Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 9, с. 646 – 650

Резонансное поглощение терагерцового излучения в нанoперфорированном графене

В. В. Еналдиев[+1)], *В. А. Волков*[+*1)]

[+]*Институт радиотехники и электроники им. Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 22 августа 2016 г.

Недавние измерения проводимости наноперфорированного графена интерпретируются авторами в терминах краевых состояний, прижатых к краю каждого наноотверстия. Периметрическое квантование краевых состояний должно приводить к образованию квазиэквидистантной лестницы квазистационарных энергетических уровней. Дираковские фермионы, заполняющие эту лестницу, вращаются вокруг каждого наноотверстия в направлении, определяемом индексом долины. В данной работе показано, что освещение этой системы циркулярно поляризованным терагерцовым излучением приводит к резонансу в поглощении в одной из долин. Величиной поглощения на резонансной частоте можно управлять при помощи затворного напряжения.

DOI: 10.7868/S0370274X16210074

Введение. Активные как теоретические, так и экспериментальные исследования графена ведутся уже на протяжении более чем десяти лет. Это связано прежде всего с необычным ультрарелятивистским законом дисперсии носителей заряда (называемых дираковскими фермионами (ДФ)), который обуславливает уникальные свойства графена. Так, большой коэффициент поглощения графена в оптическом диапазоне ($\sim 2.3\,\%$) [1, 2] дал возможность идентифицировать чешуйки графита толщиной всего несколько атомных слоев (многослойный графен) в обычный оптический микроскоп [3]. Поглощение в графене характеризуется двумя вкладами [4]: межзонным и внутризонным. Первый вклад происходит благодаря разрешенным принципом Паули вертикальным межзонным переходам. Он имеет универсальное значение [4–6], не зависящее от параметров самого графена. Управляемый напряжением на затворе, межзонный вклад определяет поглощение в инфракрасном и видимом диапазонах. Второй вклад определяется непрямыми внутризонными переходами, разрешенными при учете рассеяния. Внутризонный вклад является определяющим в отклике графена на излучение дальнего инфракрасного диапазона и описывается в рамках модели Друде [7]. В нашей работе анализируется новый механизм внутризонного поглощения, связанный с резонансными переходами между краевыми состояниями.

1)e-mail: vova.enaldiev@gmail.com; volkov.v.a@gmail.com

Важной особенностью графена является существование собственных краевых состояний (КС) [8, 9]. В приближении ближайших соседей теория сильной связи предсказывает существование бездисперсионных КС на краю типа зигзаг и отсутствие КС на краю типа кресло [10]. Однако учет вкладов, следующих за ближайшими соседями [11], реконструкции [12] или химической абсорбции [13] на линейном краю типа зигзаг приводит к тому, что КС приобретают ненулевую дисперсию. Появление КС также предсказано на линейном реконструированном краю типа кресло [14].

Однако в экспериментальном плане ситуация намного менее ясна и заслуживает отдельной дискуссии. Тем не менее недавно было экспериментально показано [15, 16], что КС существуют на круглом краю в наноперфорированном графене. Наноотверстия в графене, называемые также антиточками, представляют собой области в плоскости листа графена, недоступные для ДФ. В рамках приближения огибающих функций антиточку можно описывать с помощью феноменологического граничного условия, которое обеспечивает эрмитовость гамильтониана ограниченного графена

$$v\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_\tau = \epsilon\psi_\tau, \qquad (1)$$

в котором $v \approx 10^6$ м/с, σ_x, σ_y – матрицы Паули, $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$ – оператор импульса, $\tau = \pm 1$ – индекс долины K, K', соответственно, $\psi_\tau = (\psi_1, \psi_2)^T$ – двухкомпонентные огибающие функции в долине с индексом τ. Общее граничное условие [12, 17–19], сохраняющее инверсию времени и не запутывающее долины на краю, параметризуется всего одним действительным феноменологическим параметром a:

$$\left[\psi_1 + i\tau a^\tau e^{-i\varphi}\psi_2\right]_{edge} = 0, \tag{2}$$

здесь φ – угол между осью x и нормалью к краю. Граничное условие (ГУ) (2) и конечность периметра антиточки приводят к появлению почти эквидистантных уровней квазистационарных КС, отвечающих вращению ДФ вокруг антиточки. Низкоэнергетический спектр КС на антиточке выражается формулой (см. рис. 1) [20]:

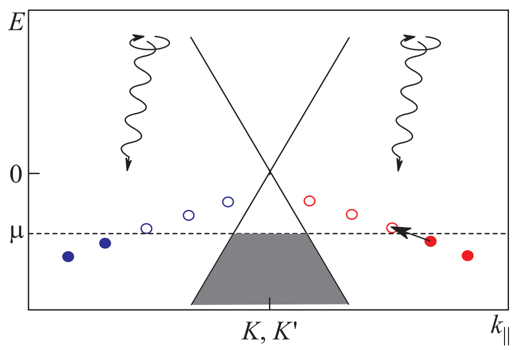

Рис. 1. (Цветной онлайн) Квазиклассическая зависимость энергий квазистационарных краевых состояний в графене с одной антиточкой от заквантованной тангенциальной компоненты квазиимпульса ($k_{||} = l/R$) в схеме приведенных долин при $a < 0$. Красным цветом отмечены квазистационарные уровни в долине K, синим – K'. Под уровнем Ферми μ находятся заполненные делокализованные (серый фон) и краевые состояния (закрашенные кружки). Циркулярно поляризованное по часовой стрелке излучение приводит к переходам с изменением $l \to l-1$, поэтому только переход (показан жирной стрелкой) между краевыми состояниями из красной долины приводит к резонансу в поглощении

$$\epsilon_{l\tau} = \tau l\,(\hbar\omega_0 \,\mathrm{sgn}\, a - \Delta_l) - i\gamma_l. \tag{3}$$

Здесь эквидистантная часть спектра определяется частотой $\omega_0 = 2|a|v/R$, малая неэквидистантная поправка $\Delta_l = 2a^3 l(1 - l\delta_{|l|1})/(l-1)$, где $\delta_{|l|1}$ – символ Кронеккера, под a нужно понимать усредненное по периметру значение параметра ГУ (2), R – радиус антиточки, l – орбитальный момент КС. Малое, но конечное обратное время жизни КС равно

$$\gamma_l = \frac{2\pi\hbar v}{R}\frac{(|al|)^{2|l|+1}}{\Gamma(|l|)\Gamma(|l|+1)}, \tag{4}$$

где $\Gamma(l)$ – гамма-функция. Применимость спектра КС (3) определяется условиями $\epsilon_{l\tau}R/\hbar v \ll 1$, $|al| \ll 1$, $\tau l > 0$, $|l| = 1, 2, 3, \ldots$, при которых энергии КС хорошо определены в силу $\mathrm{Re}\,\epsilon_{l\tau} \gg \mathrm{Im}\epsilon_{l\tau}$.

В данной работе мы покажем, что коэффициент поглощения наноперфорированного графена имеет резонанс на частотах, отвечающих разности энергий ближайших уровней (3). Величина поглощения на резонансной частоте, контролируемая напряжением на затворе, может достигать нескольких процентов при малой, но реально достижимой концентрации антиточек $n_a \ll 1/R^2$.

Резонансное поглощение в наноперфорированном графене. Рассмотрим одну антиточку радиуса R в бесконечном графене и построим полную систему функций для такой задачи. Так как нас будет интересовать только внутризонное поглощение, то мы для определенности будем рассматривать зону с отрицательными энергиями ϵ_k. Для наших целей удобно будет ввести систему функций задачи рассеяния, которая характеризуется определенным асимптотическим поведением: на бесконечности имеется плоская волна $e^{i\mathbf{kr}}$ с волновым вектором $\mathbf{k} = [|\epsilon_k|/\hbar v](\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ и расходящаяся от антиточки цилиндрическая волна. В цилиндрических координатах точная волновая функция задачи рассеяния имеет вид:

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{k}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} J_l(kr) + C_{l\tau}(k)H^{(2)}_l(kr) \\ -i[J_{l+1}(kr) + C_{l\tau}(k)H^{(2)}_{l+1}(kr)]e^{i\varphi}\end{pmatrix} \times \\ \times i^l e^{-i\vartheta l + il\varphi}. \tag{5}$$

Здесь $k = |\epsilon_k/\hbar v|$, члены с функцией Бесселя J_l описывают разложение плоской волны по функциям с угловым моментом l, а члены с функцией Ганкеля $H^{(2)}_l$ – расходящуюся цилиндрическую волну. Коэффициенты $C_{l\tau}(k)$ определяются из граничного условия (2)

$$C_{l\tau}(k) = -\frac{J_l(kR) + \tau a^\tau J_{l+1}(kR)}{H^{(2)}_l(kR) + \tau a^\tau H^{(2)}_{l+1}(kR)}. \tag{6}$$

Вместе с функциями (5) для вычисления матричных элементов переходов нам понадобятся функции $\psi^{(-)}_{\mathbf{k}}$, которые отвечают на бесконечности плоской волне $e^{i\mathbf{kr}}$ и сходящейся на антиточку цилиндрической волне [21]. Они получаются из (5) заменой $C_l \to C^*_l$ и $H^{(2)} \to H^{(1)}$, где $H^{(1)}, H^{(2)}$ – функции Ганкеля 1-го и 2-го рода, соответственно. Обе системы функций $\psi^{(+)}_{\mathbf{k}}$ и $\psi^{(-)}_{\mathbf{k}}$ полны и нормированы на дельта-функцию

$$\int_R^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \psi^{(\pm)+}_{\mathbf{k}}\psi^{(\pm)}_{\mathbf{k}'} = (2\pi)^2\frac{\delta(k-k')}{k}\delta(\vartheta - \vartheta'). \tag{7}$$

Пусть на графен по нормали падает слабое циркулярно поляризованное по часовой стрелке излучение электрическое поле которого равно $\mathbf{F} = F(\cos\omega t, -\sin\omega t, 0)$. Вводя в уравнение (1) взаимодействие ДФ с излучением через вектор-потенциал $\mathbf{A} = -c\int \mathbf{F}dt$, получим член, описывающий переходы в непрерывном спектре:

$$V = v\frac{e}{c}\sigma\cdot\mathbf{A} = \frac{eFv}{2\omega}(-i\sigma_x - \sigma_y)e^{i\omega t} + \\ + \frac{eFv}{2\omega}(i\sigma_x - \sigma_y)e^{-i\omega t} \equiv V_1 e^{i\omega t} + V_2 e^{-i\omega t}. \quad (8)$$

В этом уравнении V_1 описывает испускание фотона, а член V_2 – поглощение. Вероятность перехода в единицу времени равна

$$dw^{(1,2)}_{\mathbf{kk}'} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\mathbf{k}'|V_{1,2}|\mathbf{k}\rangle\right|^2\delta(\epsilon_{k'} - \epsilon_k \pm \hbar\omega)\frac{d^2k'}{(2\pi)^2}, \quad (9)$$

где знак $+(-)$ отвечает индексу 1(2), $|\mathbf{k}\rangle \equiv \psi^{(+)}_{\mathbf{k}}$, $\langle\mathbf{k}'| \equiv \psi^{(-)\dagger}_{\mathbf{k}'}$, матричный элемент выражается формулой:

$$\langle\mathbf{k}'|V_1|\mathbf{k}\rangle = \frac{4evFe^{i\vartheta}}{\omega(k^2 - k'^2)\pi R^2 kk'} \times \\ \times \sum_l \left\{(e^{i(\vartheta'-\vartheta)l}(kR + \tau 2a^\tau(l+1) + a^{2\tau}k'R)) \times \right. \\ \times \left[H^{(2)}_l(k'R) + \tau a^\tau H^{(2)}_{l+1}(k'R)\right]^{-1} \times \\ \left. \times \left[H^{(2)}_{l+1}(kR) + \tau a^\tau H^{(2)}_{l+2}(kR)\right]^{-1}\right\}, \quad (10)$$

матричный элемент $\langle\mathbf{k}'|V_2|\mathbf{k}\rangle$ получается из (10) заменой $k \leftrightarrow k'$.

