Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 7, с. 523 – 529 © 2016 г. 10 октября

Инстантонное автодуальное решение в решеточной евклидовой гравитации: отличие от решения Егучи–Хансона в континуальной гравитации

С. Н. Вергелес[1)]

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Московский физико технический институт, Кафедра теоретической физики, 141707 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 16 июня 2016 г.

После переработки 4 августа 2016 г.

Предложено автодуальное решение в решеточной евклидовой теории гравитации. В отличие от известного решения Егучи–Хансона в континуальной евклидовой гравитации, решеточное решение является асимптотически *глобально* евклидовым, т.е. граница пространства при $r \longrightarrow \infty$ есть $S^3 = SU(2)$.

DOI: 10.7868/S0370274X16190103

1. Вскоре после открытия автодуального (инстантонного) решения в 4D евклидовой теории Янга–Миллса [1], было получено автодуальное решение в 4D евклидовой теории [2, 3] (см. также [4–6]). Однако, в отличие от теории Янга–Миллса, в случае гравитационного инстантона Егучи–Хансона граница пространства-времени при $r \longrightarrow \infty$ есть $S^3/\mathbb{Z}_2$, но не S^3. В противном случае была бы неизбежна сингулярность (эффективная дельта-функция в кривизне в центре инстантона при $r = a$). Поэтому в континуальной теории гравитации в случае инстантонного решения пространственно-временная топология радикально отличается от топологии реального пространства-времени. Таким образом, хотя действие автодуального решения Егучи–Хансона равно нулю, физическое значение этого решения остается неясным.

В данной работе предлагается аналог автодуального решения Егучи–Хансона в случае 4D евклидовой решеточной теории гравитации, действие которого также равно нулю. Это решение трансформируется локально на больших расстояниях от центра инстантона в решение Егучи–Хансона. Причина этой трансформации очевидна: рассматриваемая решеточная теория переходит в теорию Эйнштейна в длинноволновом пределе, причем любая информация о решетке теряется. При этом оказывается, что в дискретной гравитации для автодуального решения не существует сингулярности в центре инстантона в том случае, когда вдали от центра при $r \longrightarrow \infty$ граница пространства-времени есть S^3. Поэтому, если реальное пространство-время проявляет зернистость (дискретность) на сверхмалых масштабах, тогда гравитационные инстантоны существуют.

2. Прежде всего необходимо коротко описать автодуальное решение Егучи–Хансона в континуальной евклидовой теории гравитации. Пусть γ^a, $a = 1, 2, 3, 4$ – эрмитовы матрицы Дирака 4×4 в спинорном представлении (σ^α, $\alpha = 1, 2, 3$ – матрицы Паули):

$$\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^\alpha \\ i\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]. \qquad (1)$$

Рассмотрим действие чистой 4D евклидовой гравитации в форме Палатини (независимыми переменными являются тетрада и связность):

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{l_P^2}\int \mathrm{tr}\gamma^5 R \wedge e \wedge e =$$
$$= \frac{1}{l_P^2}\int \left\{ R^\alpha_{(+)} \wedge E^\alpha_{(+)} - R^\alpha_{(-)} \wedge E^\alpha_{(-)} \right\},$$
$$R \equiv 2(\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega) = \frac{i\sigma^\alpha}{2}\begin{pmatrix} R^\alpha_{(+)} & 0 \\ 0 & R^\alpha_{(-)} \end{pmatrix},$$
$$\omega \equiv \frac{1}{2}\sigma^{ab}\omega^{ab}_\mu \mathrm{d}x^\mu = \frac{i\sigma^\alpha}{2}\begin{pmatrix} \omega^\alpha_{(+)\mu} & 0 \\ 0 & \omega^\alpha_{(-)\mu} \end{pmatrix}\mathrm{d}x^\mu,$$
$$\omega^\alpha_{(\pm)} \equiv \left\{ \mp\omega^{\alpha 4}_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\beta\gamma}_\mu \right\}\mathrm{d}x^\mu,$$
$$R^\alpha_{(\pm)} = 2\mathrm{d}\omega^\alpha_{(\pm)} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_{(\pm)} \wedge \omega^\gamma_{(\pm)},$$

[1)] e-mail: vergeles@itp.ac.ru

$$e \equiv \gamma^a e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu,$$
$$E^\alpha_{(\pm)} \equiv \left\{\mp\left(e^\alpha_\lambda e^4_\rho - e^4_\lambda e^\alpha_\rho\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e^\beta_\lambda e^\gamma_\rho\right\} \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\rho. \quad (2)$$

В качестве независимых переменных вместо шести форм ω^{ab} можно взять шесть форм $\omega^\alpha_{(\pm)}$. Следующие уравнения эквивалентны:

$$\omega = \pm\gamma^5\omega \longleftrightarrow \omega^{ab} = \mp\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^{cd} \longleftrightarrow \omega^\alpha_{(\mp)} = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (3) получаем:

$$R = \pm\gamma^5 R \longleftrightarrow R^{ab} = \mp\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{cd} \longleftrightarrow R^\alpha_{(\mp)} = 0. \quad (4)$$

