Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 4, с. 216 – 221 © 2016 г. 25 августа

Об аномальной *A*-зависимости зарядовых радиусов тяжелых изотопов кальция

Э. Е. Саперштейн[+*1)], *И. Н. Борзов*[+×], *С. В. Толоконников*[+∘]

[+]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123082 Москва, Россия*

[*]*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

[×]*Объединенный институт ядерных исследований, 123182 Дубна, Россия*

[∘]*Московский физико-технический институт, 123098 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 24 июня 2016 г.
После переработки 4 июля 2016 г.

Зарядовые радиусы изотопической цепочки кальция рассчитываются в рамках самосогласованной теории конечных ферми-систем на основе энергетического функционала плотности Фаянса. Учитывается приближенно флуктуирующий вклад низколежащих колебаний – фононов. В результате удается воспроизвести обнаруженный недавно экспериментально аномальный рост зарядовых радиусов нейтроно-избыточных изотопов кальция.

DOI: 10.7868/S0370274X16160025

В этом году снова возрос интерес к необычной A-зависимости зарядовых радиусов изотопов кальция. Работа [1], в которой представлены результаты первых прецизионных измерений зарядовых радиусов ядер ^{49,51,52}Ca, так и называется: "Неожиданно большие зарядовые радиусы нейтронно-избыточных изотопов кальция" ("Unexpectedly large charge radii of neutron-rich calcium isotopes"). Прежде чем перейти к анализу ее результатов, кратко напомним довольно давнюю историю этой проблемы.

Напомним определение зарядового радиуса, выражающегося через зарядовую плотность $\rho_{\rm ch}(r)$ следующим образом:

$$\langle r^2_{\rm ch}\rangle = \frac{1}{Z}\int r^2\rho_{\rm ch}(r)d^3r, \ \ R_{\rm ch} = \sqrt{\langle r^2_{\rm ch}\rangle}. \qquad (1)$$

Отметим, что при расчете зарядовой плотности учитываются обычным образом [2, 3] зарядовые формфакторы протона и нейтрона, а также релятивистские и спин-орбитальные поправки.

Прецизионные измерения зарядовых плотностей ядер и, тем самым, зарядовых радиусов стало возможно в начале 80-х прошлого века после введения в строй нескольких электронных ускорителей с высоким разрешением пучка, имеющих энергию около 500 МэВ. Измерение с высокой точностью сечения упругого рассеяния в большом диапазоне переданных импульсов позволило безмодельным образом найти зарядовые плотности. Результаты такой обработки представлены в обзоре [4] вместе с систематическими данными по зарядовым радиусам. Однако задолго до этого существовали многочисленные данные по изотопическим разностям зарядовых радиусов:

$$\delta\langle r^2_{\rm ch}\rangle(A,A') = \langle r^2_{\rm ch}\rangle(^{A'}Z) - \langle r^2_{\rm ch}\rangle(^{A}Z). \qquad (2)$$

Они были основаны на измерениях изотопического смещения (ИС) $\delta\nu(A,A')$ сверхтонкой структуры энергий атомных уровней, которое однозначно связано с вариацией зарядового радиуса (2). В среднем, A-зависимость зарядового радиуса ядра, как и других (нейтронного, протонного, массового) радиусов, подчиняется классическому жидко-капельному закону:

$$R = r_0 A^{1/3}. \qquad (3)$$

По мере накопления данных по ИС обнаружились многочисленные отклонения от этой закономерности, самым ярким из которых были случаи отрицательных ИС, что приводило к отрицательным значениям $\delta\langle r^2_{\rm ch}\rangle(A,A+1)$. Этот чисто квантовый эффект был впервые объяснен в [5] на основе теории конечных ферми-систем (ТКФС) [6].