Определим безразмерный коэффициент поглощения $\alpha(\omega)$ как мощность, диссипируемую единицей площади графена с антиточками, нормированную на полный падающий поток:

$$\alpha(\omega) = \frac{U(\omega)}{\Omega S}, \quad (11)$$

где Ω – площадь листа графена, $S = cF^2\sqrt{\kappa}/4\pi$ – модуль вектора Пойнтинга падающего излучения, κ – эффективная диэлектрическая проницаемость системы. Диссипируемая мощность выражается через вероятности переходов формулой:

$$U(\omega) = N_a\hbar\omega\int\int\left[\frac{d^2k}{(2\pi)^2}dw^{(2)}_{\mathbf{kk}'}f(\mathbf{k})(1 - f(\mathbf{k}')) - \right. \\ \left. - \frac{d^2k'}{(2\pi)^2}dw^{(1)}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}f(\mathbf{k}')(1 - f(\mathbf{k}))\right], \quad (12)$$

в которой считается, что вклады от каждого антидота независимы, N_a – число антидотов, $f(\mathbf{k})$ – функция Ферми–Дирака. Формула (12) справедлива при малой концентрации антидотов $n_a R^2 \ll 1$ ($n_a = N_a/\Omega$). Подставляя (12) в (11), получим окончательную формулу для внутризонного вклада в коэффициент поглощения перфорированного графена:

$$\alpha(\omega) = \frac{32 g_s n_a e^2 v^2\left(\frac{\hbar v}{R}\right)^2}{\pi^2\omega c} \times \\ \times \int_0^{+\infty} d\epsilon\left\{\frac{f(-\epsilon - \hbar\omega) - f(-\epsilon)}{\epsilon(\epsilon + \hbar\omega)((\epsilon+\hbar\omega)^2 - \epsilon^2)^2}\right\} \times \\ \sum_l\left\{\left(\epsilon + \hbar\omega + \tau 2a^\tau\hbar v(l+1)/R + a^{2\tau}\epsilon\right)^2 \times \right. \\ \times\left|H^{(2)}_l(kR) + \tau a^\tau H^{(2)}_{l+1}(kR)\right|^{-2} \times \\ \left. \times\left|H^{(2)}_{l+1}(kR + \omega R/v) + \tau a^\tau H^{(2)}_{l+2}(kR + \omega R/v)\right|^{-2}\right\}, \quad (13)$$

где $g_s = 2$ – фактор спинового вырождения в графене. Зависимость поглощения от частоты для различных значений температуры и уровня Ферми приведена на рис. 2. Оба знаменателя в сумме по l в (13)

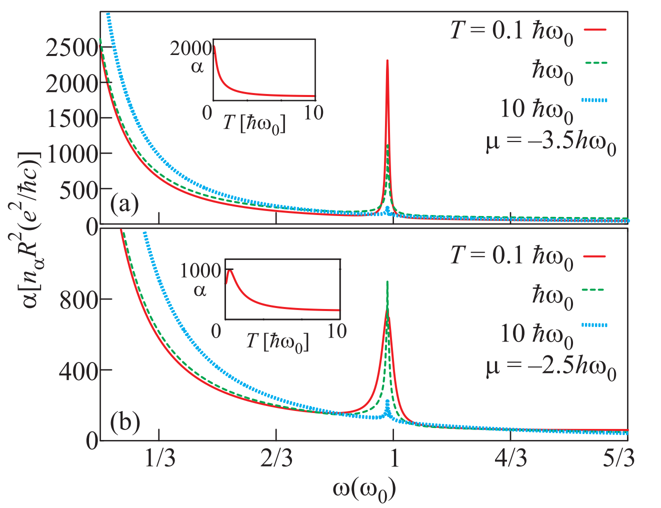

Рис. 2. (Цветной онлайн) Коэффициент поглощения, определяемый формулой (13), как функция частоты при $a = -0.15$ и уровнях Ферми $\mu = -3.5\hbar\omega_0$ (a), $\mu = -2.5\hbar\omega_0$ (b). Резонансная частота, согласно (16), равна $\omega_{\text{res}} \approx 0.99\omega_0 \approx 5$ ТГц при $R = 10$ нм. На левых вставках показаны зависимости амплитуды резонанса от температуры для соответствующих значений уровня Ферми