Условие стационарности действия относительно связности

$$\delta\mathfrak{A}/\delta\omega^{ab}_\mu = 0 \longrightarrow \mathrm{d}e^a + \omega^{ab} \wedge e^b = 0 \quad (5)$$

однозначно определяет форму связности как функцию формы e^a. Кроме того, из уравнений (5) следуют алгебраические тождества Бианки для тензора Римана, комбинация которых с уравнениями (4) дает уравнение Эйнштейна в пустоте:

$$R_{ab} \equiv R^c_{acb} = 0. \quad (6)$$

С другой стороны, уравнение Эйнштейна эквивалентно условиям стационарности действия (5) и

$$R_{ab} = 0 \longleftrightarrow \delta\mathfrak{A}/\delta e^a_\mu = 0. \quad (7)$$

Возникает вопрос: почему дополнительное уравнение (3) не противоречит уравнениям (5) и (7)? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим случай с верхним знаком в уравнении (3), когда

$$\omega^\alpha_{(-)\mu} = 0. \quad (8)$$

Комбинация части уравнений (5) $\delta\mathfrak{A}/\delta\omega^\alpha_{(-)\mu} = 0$ и уравнений (8) приводит к следующим 12 уравнениям:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu E^\alpha_{(-)\lambda\rho} = 0. \quad (9)$$

Теперь мы должны решить систему уравнений (7), (8), (9) и

$$\delta\mathfrak{A}/\delta\omega^\alpha_{(+)\mu} = 0. \quad (10)$$

Заметим, что уравнения (5) и (7) не фиксируют переменные ω^{ab}_μ, e^a_μ полностью, а лишь с точностью до калибровочных (ортогональных) преобразований: калибровочная группа оставляет 6 нефиксированных функций.

Уравнения (9) не фиксируют величины $E^\alpha_{(-)\lambda\rho}$ полностью, а лишь с точностью до слагаемых вида $\left(\partial_\lambda\Psi^\alpha_{(-)\rho} - \partial_\rho\Psi^\alpha_{(-)\lambda}\right)$, где $\Psi^\alpha_{(-)\lambda}$ – 3 произвольных векторных поля (всего 12 функций). Но каждое из трех векторных полей $\Psi^\alpha_{(-)\lambda}$ содержит только три независимых функции вследствие инвариантности выражений $\left(\partial_\lambda\Psi^\alpha_{(-)\rho} - \partial_\rho\Psi^\alpha_{(-)\lambda}\right)$ относительно замен $\Psi^\alpha_{(-)\lambda} \longrightarrow \Psi^\alpha_{(-)\lambda} + \partial_\lambda\phi^\alpha_{(-)}$. В результате уравнения (9) фиксируют не более чем $12 - 3 \times 3 = 3$ дополнительные функции. Это означает, что калибровочная подгруппа $\mathrm{Spin}(4)_{(-)}$ нарушается полностью уравнениями (8). Таким образом мы видим, что система уравнений (7)–(10) совместна, хотя она и фиксирует калибровочную подгруппу $\mathrm{Spin}(4)_{(-)}$. Решение Егучи–Хансона является простейшим нетривиальным решением этой системы уравнений. Выпишем это решение [2, 3].

Пусть $x^i = (r, \theta, \varphi, \psi)$, где (θ, φ, ψ) – углы Эйлера. Декартовы координаты x^μ в $\mathbb{R}^4$ связаны с координатами x^i следующим образом:

$$z_1 \equiv x^1 + ix^2 = r\cos\frac{\theta}{2}\exp\left[\frac{i}{2}(\psi+\varphi)\right],$$
$$z_2 \equiv x^3 + ix^4 = r\sin\frac{\theta}{2}\exp\left[\frac{i}{2}(\psi-\varphi)\right]. \quad (11)$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между этими двумя координатными системами если углы Эйлера изменяются в пределах

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \psi \le 4\pi. \quad (12)$$

Решение Егучи–Хансона для метрики $\mathrm{d}s^2 \equiv \left(e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu\right)^2$ имеет вид

$$e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu = \begin{pmatrix} g(r)^{-1}\mathrm{d}r \\ \frac{r}{2}\left(\sin\psi\mathrm{d}\theta - \sin\theta\cos\psi\mathrm{d}\varphi\right) \\ \frac{r}{2}\left(\cos\psi\mathrm{d}\theta + \sin\theta\sin\psi\mathrm{d}\varphi\right) \\ -\frac{r}{2}g(r)\left(\cos\theta\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\psi\right) \end{pmatrix},$$
$$g(r) = \sqrt{1 - \frac{a^4}{r^4}}, \quad r \ge a. \quad (13)$$