Долгое время все примеры отрицательного ИС ограничивались случаями соседних изотопов, т.е. в (2) имело место $A' = A+1$. В начале 1980-х в описанных выше экспериментах по прецизионному электронному рассеянию были определены зарядовые ра-

1)e-mail: saper@mbslab.kiae.ru

диусы $R_{\rm ch}$ магических изотопов кальция ^{40}Ca и ^{48}Ca. При этом оказалось, что они практически равны: $\left[\langle r^2_{\rm ch}\rangle(^{48}\text{Ca}) - \langle r^2_{\rm ch}\rangle(^{40}\text{Ca})\right] \simeq 0$. Это находилось в разительном противоречии с жидко-капельным законом (3) и сразу получило название "парадокса ^{40}Ca – ^{48}Ca". Этот парадокс был объяснен в [7] на основе самосогласованной ТКФС [8] учетом эффекта взаимодействия частиц с "фононами" (ВЧФ) – низколежащими колебаниями ядра. Вклад ВЧФ в радиус ядра качественно описывается в рамках коллективной модели Бора–Моттельсона (БМ) [9]:

$$\delta\langle r^2\rangle_L = R_0^2 \frac{5}{4\pi}\beta_L^2, \tag{4}$$

где $R_0 = 1.2A^{1/3}$, а β_L – параметр "динамической деформации" L-й мультипольности, который определяется из приведенной вероятности возбуждения L-фонона: $B(EL) = (3Z/4\pi)^2\beta_L^2 R_0^{2L}$. В ядре ^{40}Ca имеется очень коллективный низколежащий уровень 3^-, который, согласно (4), приводит к большому изменению зарядового радиуса этого ядра. В ядре ^{48}Ca это состояние имеет гораздо меньшую коллективность, и его влияние на радиус тоже меньше. Это и объясняет качественно результат квантового самосогласованного расчета [7].

Вклад ВЧФ в распределение плотности $\rho(\mathbf{r})$ в ТКФС определяется через вариацию функции Грина G в поле L-фонона:

$$\delta_L\rho(\mathbf{r}) = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i}\delta_L G(\mathbf{r},\mathbf{r},\varepsilon), \tag{5}$$

$$\delta_L G = G\,\delta_L\Sigma\, G, \tag{6}$$

где $\delta_L\Sigma$ – вариация массового оператора Σ в поле L-фонона, которая определяется диаграммами, изображенными на рис. 1. Изотопические индексы здесь и далее для краткости опущены.

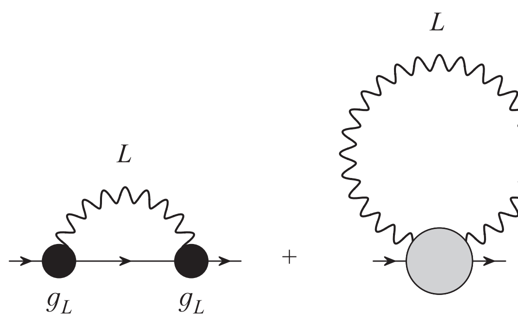

Рис. 1. Вариация массового оператора Σ в поле L-фонона. Здесь g_L – вершина рождения L-фонона, серый круг – "tadpole" (сумма всех неполюсных диаграмм)

Вершина $g_L(r)$ рождения L-фонона для несверхтекучих ядер (в нашем случае ^{48}Ca) в ТКФС [6] подчиняется однородному уравнению, которое в символической записи имеет вид:

$$g_L = \mathcal{F} A g_L. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{F}$ – эффективное взаимодействие Ландау–Мигдала (ЛМ), а A – частично- дырочный пропагатор:

$$A(\omega) = \int G(\varepsilon+\omega/2)G(\varepsilon-\omega/2)d\varepsilon/(2\pi i). \tag{8}$$

В сверхтекучих ядрах (в нашем случае это будут ^{50,52,54}Ca) уравнение (7) превращается в векторное уравнение 3-го ранга [6, 10], в котором 3-вектор $\hat{g}$ имеет нормальную $g^{(0)}$ и две аномальных $g^{(1,2)}$ компоненты. Обобщением величины $\mathcal{F}$ для сверхтекучих ядер будет 3×3 матрица эффективных взаимодействий, содержащая помимо амплитуды ЛМ различные компоненты спаривательного взаимодействия. Наконец, обобщение (8) в этом случае – это также 3×3 матрица интегралов по энергии от различных произведений функции Грина G и двух функций Горькова $F^{(1,2)}$. Из них главную роль играет пропагатор $\mathcal{L}$ – интеграл вида (8) с заменой $GG \to \to GG - F^{(1)}F^{(2)}$.

