Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 9, с. 637 – 639 © 2016 г. 10 ноября

Продольные моды шепчущей галереи в металлических микрорезонаторах

К. Ю. Голеницкий[1], *А. М. Монахов, Н. И. Саблина, Н. С. Аверкиев*

Физико-технический институт им. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 25 августа 2016 г.

В работе исследуются продольные волны в микрорезонаторах, которые возникают из-за наличия пространственной дисперсии. Показано, что в таких резонаторах существуют продольные моды, которые схожи с модами шепчущей галереи. Такие продольные моды должны присутствовать в металлических микрорезонаторах при частоте, близкой к плазменной частоте.

DOI: 10.7868/S0370274X16210050

1. Введение. Эффекты, связанные с пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости кристалла вблизи особенностей (край фундаментального поглощения, экситоны и др.), исследовались во многих работах [1–4]. Малость пространственной дисперсии позволяет пренебрегать ею в большинстве случаев, но при частотах, близких к частоте перехода, характерной для соответствующей особенности, пространственная дисперсия может приводить к существенным качественным эффектам. В этих случаях необходимо учитывать возможность распространения дополнительных волн и связанную с ними необходимость накладывать "дополнительные граничные условия" (ДГУ) [1, 5–7].

Дополнительные волны могут быть как поперечными, так и продольными. Условием возникновения продольных мод в изотропных средах является обращение в ноль диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = 0$. Без учета пространственной дисперсии групповая скорость таких волн равна нулю при любых волновых векторах. Учет пространственной дисперсии приводит к отличной от нуля групповой скорости продольных волн [8, 9]. В диэлектриках также возможно распространение продольных волн, связанных с пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости вблизи особенностей [1].

Теория дополнительных волн в кристаллах в приближении слабой пространственной дисперсии была развита в работах [10–13]. Вопрос о конкретном виде ДГУ значительно сложнее и исследовался во многих работах, но до конца не решен. Часто на практике используются общие утверждения о линейной связи $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ и их производных на границе.

В данной работе исследован спектр дополнительных продольных волн в микрорезонаторах, появление которых связано с наличием пространственной дисперсии. На примере сферического резонатора показано, что вблизи плазменной частоты в металлических резонаторах существуют продольные моды, схожие с обычными оптическими модами шепчущей галереи (МШГ) [14–16].

2. Продольные волны в резонаторе. В однородной изотропной среде с пространственной дисперсией связь векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ можно записать как [1]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\omega)\mathbf{E} - \alpha_\perp(\omega)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \alpha_\parallel(\omega)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}. \quad (1)$$

Такая связь в первом приближении верна для широкого круга материалов и для получения качественных результатов ее вполне достаточно.

Рассмотрим задачу о собственных модах микрорезонатора, изготовленного из материала со связью (1), окруженного бездисперсионной средой (для простоты – в вакууме). Напряженность поля можно записать как $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$, где

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}^{(1)} = 0,$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}^{(2)} = 0.$$

Из уравнений Максвелла получаем

$$\partial_j\partial_j E_i^{(2)} = -\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_0(\omega)E_i^{(1)} + \varepsilon_0(\omega)E_i^{(2)} + \right.$$
$$\left. + \alpha_\parallel(\omega)\partial_j\partial_j E_i^{(1)} + \alpha_\perp(\omega)\partial_j\partial_j E_i^{(2)}\right).$$

Разделяя уравнения для $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$, получим

$$\Delta\mathbf{E}^{(2)} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_0(\omega)\mathbf{E}^{(2)} + \alpha_\perp(\omega)\Delta\mathbf{E}^{(2)}\right) \quad (2)$$

[1])e-mail: kirillgol@yandex.ru

и
$$\varepsilon_0(\omega)E_i^{(1)} + \alpha_\parallel(\omega)\partial_i\partial_j E_j^{(1)} = 0. \tag{3}$$
Уравнение (2) описывает стандартные “поперечные” моды резонатора [16]. Учет пространственной дисперсии для таких мод приводит к малому сдвигу собственной частоты
$$(\omega_n^0)^2 = \frac{\omega_n^2}{1+\alpha_\perp(\omega_n)\omega_n^2/c^2}.$$
Здесь ω_n^0 — собственная частота резонатора без учета пространственной дисперсии.