При $a = 0$ метрика (13) трансформируется в 4D евклидову метрику, выраженную через радиус и углы Эйлера на S^3, изменяющиеся в диапазонах (12). Но для решения Егучи–Хансона (когда $a \ne 0$ и $r \ge a$) $0 \le \psi \le 2\pi$, т.к. точки с координатами ψ и $(\psi + 2\pi)$ и одними и теми же (r, θ, φ) отождествляются. В противном случае, для того чтобы теорема Черна–Гаусса–Бонне оставалась справедливой также и в случае (12), эффективная дельта-функция должна быть введена в тензор кривизны в центре инстантона при $r = a$ (см. [3]).

1-формы связности задаются равенствами (8) и

$$\omega^1_{(+)} = \left(\frac{4}{rg} - \frac{2g}{r}\right) e^4 = -\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)(\cos\theta \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\psi),$$

$$\omega^2_{(+)} = \frac{2g}{r} e^3 = g(\cos\psi \mathrm{d}\theta + \sin\theta \sin\psi \mathrm{d}\varphi),$$

$$\omega^3_{(+)} = -\frac{2g}{r} e^2 = -g(\sin\psi \mathrm{d}\theta - \sin\theta\cos\psi \mathrm{d}\varphi). \quad (14)$$

Имеем для диапазона $0 \leq \psi \leq 2\pi$ и ориентации r, θ, φ, ψ

$$\int_{r\to\infty} \left(\frac{1}{2}\omega^1_{(+)}\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\omega^2_{(+)}\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\omega^3_{(+)}\right) = -\pi^2, \quad (15)$$

$$\int_{r\longrightarrow a+0} \left(\frac{1}{2}\omega^1_{(+)}\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\omega^2_{(+)}\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\omega^3_{(+)}\right) = 0. \quad (16)$$

Интеграл (15) был бы равен $(-\pi^2)$ для любого $0 < r = \mathrm{const} < \infty$ в случае $a = 0$ (евклидова метрика в углах Эйлера). Таким образом, граничные условия (15), (16) определяют инстантонное решение Егучи–Хансона с той же самой константой интегрирования a, что и в (16). Это означает, что система уравнений (7)–(10) вместе с граничными условиями (15), (16) обладает единственным решением (13) для центрально симметричного анзаца метрики с той же самой константой интегрирования a, что и в соотношении (16).

Выпишем также 2-форму кривизны Римана:

$$R^\alpha_{(-)} = 0,$$

$$R^1_{(+)} = \frac{16a^4}{r^6}\left(-e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\right),$$

$$R^2_{(+)} = \frac{8a^4}{r^6}\left(e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4\right),$$

$$R^3_{(+)} = \frac{8a^4}{r^6}\left(-e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4\right). \quad (17)$$

3. Следующий шаг заключается в кратком описании используемой здесь решеточной модели гравитации. Детальное описание модели можно найти в [7–9].

Ориентируемый 4D симплициальный комплекс и его вершины (0-симплексы) обозначаются $\mathfrak{K}$ и $a_{\mathcal{V}}$, индексы $\mathcal{V} = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N} \to \infty$ и $\mathcal{W}$ нумеруют вершины и 4-симплексы, соответственно. Необходимо использовать локальную нумерацию вершин $a_{\mathcal{V}}$, привязанную к заданному 4-симплексу: все 5 вершин 4-симплекса с индексом $\mathcal{W}$ нумеруются как $a_{\mathcal{W}i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Используемые далее обозначения с дополнительным индексом $\mathcal{W}$ указывают, что соответствующие величины относятся к 4-симплексу с индексом $\mathcal{W}$. Символ Леви–Чивита с попарно различными индексами равен $\varepsilon_{\mathcal{W}ijklm} = \pm 1$ в зависимости от знака ориентации, определяемого порядком расположения вершин $s^4_{\mathcal{W}} = a_{\mathcal{W}i}a_{\mathcal{W}j}a_{\mathcal{W}k}a_{\mathcal{W}l}a_{\mathcal{W}m}$ 4-симплекса $s^4_{\mathcal{W}}$. Каждому 1-симплексу $a_{\mathcal{W}i}a_{\mathcal{W}j}$ приписаны элементы группы Spin(4) и алгебры Клиффорда:

$$\Omega_{\mathcal{W}ij} = \Omega^{-1}_{\mathcal{W}ji} = \exp(\omega_{\mathcal{W}ij}), \quad \omega_{\mathcal{W}ij} \equiv \frac{1}{2}\sigma^{ab}\omega^{ab}_{\mathcal{W}ij},$$

$$\hat{e}_{\mathcal{W}ij} = \hat{e}^\dagger_{\mathcal{W}ij} \equiv e^a_{\mathcal{W}ij}\gamma^a \equiv -\Omega_{\mathcal{W}ij}\hat{e}_{\mathcal{W}ji}\Omega^{-1}_{\mathcal{W}ij}. \quad (18)$$