Нас интересует зарядовая плотность $\rho_{\rm ch}(r)$, которая определяется почти только протонной плотностью $\rho_p(r)$. Для изотопов кальция протонная подсистема не сверхтекуча, так что справедливо $g_p^{(1,2)} \equiv 0$; поэтому ниже мы будем рассматривать только компоненту $g_p^{(0)}$, опуская для краткости верхний индекс. При этом, разумеется, при нахождении собственных частот ω_L уравнения (7) и вероятностей возбуждения $B(EL)$ для ядер ^{50,52,54}Ca нейтронная сверхтекучая подсистема учитывается должным образом, как, например, в [10].

Для всех низколежащих фононов функция $g_L(r)$ имеет выраженный поверхностный максимум и может быть представлена в виде:

$$g_L(r) = \alpha_L \frac{dU}{dr} + \chi_L(r), \tag{9}$$

где $U(r)$ – среднее поле ядра, а объемная компонента $\chi_L(r)$ сравнительно мала. Константа α_L прямо связана с введенным выше БМ параметром β_L: $\alpha_L = \beta_L R_0/\sqrt{2L+1}$. Факт поверхностной доминантности демонстрируется на рис. 2 для состояний 2^+ и 3^- в ядре ^{52}Ca, которое играет ключевую роль в этой работе. Если пренебречь в (9) объемной поправкой χ_L, то точный расчет в рамках самосогласованной

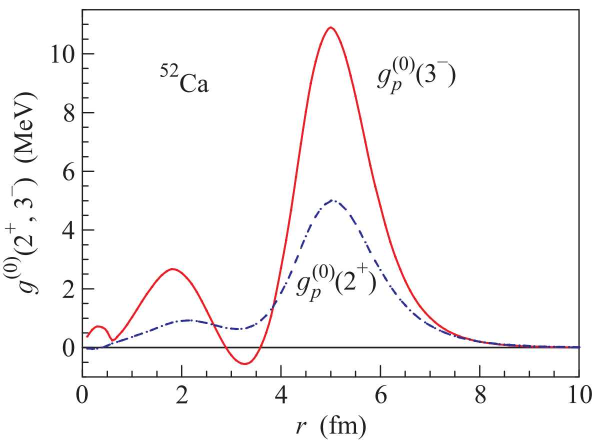

Рис. 2. (Цветной онлайн) Протонные вершины $g_L^{(0)}(r)$ рождения фононов 2^+ и 3^- в ядре ^{52}Ca

ТКФС [7] приводит к результату, очень близкому к простой БМ формуле (4).

Альтернативная возможность объяснить равенство зарядовых радиусов двух магических изотопов кальция была продемонстрирована Фаянсом с соавторами [11] на основе разработанного ими ранее [12, 13] обобщенного метода энергетического функционала плотности (ЭФП), который обобщает классический метод Кона–Шэма [14] на сверхтекучие системы. В этом подходе энергия основного состояния сверхтекучего ядра рассматривается как функционал нормальной ρ и аномальной ν плотностей:

$$E_0 = \int \mathcal{E}[\rho(\mathbf{r}), \nu(\mathbf{r})] d^3 r. \tag{10}$$

Нормальная часть ЭФП $\mathcal{E}_{\rm norm}(\rho)$ содержит центральную, спин-орбитальную и эффективную тензорную компоненты, а также кулоновский член для протонов. ЭФП Фаянса отличается от популярного ЭФП Скирма–Хартри–Фока (СХФ) [15, 16] более сложной плотностной зависимостью. Объемный член нормальной части ЭФП Фаянса схематически может быть записан в виде

$$\mathcal{E}^{\rm v}_{\rm norm}(\rho) = \frac{a\rho^2}{2} \frac{1+\alpha\rho^\sigma}{1+\gamma\rho}, \tag{11}$$

где a, σ и γ – параметры. Соответствующий член ЭФП Скирма получается из (11) при $\gamma = 0$. Другим отличием ЭФП Фаянса от ЭФП Скирма является использование голой массы вместо эффективной, $m^* = m$, тогда как в большинстве ЭФП Скирма содержатся скоростные силы, приводящие к тому, что эффективная масса заметно меньше голой. Обе эти особенности ЭФП Фаянса отражают в скрытой форме эффекты энергетической зависимости самосогласованной ТКФС, с которой этот метод генетически связан. В частности, эффективная масса в самосогласованной ТКФС близка к голой [8] из-за почти точного сокращения эффектов зависимости массового оператора от импульса (благодаря скоростным силам) и от энергии.

