **82**, 051501 (2010).
30. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **191**, 301 (1981); Sov. J. Part. Nucl. **13**, 224 (1982); A. A. Migdal and M. A. Shifman, Phys. Lett. B **114**, 445 (1982).
31. P. J. Ellis, J. I. Kapusta, and H. B. Tang, Phys. Lett. B **443**, 63 (1998).
32. I. A. Shushpanov, J. I. Kapusta, and P. J. Ellis, Phys. Rev. C **59**, 2931 (1999).
33. N. O. Agasian, JETP Lett. **95**, 171 (2012).
34. N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **74**, 1230 (2011) [Yad. Fiz. **74**, 1259 (2011)].
35. N. O. Agasian, Phys. Lett. B **562**, 257 (2003).
36. N. O. Agasian, Phys. Lett. B **488**, 39 (2000).
37. N. O. Agasian, JETP Lett. **74**, 353 (2001).
38. N. O. Agasian, Phys. Lett. B **519**, 71 (2001).
39. T. Muta, *Foundations of Chromodynamics, World Scientific Lecture Notes in Physics 57*, World Scientific, Singapore (1998).
40. M. D'Elia, E. Meggiolaro, M. Mesiti, and F. Negro, Phys. Rev. D **93**, 054017 (2016).