Решеточный аналог действия (2) имеет вид

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{5\times 24}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{\mathcal{W}ijklm}\mathrm{tr}\gamma^5 \times$$

$$\times \left\{-\frac{1}{2\,l_P^2}\Omega_{\mathcal{W}mi}\Omega_{\mathcal{W}ij}\Omega_{\mathcal{W}jm}\hat{e}_{\mathcal{W}mk}\hat{e}_{\mathcal{W}ml}\right\}. \quad (19)$$

Это действие инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{W}ij} = S_{\mathcal{W}i}\Omega_{\mathcal{W}ij}S^{-1}_{\mathcal{W}j}, \quad \tilde{e}_{\mathcal{W}ij} = S_{\mathcal{W}i}\, e_{\mathcal{W}ij}\, S^{-1}_{\mathcal{W}i},$$

$$S_{\mathcal{W}i} \in \mathrm{Spin}(4). \quad (20)$$

Естественно интерпретировать величину

$$l^2_{\mathcal{W}ij} \equiv \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(\hat{e}_{\mathcal{W}ij})^2 = \sum_{a=1}^{4}(e^a_{\mathcal{W}ij})^2 \quad (21)$$

как квадрат длины ребра $a_{\mathcal{W}i}a_{\mathcal{W}j}$. Таким образом, геометрические свойства симплициального комплекса становятся полностью определенными.

Покажем теперь, что в пределе медленно меняющихся полей, действие (19) переходит в континуальное гравитационное действие (2).

Рассмотрим некоторый 4D подкомплекс комплекса $\mathfrak{K}$ с тривиальной топологией четырехмерного диска. Реализуем этот подкомплекс в $\mathbb{R}^4$. Предполагается, что эта геометрическая реализация является почти гладкой четырехмерной поверхностью. Таким образом, каждая вершина этого подкомплекса приобретает координаты x^μ, являющиеся координатами образа этой вершины в $\mathbb{R}^4$:

$$x^\mu_{\mathcal{W}i} = x^\mu_{\mathcal{V}} \equiv x^\mu(a_{\mathcal{W}i}) \equiv x^\mu(a_{\mathcal{V}}), \qquad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (22)$$

Подчеркнем, что эти координаты определяются лишь вершинами, но не высшими симплексами, которым они принадлежат.

Имеем оценку

$$|\, x^\mu_{\mathcal{W}i} - x^\mu_{\mathcal{W}j}\,| \sim l_P, \quad (23)$$

где параметр l_P имеет порядок решеточного масштаба. Очевидно, что четыре вектора

$$\mathrm{d}x^\mu_{\mathcal{W}ji} \equiv x^\mu_{\mathcal{W}i} - x^\mu_{\mathcal{W}j}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (24)$$

являются линейно независимыми и

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}x^1_{\mathcal{W}m1} & \mathrm{d}x^2_{\mathcal{W}m1} & \ldots & \mathrm{d}x^4_{\mathcal{W}m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{d}x^1_{\mathcal{W}m4} & \mathrm{d}x^2_{\mathcal{W}m4} & \ldots & \mathrm{d}x^4_{\mathcal{W}m4} \end{vmatrix} \gtrless 0, \tag{25}$$

в зависимости от того, является ли репер $\left(X^{\mathcal{W}}_{m\,1}, \ldots, X^{\mathcal{W}}_{m\,4}\right)$ положительно или отрицательно ориентированным. Здесь дифференциалы координат (24) соответствуют 1-симплексам $a_{\mathcal{W}j}a_{\mathcal{W}i}$, так что если вершина $a_{\mathcal{W}j}$ имеет координаты $x^{\mu}_{\mathcal{W}j}$, то вершина $a_{\mathcal{W}i}$ имеет координаты $x^{\mu}_{\mathcal{W}j} + \mathrm{d}x^{\mu}_{\mathcal{W}ji}$.

В континуальном пределе элементы группы голономии (18) близки к единичному элементу, так что величины ω^{ab}_{ij} стремятся к нулю и являются величинами первого порядка относительно $O(\mathrm{d}x^{\mu})$. Таким образом, можно рассмотреть следующую систему уравнений для $\omega_{\mathcal{W}m\mu}$:

$$\omega_{\mathcal{W}m\mu}\,\mathrm{d}x^{\mu}_{\mathcal{W}mi} = \omega_{\mathcal{W}mi}, \quad i = 1, 2, 3, 4\,. \tag{26}$$