Для дальнейших вычислений поля $\mathbf{E}^{(1)}$ удобно ввести потенциал
$$E_i^{(1)} = -\partial_i\varphi.$$
Тогда уравнение (3) перепишется как
$$\nabla\left(\varepsilon_0(\omega)\varphi + \alpha_\parallel(\omega)\Delta\varphi\right) = 0,$$
откуда выбором константы получим окончательно [17]
$$\varepsilon_0(\omega)\varphi + \alpha_\parallel(\omega)\Delta\varphi = 0.$$
В рассматриваемой задаче естественно считать, что “продольные” волны $\mathbf{E}^{(1)}$ отсутствуют в окружающей резонатор бездисперсионной среде, что приводит к граничному условию $\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0$ ($\partial\Omega$ – граница резонатора). Таким образом, задача описания продольных волн в изотропной среде с пространственной дисперсией сводится к решению задачи
$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \tag{4}$$
$$\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$
$$\lambda = \frac{\varepsilon_0(\omega)}{\alpha_\parallel(\omega)}. \tag{6}$$
В качестве примера рассмотрим шаровой резонатор. Для такого резонатора решение уравнения (4) в случае $\lambda > 0$ известно
$$\varphi_{\lambda\ell m} = e^{im\phi}Y_\ell^m(\cos(\theta))j_\ell(\sqrt{\lambda}r), \tag{7}$$
здесь ϕ, θ и r – сферические координаты, Y_ℓ^m – сферическая функция, а j_ℓ – сферическая функция Бесселя. В случае $\lambda < 0$ решение, удовлетворяющее граничному условию, отсутствует. Собственные частоты решений (7) определяются условием
$$\sqrt{\lambda(\omega)}R = \gamma_{\ell n}, \tag{8}$$
где $\gamma_{\ell n}$ – n-й корень сферической функции Бесселя j_ℓ, R – радиус шара.

При наложении граничного условия (5) максвелловские граничные условия автоматически выполняются для полей $\mathbf{D} = \mathbf{E} = 0$ вне сферы. Действительно, из непрерывности нормальных компонент $D_n^{(1)} = D_n^{\mathrm{out}}$ (индекс out маркирует поля вне резонатора) следует $D_n^{\mathrm{out}} = 0$, и, поскольку $D_n^{\mathrm{out}} = \varepsilon E_n^{\mathrm{out}}$, то и $E_n^{\mathrm{out}} = 0$.

Тангенциальные составляющие $E_t^{(1)}$ на поверхности сферы равны нулю, поскольку из (5) следует, что $j_\ell(\sqrt{\lambda}R) = 0$, а значит $\nabla_\theta\varphi = \nabla_\phi\varphi = 0$, откуда $E_t = 0$ на поверхности и вне сферы.

Интересно рассмотреть, как соотносится условие $\varphi = 0$ с известными “дополнительными граничными условиями” (ДГУ) из [1, 5]. Продольную волну можно рассматривать как дополнительную волну в среде, и написать ДГУ $D_i + \Gamma_{ik}E_k = 0$, которое, в силу уравнения $\mathbf{D} = 0$ сведется к $\Gamma_{ik}E_k = 0$. В сферических координатах r, θ, ϕ условию $\varphi\big|_{r=R} = 0$ соответствуют условия $\Gamma_{ir} = \Gamma_{ri} = 0$ ($i = r, \theta, \phi$) и
$$\det\Gamma_{st} \neq 0, \tag{9}$$
где s и $t = \theta, \phi$. Условие (9) эквивалентно условиям $\nabla_\theta\varphi\big|_{r=R} = \nabla_\phi\varphi\big|_{r=R} = 0$, т.е. тому, что $r = R$ является эквипотенциальной поверхностью (5).

Отсутствие поля снаружи резонатора не означает принципиальную невозможность наблюдения таких волн. Для возбуждения таких волн возможно использовать внешний электронный пучок [17]. Также возможно возбуждение внешним электромагнитным излучением путем сопряжения резонатора с призмой подобно геометрии, в которой возбуждаются поверхностные плазмон-поляритоны [18]. Другая возможность – помещение излучателя в резонатор. В этих случаях такие волны будут проявляться в виде особенностей коэффициентов рассеяния, отражения, прохождения.

Для существования таких продольных волн в микрорезонаторе необходимо, чтобы в неограниченной среде из такого материала существовал плазмон. При анализе спектра этих волн крайне важно учитывать затухание, которое определяет ширину линии в спектре. Поэтому при рассмотрении конкретной геометрии и размера резонатора необходимо, чтобы ширина линии была намного меньше межмодового расстояния. Хорошими кандидатами, которые удовлетворяют этим требованиям, являются нормальные металлы, в которых при волновых векторах $k < \omega_p/v_f$ и $T = 0$ затухания нет. Здесь введены обозначения: ω_p – плазменная частота, v_f – скорость Ферми.