малы, когда энергия ϵ_k состояния $|\mathbf{k}\rangle$ соответствует действительной части $l+1$-го квазистационарного краевого уровня (3), и, одновременно, $\epsilon_k + \hbar\omega$ равно действительной части энергии l-го квазистационарного уровня. Фактически это условие резонанса в поглощении. Для рассматриваемой поляризации (по часовой стрелке) и валентной зоны указанное условие выполнено только в одной из долин $\tau = +1$ при $l \geq 1$, $a < 0$, т.к. энергии квазистационарных КС в этой долине уменьшаются с ростом l (см. рис. 1). При смене направления поляризации резонанс в поглощении появляется, когда ϵ_k соответствует энергии $l-1$-го уровня КС, а $\epsilon_k + \hbar\omega$ – энергии l-го уровня КС. Это условие выполнено только в долине $\tau = -1$ при $l \leq -1$, $a < 0$, т.к. смена направления поляризации эквивалентна инверсии времени – симметрии, связывающей две долины. В пределе $\omega \to 0$ коэффициент поглощения (13) следует друдевскому поведению ω^{-2} в чистой системе ($\omega\tau = \infty$).

В низкоэнергетическом пределе $kR \ll 1$ поглощение удобно переписать в следующем виде:

$$\alpha(\omega) = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \alpha_l^{(res)}(\omega, T) + Z(\omega, T), \qquad (14)$$

здесь $Z(\omega, T)$ – плавная функция частоты, парциальный резонансный член имеет вид:

$$\alpha_l^{(\mathrm{res})}(\omega, T) = \frac{\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)}{\cosh\left(\frac{\mathrm{Re}(\epsilon_{l+1})-\mu}{T} + \frac{\hbar\omega}{2T}\right) + \cosh\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)} \times$$
$$\times \frac{8\sqrt{\pi} g_s n_a e^2 v^2}{\omega c} \frac{(l+1)a^2\gamma_l}{l\left[\hbar^2(\omega-\omega_l)^2 + \gamma_l^2\right]}. \qquad (15)$$

Резонансная частота в формуле (15) определяется выражением:

$$\omega_l = \mathrm{Re}\left(\epsilon_l - \epsilon_{l+1}\right)/\hbar = \omega_0\left[1 - a^2\left(1 + 4\delta_{l1}\right)\right]. \qquad (16)$$

Формулы (15), (16) применимы при $|al| \lesssim 1$, откуда возникает оценка числа резонансных членов в (14): $|l_{\max}| \sim 1/|a|$. Из этого следует ограничение на положения уровня Ферми μ относительно точки Дирака, при котором возможно наблюдение резонансов: $|\mu| \lesssim \hbar\omega_0/2|a|$. Из формулы (15) видно, что вклад в сумму от l-го члена на резонансной частоте пропорционален времени жизни квазистационарного состояния ($\propto 1/\gamma_l$), которое, согласно (4), увеличивается с ростом l. На рис. 3 приведена зависимость величины коэффициента поглощения на резонансной частоте от положения уровня Ферми для четырех характерных температур. Видно, что при низких температурах поглощение является ступенчатой функцией уровня Ферми. При низких температурах ($T \ll \hbar\omega_0$) амплитуда резонанса определяется тем членом $\alpha_l^{(\mathrm{res})}$ в сумме (14), для которого $f(\mathrm{Re}(\epsilon_l)) \approx 0$ и $f(\mathrm{Re}(\epsilon_l) - \hbar\omega) \approx 1$. С увеличением температуры в поглощение на резонансной частоте вносят все больший вклад члены с большими l. Так на рис. 2b при