Заметно отличен от СХФ аналога и поверхностный член ЭФП Фаянса, который отвечает силам конечного радиуса с юкавской радиальной зависимостью

$$\mathrm{Yu}(r) = \frac{1}{4\pi r_{\rm c}^2 r} \exp\left(-\frac{r}{r_{\rm c}}\right). \tag{12}$$

Поверхностный член $\mathcal{E}^{\rm s}_{\rm norm}$ ЭФП Фаянса получается действием на выражение типа (11) (разумеется, с другими параметрами) оператора

$$D(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \mathrm{Yu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{13}$$

с тем в результате чего генерируется явно “поверхностная” часть $\mathcal{E}^{\rm s}(\rho)$, которая исчезает для бесконечной ядерной материи, где справедливо $\rho(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$.

Аномальная часть ЭФП Фаянса имеет вид [11]:

$$\mathcal{E}_{\rm an}(\mathbf{r}) = \sum_\tau \mathcal{F}^{\xi,\tau\tau}(\mathbf{r};[\rho])|\nu^\tau(\mathbf{r})|^2, \tag{14}$$

где эффективное спаривательное взаимодействие есть:

$$\mathcal{F}^\xi = C_0 f^\xi = C_0\left(f^\xi_{\rm ex} + h^\xi x^{2/3} + f^\xi_\nabla r_0^2 (\nabla x)^2\right). \tag{15}$$

Первые два члена обычны для ТКФС или для метода Скирма–ХФБ [16]. Третий член (15), специфически поверхностный, был введен в [17].

Учет эффектов ВЧФ в рамках метода ЭФП – весьма деликатная проблема, т.к. они в среднем учтены в ЭФП, в основном в поверхностных его членах. Однако вклады низколежащих фононов часто флуктуируют от ядра к ядру, поэтому возникает потребность учесть явно эти флуктуации. В работе [11] авторам удалось так подобрать параметры нормальной части ЭФП DF3, что он правильно описывал одновременно зарядовые радиусы ядер ^{40}Ca и ^{48}Ca, т.е. этот ВЧФ эффект [7] был удачно эффективно включен в ЭФП. К моменту опубликования этой работы были известны из данных по ИС зарядовые радиусы всех изотопов кальция, четных и нечетных, в интервале $A = 40{-}48$ [18]. На рис. 3 построена кривая (2) для квадрата зарядового радиуса, отсчитанного от ядра ^{40}Ca. Здесь и далее приведены результаты расчетов с ЭФП DF3-a [19], который лишь незначительно, спин-орбитальным и тензорным членами, отличается от функционала DF3, использованного в [11]. Эти отличия существенны в основном для тяжелых ядер, тяжелее свинца, которые до [19] методом Фаянса не рассматривались. Его предсказания

Таблица 1. Характеристики низколежащих возбуждений четных изотопов Ca, $A = 48{-}54$, и их вклад в зарядовый радиус

Ядро	L^π	ω_L	$B(EL)$	β_L^p	β_L^n	$\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle_L$, фм^2	$\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle^{\rm ph}$, фм^2
^{48}Ca	2^+	3.58	55.4 e^2 фм^4	0.14	0.09	0.15	
	3^-	4.92	5700 e^2 фм^6	0.12	0.17	0.11	0.26
^{50}Ca	2_1^+	1.19	18.3 e^2 фм^4	0.08	0.05	0.05	
	2_2^+	3.09	25.5 e^2 фм^4	0.10	0.06	0.08	
	3^-	4.81	9580 e^2 фм^6	0.20	0.21	0.31	0.44
^{52}Ca	2^+	3.38	25.7 e^2 фм^4	0.09	0.05	0.06	
	3^-	4.52	1.17E4 e^2 фм^6	0.24	0.22	0.46	0.52
^{54}Ca	2^+	2.02	46.0 e^2 фм^4	0.12	0.07	0.12	
	3^-	3.80	1.28E4 e^2 фм^6	0.26	0.22	0.55	0.67