В этой системе линейных уравнений индексы $\mathcal{W}$ и m фиксированы, суммирование идет по индексу μ. Так как детерминант (25) ненулевой, то величины $\omega_{\mathcal{W}m\mu}$ определяются однозначно. Предположим, что 1-симплекс $X^{\mathcal{W}}_{m\,i}$ принадлежит 4-симплексам с индексами $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_r$. Введем величину

$$\omega_{\mu}\left(\frac{1}{2}\left(x_{\mathcal{W}m} + x_{\mathcal{W}i}\right)\right) \equiv \frac{1}{r}\left\{\omega_{\mathcal{W}_1 m\mu} + \ldots + \omega_{\mathcal{W}_r m\mu}\right\}, \tag{27}$$

относительно которой предполагается, что она отнесена к середине сегмента $[x^{\mu}_{\mathcal{W}m}, x^{\mu}_{\mathcal{W}i}]$. Напомним, что координаты $x^{\mu}_{\mathcal{W}i}$ так же, как и дифференциалы (24), зависят лишь от вершин, но не от 1-, 2- и т.д. симплексов, которые включают эти вершины. Согласно определению, мы имеем следующую цепочку равенств:

$$\omega_{\mathcal{W}_1\,mi} = \omega_{\mathcal{W}_2\,mi} = \ldots = \omega_{\mathcal{W}_r\,mi}. \tag{28}$$

Из (24) и (26)–(28) следует, что

$$\omega_{\mu}\left(x_{\mathcal{W}m} + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x_{\mathcal{W}mi}\right)\mathrm{d}x^{\mu}_{\mathcal{W}mi} = \omega_{\mathcal{W}mi}. \tag{29}$$

Значение поля ω_{μ} в (29) на каждом одномерном симплексе однозначно определяется лишь этим симплексом.

Далее, предполагается, что поле ω_{μ} гладко зависит от точек геометрической реализации каждого 4-симплекса. Предполагается также, что для разных геометрических реализаций имеют место известные правила пересчета поля ω_{μ}. В этом случае следующая формула имеет место с точностью до $O\big((\mathrm{d}x)^2\big)$ включительно:

$$\Omega_{\mathcal{W}mi}\,\Omega_{\mathcal{W}ij}\,\Omega_{\mathcal{W}jm} = \exp\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{R}_{\mu\nu}(x_{\mathcal{W}m})\mathrm{d}x^{\mu}_{\mathcal{W}mi}\,\mathrm{d}x^{\nu}_{\mathcal{W}mj}\right], \tag{30}$$

где

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \partial_{\nu}\omega_{\mu} + [\omega_{\mu}, \omega_{\nu}]. \tag{31}$$

При выводе формулы (30) была использована формула Хаусдорфа.

В точной аналогии с (26), без комментариев, пишется следующее равенство для поля тетрады:

$$\hat{e}_{\mathcal{W}m\mu}\,\mathrm{d}x^{\mu}_{\mathcal{W}mi} = \hat{e}_{\mathcal{W}mi}. \tag{32}$$

Применяя формулы (30)–(32) к дискретному действию (19) и заменяя суммирование на интегрирование, мы находим, что в длинноволновом пределе решеточное действие (19) трансформируется в континуальное действие *transforms* (2), при этом в предельном случае любая информация о решетке полностью теряется.

4. Теперь рассмотрим автодуальное решение в решеточной модели гравитации. Имеем решеточные аналоги уравнений (5) и (7):

$$\delta\mathfrak{A}/\delta\omega^{\alpha}_{(\pm)\mathcal{W}mi} = 0, \tag{33}$$

$$\delta\mathfrak{A}/\delta e^{a}_{\mathcal{W}mi} = 0. \tag{34}$$

Вследствие того что действие (19) является однородной квадратичной функцией переменных $\{e\}$, согласно теореме Эйлера

$$2\mathfrak{A} = \sum_{\{e\}} e^{a}_{\mathcal{W}mi}\,(\delta\mathfrak{A}/\delta e^{a}_{\mathcal{W}mi}) = 0 \tag{35}$$

на массовой поверхности. Наложим дополнительные условия (ср. с уравнениями (8))

$$\omega^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}mi} = 0. \tag{36}$$

Из уравнений (33) с индексом $(-)$ и (36) следуют уравнения

$$\begin{gathered} \sum_{\mathcal{W}'}\sum_{j,k,l}\varepsilon_{\mathcal{W}'mijkl}\Big\{E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'[jkl]} + \\ +\frac{1}{6}\Big[\big(E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'m[kl]} + E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'m[lj]} + E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'m[jk]}\big) + \\ +\big(m \leftrightarrow i\big)\Big]\Big\} = 0, \\ E^{\alpha}_{*[mkl]} \equiv \frac{1}{3}\Big(E^{\alpha}_{*m[kl]} + E^{\alpha}_{*k[lm]} + E^{\alpha}_{*l[mk]}\Big), \\ E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}m[kl]} \equiv \big(e^{\alpha}_{\mathcal{W}mk}e^{4}_{\mathcal{W}ml} - e^{4}_{\mathcal{W}mk}e^{\alpha}_{\mathcal{W}ml}\big) + \\ +\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e^{\beta}_{\mathcal{W}mk}e^{\gamma}_{\mathcal{W}ml}. \end{gathered} \tag{37}$$