Оценим характерные параметры для конкретных веществ. Диэлектрическая проницаемость для продольных волн в металлах вблизи плазменной частоты ω_p имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2 + \beta k^2}{\omega^2}, \tag{10}$$

где $\beta = 3v_f^2/5$ [19]. Соответственно, $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega, k) = 0$ при $k < \omega/v_f$. Сравнивая выражения (1) и преобразование Фурье от (10), приходим к выводу, что в нормальных металлах $\alpha_{\|}(\omega) = \beta/\omega^2$, $\varepsilon_0 = 1$ и $\lambda(\omega) > 0$, соответственно. Решив уравнение (8) относительно ω с известным видом $\lambda(\omega)$, получим спектр

$$\omega_{\ell n} = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{3v_f^2\gamma_{\ell n}^2}{5R^2}}. \tag{11}$$

В качестве иллюстративного примера рассмотрим шарик из золота радиусом $R = 500$ нм. Для золота $\omega_p = 8.9$ эВ и $v_f = 1.4 \cdot 10^8$ см/с. Рассмотрим первый корень $n = 0$ сферической функции Бесселя j_ℓ. Тогда $\gamma_{\ell 0} \sim \ell$ при больших номерах ℓ. Ограничение на ℓ сверху следует из ограничения на $k < \omega_p/v_f$. Тогда для рассматриваемого шарика при $\ell < 770$ затухание у продольных мод отсутствует. Диапазон частот, в котором существуют эти моды, составляет $\omega_p < \omega < \sqrt{8/5}\,\omega_p$. Межмодовое расстояние для больших номеров ℓ в случае шарика из золота ~ 5 мэВ.

Таким образом, решения (7) действительно являются полным аналогом мод шепчущей галереи в шаре. Аналогичные решения будут существовать в цилиндре и других замкнутых металлических резонаторах, для которых известны моды шепчущей галереи (МШГ) в бездисперсионных средах [14–16].

Характерной особенностью таких мод будет отсутствие продольной волны снаружи резонатора, что приведет к увеличению добротности резонатора на таких модах, даже по сравнению с оптическими МШГ-резонаторами. В последних всегда имеется “хвост” излучения, выходящий наружу, и любые неоднородности приводят к появлению уходящей из резонатора волны.

3. Заключение. Исследование продольных волн в микрорезонаторах, появление которых связано с наличием пространственной дисперсии, показало наличие в таких резонаторах продольных мод, аналогичных обыкновенным модам шепчущей галереи. Эти моды должны существовать в металлических микрорезонаторах на частотах, близких к плазменной частоте.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ # 14-02-00624.

---

1. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, М. (1965), 376 с.
2. P. Y. Yu and M. Cardona, S. Stat. Comm. **16**, 1421 (1971).
3. A. A. Maradudin and D. Mills, Phys. Rev. B **7**(6), 2787 (1973).
4. M. A. Gorlach, S. B. Glybovski, A. A. Hurshkainen, and P. A. Belov, Phys. Rev. B **93**(20), 201115 (2016).
5. E. F. Venger and V. N. Piskovoi, Phys. Rev. B **70**(11), 115107 (2004).
6. A. Stahl, Phys. St. Sol. (b), **92**(1), 113 (1979).
7. S. I. Pekar, JETP **74**, 762 (1978).
8. A. A. Toropov and T. V. Shubina, *Plasmonic Effects in Metal-Semiconductor Nanostructures*, Oxford (2015), 369 p.
9. F. Forstmann and R. R. Gerhardts, Adv. Sol. St. Phys. **22**, 291 (1982).
10. S. I. Pekar, J. Phys. Chem. Sol. **5**(1), 11 (1958).
11. S. I. Pekar, Phys. Status Solidi (b) **82**, 83 (1977).
12. M. I. Strashnikova, Ukr. J. Phys. **52**(8), 754 (2007).
13. R. J. Pollard, A. Murphy, W. R. Hendren, P. R. Evans, R. Atkinson, G. A. Wurtz, and V. A. Podolskiy, Phys. Rev. Lett. **102**(12), 127405 (2009).
14. A. B. Matsko and V. S. Ilchenko, IEEE JSTQE **12**(1), 34 (2006).
15. N. S. Averkiev, V. V. Sherstnev, A. M. Monakhov, E. A. Grebenshikova, A. Yu. Kislyakova, Yu. P. Yakovlev, A. Krier, and D. A. Wright, Low Temp. Phys. **33**, 283 (2007).
16. A. Monakhov and N. Sablina, *Whispering gallery mode lasers*, in A. Baranov and E. Tournié, *Semiconductor lasers: Fundamentals and applications*, Woodhead Publishing (2013), p. 551.
17. N. Barberán and J. Bausells, Phys. Rev. B **31**(10), 6354 (1985).
18. R. Kötz, D. M. Kolb, and F. Forstmann, Surface Science **9**, 489 (1980).
19. D. Pines, *Elementary excitations in solids: lectures on protons, electrons, and plasmons*, Advanced Book Program, Perseus Books (1999), p. 312.