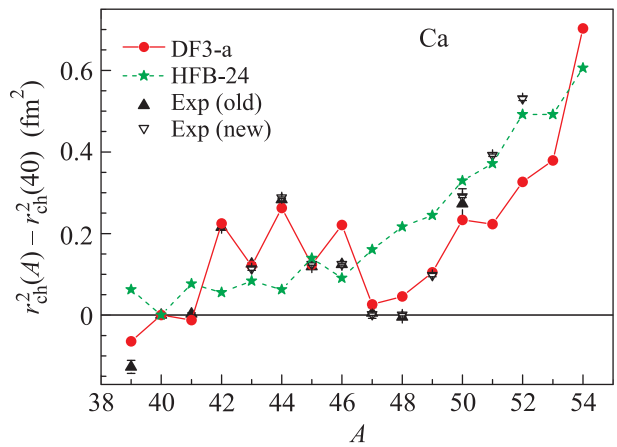

Рис. 3. (Цветной онлайн) Квадрат зарядового радиуса для изотопической цепочки кальция, отсчитанный от ^{40}Ca. Экспериментальные точки (old) взяты из [18], а (new) – из [1]

для радиусов легких ядер очень близки результатам, полученным с ЭФП DF3 (см. [20]). Таким образом, теоретические точки на левой части рис. 3 практически совпадают с таковыми на аналогичном рисунке [11]. Как видно, ЭФП Фаянса прекрасно описывает четно-нечетный эффект (“*staggering*”) между ^{40}Ca и ^{48}Ca, хорошо описывает изотопы ^{49,50}Ca, но заметно недооценивает величину $\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle$, для изотопов ^{51,52}Ca, измеренную в [1]. Отметим, что практически точного воспроизведения четно-нечетной “пилы” на этом рисунке важную роль играет градиентный член эффективного спаривательного взаимодействия (15), появление которого целиком обязано ВЧФ эффектам. Для определенности приведем значения параметров этого взаимодействия, использованные в данном расчете: $f^\xi_{\rm ex} = -1.475$; $h^\xi = 1.0395$; $f^\xi_\nabla = 1.6875$; $r_0 = 1.145$ фм.

Для сравнения приведены предсказания ЭФП Скирма HFB-24 [21], являющегося рекордсменом в точности описания масс ядер. Аналогичное сравнение приведено на рис. 4 для полного зарядового радиуса $R_{\rm ch}$, являющегося более наглядной величиной. Для иллюстрации построена кривая, отвечающая модели жидкой капли, уравнение (3). На обоих рисунках видно, что ЭФП HFB-24, передавая в целом правильно A-зависимость, плохо передает детали. В частности, четно-нечетный эффект между ^{40}Ca и ^{48}Ca имеет неправильный знак.

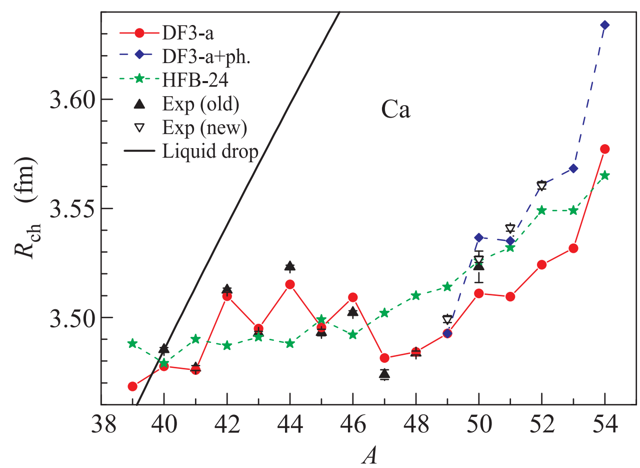

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зарядовые радиусы изотопов кальция. Экспериментальные точки (old) взяты из [22], а (new) – из [1]