Индекс $\mathcal{W}'$ в (37) перечисляет все 4-симплексы, содержащие отмеченный 1-симплекс $a_{\mathcal{W}m}a_{\mathcal{W}i}$. Как и в континуальном случае, система уравнений (33), (34) и (36) эквивалентна системе уравнений (33) с индексом (+), (34), (36) и (37). Будет показано, что сумма квадратных скобок в (37) обращается в ноль тождественно. Поэтому лишь первый член в фигурных скобках в уравнении (37) является существенным.

Уравнения (37) не фиксируют величину $E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'[jkl]}$ полностью, а лишь с точностью до слагаемых вида

$$E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'[jkl]} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'[jkl]} + \left(\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}jk} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}kl} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}lj}\right), \tag{38}$$

и решеточная 1-форма $\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}mk} = -\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}km}$ может быть изменена согласно

$$\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}mk} \longrightarrow \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}mk} + \left(\phi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}k} - \phi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}m}\right). \tag{39}$$

Отсюда следует, что уравнения (37) фиксируют не более трех вещественных параметров в каждой вершине комплекса, приводя к фиксации калибровочной подгруппы $\mathrm{Spin}(4)_{(-)}$.

Докажем сделанные утверждения. Для этого необходимо доказать, что уравнение

$$\sum_{\mathcal{W}'}\left\{\sum_{j,k,l}\varepsilon_{\mathcal{W}'mijkl}\big(\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'jk} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'kl} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'lj}\big)\right\} =$$
$$= 0 \tag{40}$$

удовлетворяется тождественно. Очевидно, что фигурная скобка в (40) обращается в нуль тождественно при каждом фиксированном значении индекса $\mathcal{W}'$, если $\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'mk} = \left(\phi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'k} - \phi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'m}\right)$.

Рассмотрим два смежных положительно ориентированных 4-симплекса

$$\begin{gathered} s^4_{\mathcal{W}} = a_{\mathcal{W}m}a_{\mathcal{W}i}a_{\mathcal{W}j}a_{\mathcal{W}k}a_{\mathcal{W}l}, \\ s^4_{\mathcal{W}'} = a_{\mathcal{W}'m}a_{\mathcal{W}'i}a_{\mathcal{W}'k}a_{\mathcal{W}'j}a_{\mathcal{W}'l'}, \\ a_{\mathcal{W}m} = a_{\mathcal{W}'m}, \quad a_{\mathcal{W}i} = a_{\mathcal{W}'i}, \quad a_{\mathcal{W}j} = a_{\mathcal{W}'j}, \\ a_{\mathcal{W}k} = a_{\mathcal{W}'k}, \quad a_{\mathcal{W}l} \neq a_{\mathcal{W}'l'}, \end{gathered} \tag{41}$$

так что

$$\varepsilon_{\mathcal{W}mijkl} = \varepsilon_{\mathcal{W}'mikjl'} = 1. \tag{42}$$

Выделим из суммы (40) два слагаемых, соответствующих 4-симплексам (41):

$$\sum_{j,k,l}\varepsilon_{\mathcal{W}mijkl}\big(\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}jk} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}kl} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}lj}\big) +$$
$$+ \sum_{j,k,l'}\varepsilon_{\mathcal{W}'mikjl'}\big(\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'kj} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'jl'} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'l'k}\big). \tag{43}$$

Мы видим, что вследствие уравнений (42) и $\left(\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}jk} + \Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'kj}\right) = 0$ величины $\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}mk}$, принадлежащие общим 3-симплексам смежных 4-симплексов, сокращаются в (43). Заметим, что каждая из величин $\Psi^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}'jk}$ в фигурных скобках в (40) принадлежит некоему 3-симплексу, общему для *двух* смежных 4-симплексов. Если бы это было не так, то комплекс $\mathfrak{K}$ обладал бы пустотами и границами, но такие комплексы здесь не рассматриваются. Следовательно, сумма (40) обращается в нуль тождественно [2]. Это означает, что система уравнений (33) с индексом (+), (34), (36) и (37) является самосогласованной и она частично фиксирует калибровочную группу. Здесь имеется полная аналогия с континуальным случаем. Согласно уравнениям (34) и (35), действие любого решения этой системы уравнений равно нулю.

Теперь приступим к изучению решеточного аналога решения Егучи–Хансона. Однако, в отличие от континуального случая, на нерегулярной решетке невозможно предъявить явное решение. Задача должна ограничиться доказательством существования решения, описанием граничных условий, асимптотики и других существенных свойств решения. Эта задача выполнена здесь лишь частично.