Другими словами, ЭФП DF3-a заметно занижает значение разности $\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle(48, 52)$. Это же справедливо для множества эффективных функционалов энергии, предсказания которых аккумулированы в [1], включая HFB-24. Это и послужило причиной названия этой работы, приведенного выше. В ней сделана попытка рассчитать эту величину на основе модного подхода – киральной теории эффективного поля (КТЭП) [23], которая интерпретируется как низко-энергетический предел квантовой хромодинамики. КТЭП применяется для нахождения NN-взаимодействия (включая многочастичные силы), которое затем используется для многотельного расчета в рамках метода кластерного разложения. В КТЭП приходится вводить достаточно много параметров, процедура эта не однозначна, так что существуют различные КТЭП-модели. В [1] рассмотрены три таких модели, одна из которых (SRG2, [24]) практически правильно воспроизводит экспериментальное значение величины $\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle(48,52)$, при этом однако сильно (примерно на 0.05 фм) завышая абсолютные значения зарядовых радиусов этих и других изотопов кальция. Окончательное заключение теоретической части работы [1] состоит в том, что вопрос об описании аномальной эволюции зарядового радиуса тяжелых изотопов кальция открыт.

Мы объясняем эту аномалию эффектом ВЧФ. В табл. 1 представлены характеристики низколежащих фононов 2^+ и 3^- в четных изотопах $^{48-54}$Ca. Вклад каждого фонона для данного ядра рассчитывается по БМ формуле (4). Затем полная величина фононного вклада $\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle_{\rm ph}(A)$ для данного ядра находится суммированием по всем фононам. Эти величины приведены в последнем столбце табл. 1. На рис. 5 построена величина

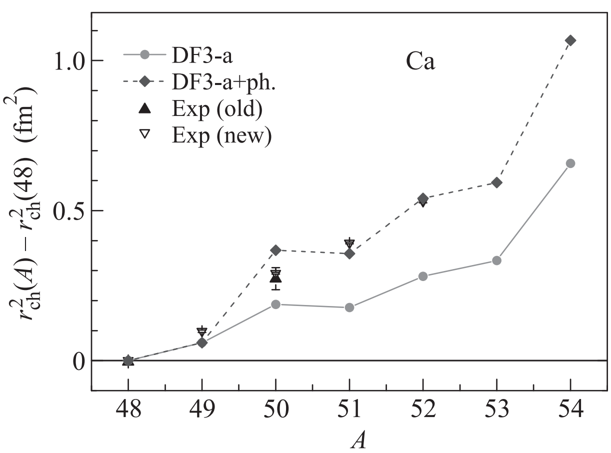

Рис. 5. (Цветной онлайн)) Квадрат зарядового радиуса для изотопической цепочки кальция, отсчитанный от ^{48}Ca

$$\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle(48,A) \equiv \langle r_{\rm ch}^2\rangle(^A{\rm Ca}) - \langle r_{\rm ch}^2\rangle(^{48}{\rm Ca}), \qquad (16)$$

являющаяся основным объектом обсуждения в [1]. Точки "DF3-a+ph" построены с использованием величин $\delta\langle r_{\rm ch}^2\rangle^{\rm ph}$ из табл. 1. Для нечетных изотопов $^{A+1}$Ca, в соответствии в равной степени с ТКФС [6] и с теорией БМ [9], используется фононный вклад в четном остове ^{A}Ca. Как видно, основной вклад в разность (16) вносит состояние 3^-, степень коллективности которого сильно растет при отходе от ^{48}Ca с ростом A.

Как отмечалось выше, параметры ЭФП DF3 [11], как и используемого нами ЭФП DF3-a, эффективно включают фононные вклады. При этом они выбирались так, чтобы правильно воспроизвести зарядовый радиус ядра ^{48}Ca (как и всех изотопов между ^{40}Ca и ^{48}Ca). Поэтому при вычислении зарядового радиуса изотопов тяжелее ^{48}Ca следует учитывать только флуктуирующую часть ВЧФ вклада (16). Найденные, таким образом, значения $R_{\rm ch}$ изображены на рис. 4.