Далее предполагается, что углы Эйлера изменяются в диапазоне (12).

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{K}$ обозначает конечный подкомплекс комплекса $\mathfrak{K}$[3], содержащий центр инстантона и имеющий границу $\partial\mathfrak{k} = \mathfrak{S} \approx$ $\approx S^3$; $\mathfrak{S}_\infty$ обозначает границу подкомплекса, содержащего центр и стремящееся к бесконечности число 4-симплексов, так что в широкой окрестности гиперповерхности $\mathfrak{S}_\infty$ справедлив длинноволновый предел, и непрерывное решение Егучи–Хансона (13), (14) хорошо аппроксимирует точное решеточное решение. Удобно считать, что гиперповерхность $\mathfrak{S}_\infty$ задается уравнением $r = \mathrm{Const} \longrightarrow \infty$. Имеются точ-

[2] Таким образом доказано и утверждение, что квадратная скобка под знаком суммы в (37) дает тождественное уравнение.

[3] Это значит, что $\mathfrak{k}$ состоит из конечного числа 4-симплексов

ные решеточные эквиваленты инстантонных граничных условий (15) и (16):

$$\frac{1}{8\cdot 6^2}\sum_{\mathcal{S}(\mathfrak{S}_\infty)}\sum_{ijkm}\varepsilon_{\mathcal{S}ijkm}\mathrm{tr}\Omega_{\mathcal{S}mi}\Omega_{\mathcal{S}mj}\Omega_{\mathcal{S}mk}=-2\pi^2, \tag{44}$$

$$\sum_{\mathcal{S}(\mathfrak{S})}\sum_{ijkm}\varepsilon_{\mathcal{S}ijkm}\mathrm{tr}\Omega_{\mathcal{S}mi}\Omega_{\mathcal{S}mj}\Omega_{\mathcal{S}mk}=0. \tag{45}$$

Здесь индексы $\mathcal{S}(\mathfrak{S}_\infty)$ и $\mathcal{S}(\mathfrak{S})$ нумеруют 3-симплексы на границах $\mathfrak{S}_\infty$ и $\mathfrak{S}$, соответственно, и символ Леви–Чивита равен $\varepsilon_{\mathcal{S}ijkm}=\pm 1$ в зависимости от того, определяет ли порядок вершин $s^3_{\mathcal{S}}=a_{\mathcal{S}i}a_{\mathcal{S}j}a_{\mathcal{S}k}a_{\mathcal{S}m}$ положительную или отрицательную ориентацию этого 3-симплекса.

Так как при $r\longrightarrow\infty$ справедлив длинноволновый предел, можно использовать решение (13), (14) для динамических переменных. Поэтому сумма в (44) трансформируется в интеграл (15) с той лишь разницей, что теперь угол ψ изменяется в интервале (12), так что граничное условие (44) выполняется.

Чтобы реализовать граничное условие (45), мы предлагаем следующее решение на подкомплексе $\mathfrak{k}$.

Очевидно, 1-форма $\hat{e}_{\mathcal{W}ij}$ может рассматриваться как 1-коцепь на комплексе, и величина

$$\begin{aligned}E^{ab}_{\mathcal{W}m[kl]}&=(E^{\alpha}_{(+)\mathcal{W}m[kl]},\ (E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}m[kl]})=\\&=\varepsilon_{abcd}e^c_{\mathcal{W}mk}e^d_{\mathcal{W}ml},\end{aligned} \tag{46}$$

есть 2-коцепь, являющаяся суперпозицией внешних произведений 1-коцепей $e^a_{\mathcal{W}ij}$. Рассмотрим следующее решение уравнений (33), (34) и (36) на $\mathfrak{k}$:

$$\Omega_{(+)\mathcal{W}ij}=-1,\quad \Omega_{(-)\mathcal{W}ij}=1,\quad s^4_{\mathcal{W}}\in\mathfrak{k}. \tag{47}$$

Отсюда имеем:

$$\Omega_{(+)\mathcal{W}mi}\Omega_{(+)\mathcal{W}ij}\Omega_{(+)\mathcal{W}jm}=-1. \tag{48}$$

Равенства (48) выдерживают калибровочные преобразования (см. (20)) с $S_{(+)\mathcal{W}i}=\pm 1$, $S_{(-)\mathcal{W}i}=1$. Граничное условие (45) выполняется для любой конфигурации элементов голономии, полученных таким образом.

Можно проверить (ср. с (37)), что в случае (48) левая часть уравнения (33) есть не что иное, как внешняя решеточная производная 2-коцепи

$$E^{ab}_{\mathcal{W}[jkl]}\equiv\frac{1}{3}\left(E^{ab}_{\mathcal{W}j[kl]}+E^{ab}_{\mathcal{W}k[lj]}+E^{ab}_{\mathcal{W}l[jk]}\right), \tag{49}$$

и уравнение (33) устанавливает, что эта производная равна нулю, т.е. величина (49) является коциклом[4]:

$$\sum_{\mathcal{W}'}\sum_{j,k,l}\varepsilon_{\mathcal{W}'mijkl}E^{ab}_{\mathcal{W}'[jkl]}=0. \tag{50}$$

Так как вторая группа когомологий $H^2(\mathfrak{k})=0$, то этот коцикл является кограницей:

$$\begin{aligned}E^{ab}_{\mathcal{W}[mkl]}&=\left(\Psi^{ab}_{\mathcal{W}mk}+\Psi^{ab}_{\mathcal{W}kl}+\Psi^{ab}_{\mathcal{W}lm}\right),\\ \Psi^{ab}_{\mathcal{W}mk}&=-\Psi^{ab}_{\mathcal{W}km}.\end{aligned} \tag{51}$$

Уравнения (50) фиксируют не более чем 6 вещественных чисел в каждой вершине подкомплекса $\mathfrak{k}$ по той причине, что 1-форма $\Psi^{ab}_{\mathcal{W}mk}$ определена с точностью до решеточного градиента $(\phi^{ab}_{\mathcal{W}k}-\phi^{ab}_{\mathcal{W}m})$. Поэтому из уравнений (47) следует, в точной аналогии со случаем (36), что теперь нарушается не только подгруппа $\mathrm{Spin}(4)_{(-)}$, но вся калибровочная группа Spin(4) (см. уравнения (38)–(43)).

Действие (19) тождественно равняется нулю на конфигурации (48) для любых значений величин $e^a_{\mathcal{W}ij}$. Поэтому уравнения (34) удовлетворяются автоматически в этом случае, они не дают никаких ограничений на формы $e^a_{\mathcal{W}mk}$ в дополнение к уравнениям (51). Из вышесказанного следует, что система уравнений (33) с индексом (+), (34), (36) и (37) на $\mathfrak{K}$, дополненная уравнениями (48) и (50) на $\mathfrak{k}$, является самосогласованной, она дает нетривиальное решение, причем некоторые динамические переменные e^a остаются неопределенными на $\mathfrak{k}$. Такое решение существует лишь в решеточной теории гравитации.

Рассмотрим частный случай, когда подкомплекс $\mathfrak{k}$ содержит лишь 6 вершин $a_0, a_1, \ldots, a_5$ и 5 4-симплексов $a_0a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_5$, $i=1,\ldots,5$, шляпка вверху означает, что соответствующая вершина опущена. Таким образом, все пять 4-симплексов имеют общую вершину a_0, которая может рассматриваться как центр инстантона. Граница $\mathfrak{S}=\partial\mathfrak{k}$ состоит из пяти 3-симплексов $a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_5$, $i=1,\ldots,5$. Согласно вышесказанному, переменные e^a_{0i}, $i=1,\ldots,5$ остаются неопределенными, так что их можно положить $e^a_{0i}=0$.

Очевидно, эйлерова характеристика предложенного инстантонного решения

$$\chi(\mathfrak{K})=1.$$

Таким образом, постановка задачи для нахождения автодуального решения в решеточной евклидовой теории гравитации такова: необходимо решить (в антидуальном случае) разностную решеточную систему уравнений (33) с индексом (+), (34), (36) и (37) с граничными условиями (44), (45).

[4]Это утверждение было доказано для величины $E^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}[mkl]}$ (см. (37)). Соответствующее доказательство для величины $E^{\alpha}_{(+)\mathcal{W}[mkl]}$ идентично.

Следующие проблемы остаются нерешенными:

1) является ли рассмотренное решение с $\chi(\mathfrak{K}) = 1$ стабильным или оно может быть непрерывно стянуто к тривиальному?

2) для какого значения $\chi(\mathfrak{K})$ решеточное автодуальное решение окажется стабильным?

Автор выражает благодарность А. Мальцеву за многочисленные обсуждения. Работа поддержана РНФ грант # 16-12-10151.

1. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwarz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
2. T. Eguchi and A. J. Hanson, Phys. Lett. B **74**, 249 (1978).
3. T. Eguchi and A. J. Hanson, Annals of Physics **120**, 82 (1979).
4. G. W. Gibbons and C. N. Pope, Commun. Math. Phys. **66**, 267 (1979).
5. A. J. Hanson and T. Regge, *Proceedings of the Integrative Conference on Group Theory and Mathematical Physics, University of Texas at Austin* (1978).
6. R. d'Auria and T. Regge, Nuclear Physics B **195**, 308 (1982).
7. S. N. Vergeles, Nuclear Physics B **735**, 172 (2006).
8. S. N. Vergeles, JETP **106**, 46 (2008).
9. S. N. Vergeles, Phys. Rev. D **92**, 025053 (2015).