В заключение подчеркнем, что обнаруженный недавно экспериментально аномальный рост зарядовых радиусов нейтроноизбыточных изотопов кальция [1] может быть объяснен в рамках традиционного подхода, основанного на самосогласованной ТКФС. При решении уравнений ТКФС используется самосогласованный базис ЭФП Фаянса DF3-a. Обсуждаемый эффект обусловлен флуктуирующим, т.е. меняющимся от ядра к ядру, вкладом в распределение плотности нуклонов взаимодействия частиц с поверхностными колебаниями – фононами. При этом доминирует вклад поверхностного состояния 3^-, коллективность которого заметно возрастает при отходе от ядра ^{48}Ca с ростом массового числа. Вклад ВЧФ в зарядовый радиус ядра учитывается приближенно на основе коллективной модели БМ [9]. Точное решение уравнений ТКФС для вклада ВЧФ в распределение плотности в наших ближайших планах.

Работа выполнена при поддержке грантов РНФ # 16-12-10155 и 16-12-10161.

Частичная поддержка также осуществлялась грантами РФФИ 14-02-00107-а, 14-22-03040_офи-м, 16-02-00228-а, и 16-29-13015_офи-м и совместным грантом IN2P3-РФФИ, # 110291054.

Расчеты выполнены частично на ВК НИЦ "КИ".

1. R.F. Garcia Ruiz, M.L. Bissell, K. Blaum et al. (Collaboration), Nature Physics **12**, 594 (2016).
2. W. Bertozzi, J. Friar, J. Heisenberg, and J.W. Negele, Phys. Lett. B **41**, 408 (1972).
3. H. Chandra and G. Sauer, Phys. Rev. C **13**, 245 (1976).
4. H. de Vries, C.W. de Jager, and C. de Vries, At. Data Nucl. Data Tables **36**, 495 (1987).
5. Г. Г. Бунатян, М. А. Микулинский, ЯФ **1**, 38 (1965).
6. А. Б. Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, Наука, М. (1965); Wiley, N.Y. (1967).
7. V.A. Khodel, A.P. Platonov, and E.E. Saperstein, J. Phys. G **8**, 967 (1982).
8. V.A. Khodel and E.E. Saperstein, Phys. Rep. **92**, 183 (1982).

9. О. Бор, Б. Моттельсон, *Структура атомного ядра*, Мир, М. (1977), т. 2.
10. S. V. Tolokonnikov, S. Kamerdzhiev, D. Voytenkov, S. Krewald, and E. E. Saperstein, Phys. Rev. C **84**, 064324 (2011).
11. S. A. Fayans, S. V. Tolokonnikov, E. L. Trykov, and D. Zawischa, Nucl. Phys. A **676**, 49 (2000).
12. А. В. Смирнов, С. В. Толоконников, С .А. Фаянс, ЯФ **48**, 1661 (1988) [Sov. J. Nucl. Phys. **48**, 995 (1988)].
13. I. N. Borzov, S. A. Fayans, E. Kromer, and D. Zawischa, Z. Phys. A **355**, 117 (1996).
14. W. Kohn and L. J. Sham, Phys. Rev. A **140**, 1133 (1965).
15. D. Vautherin and D. M. Brink, Phys. Rev. C **5**, 626 (1972).
16. S. Goriely, N. Chamel, and J. M. Pearson, Phys. Rev. Lett. **102**, 152503 (2009).
17. S. A. Fayans, Письма в ЖЭТФ **68**, 161 (1998) [JETP Lett. **68**, 169 (1998)].
18. C. W. P. Palmer, P. E. G. Baird, S. A. Blundell, J. R. Brandenberg, C. J. Foot, D. N. Stacey, and G. K. Woodgate, J. Phys. B **17**, 2197 (1984).
19. С. В. Толоконников, Э. Е. Саперштейн, ЯФ **73**, 1731 (2010) [Phys. Atom. Nucl. **73**, 1684 (2010)].
20. Э. Е. Саперштейн, С. В. Толоконников, ЯФ **74**, 1306 (2011) [Phys. At. Nucl. **74**, 1277 (2011)].
21. S. Goriely, http://www-astro.ulb.ac.be/bruslib/nucdata/.
22. I. Angeli (2008), *Recommended Values of Nuclear Charge Radii*, http://cdfe.sinp.msu.ru/services/radchart/radhelp.html#rad.
23. E. Epelbaum, H.-W. Hammer, and U.-G. Meissner, Rev. Mod. Phys. **81**, 1773 (2009).
24. R. Furnstahl and K. Hebeler, Rep. Prog. Phys. **76**, 126301 (2013).