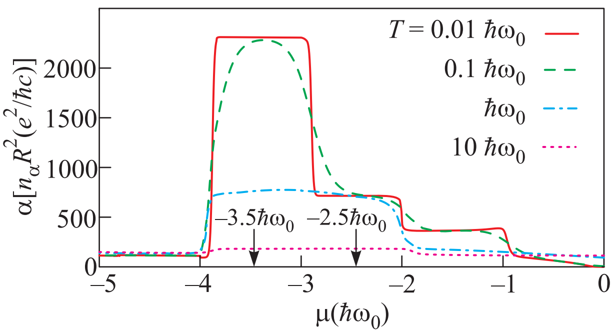

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость величины поглощения на резонансной частоте $\omega_{\mathrm{res}} = 0.99\omega_0$ от положения уровня Ферми при $a = -0.15$

температуре $T = 0.1\hbar\omega_0$ резонанс определяется членом с номером $l = 2$ в формуле (14). При увеличении температуры на порядок ($T = \hbar\omega_0$) дополнительный вклад дает член с $l = 3$, что приводит к росту резонансного максимума и уменьшению его ширины (т.к. $\gamma_l \gg \gamma_{l+1}$). Дальнейший рост температуры приводит к понижению максимального значения (см. вставку на рис. 2b). Иная ситуация представлена на рис. 2a, на котором при температурах, много меньших энергии резонанса, вклад в поглощение на резонансной частоте определяется членом в сумме (14) с номером $l = 3$ (при $\mu = -3.5\hbar\omega_0$). Его вклад в поглощение является главным для рассматриваемого значения $a = -0.15$, т.к. он в 3 раза превосходит вклады от остальных членов (см. рис. 3). Поэтому ширина линии резонанса не зависит от температуры, а значение в максимуме убывает с ростом последней (см. вставку на рис. 2a). Различие в температурных зависимостях амплитуды резонанса на рис. 2a, b определяется конкуренцией двух факторов. С одной стороны, с ростом температуры разность фермиевских функций распределения уменьшается, и поглощение падает с ростом T. С другой стороны, появляются дополнительные вклады в амплитуду резонанса, связанные с соседними резонансными переходами. Поэтому реализация монотонной или немонотонной температурной зависимости амплитуды резонанса сложным образом зависит от параметров системы. Зависимость величины поглощения на резонансной частоте от положения уровня Ферми, представленная на рис. 3, демонстрирует возможность управления величиной отклика в резонансе при помощи затвора. При низких температурах и достижимых на опыте [16] значений концентрации антиточек $n_a R^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ абсолютное значение коэффициента поглощения может достигать нескольких процентов (для $a = -0.15$ и $-4\hbar\omega_0 \lesssim \mu \lesssim -3\hbar\omega_0$), что по величине сопоставимо с плазмонным откликом графеновых структур [22]. При высоких температурах ($T \gg \hbar\omega_0, \mu$) коэффициент поглощения спадает как $1/T$ (см. левые вставки на рис. 2).

Заключение. Показано, что внутризонная часть отклика ДФ в наноперфорированном графене на внешнее электромагнитное излучение имеет резонанс, обусловленный переходами между ближайшими уровнями КС на антиточках. Для антиточек с нанометровым диаметром резонанс лежит в терагерцовой части спектра. Циркулярно поляризованное излучение приводит к резонансу лишь в одной из долин. При низких температурах поглощение является ступенчатой функцией уровня Ферми. Величиной поглощения в максимуме можно управлять, изменяя концентрацию при помощи напряжения на затворе, что открывает возможность для использования наноперфорированного графена в качестве оптического модулятора в терагерцовом диапазоне [23].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект # 16-12-10411).

1. R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko, K. S. Novoselov, T. J. Booth, T. Stauber, N. M. R. Peres, and A. K. Geim, Science **320**, 1308 (2008).
2. Z. Q. Li, E. A. Henriksen, Z. Jiang, Z. Hao, M. C. Martin, P. Kim, H. L. Stormer, and D. N. Basov, Nat. Phys. **4**, 532 (2008).
3. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, Science **306**, 666 (2004).
4. V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, and J. P. Carbotte, Phys. Rev. Lett. **96**, 256802 (2006).
5. L. A. Falkovsky and A. A. Varlamov, Eur. Phys. J. B **56**, 281 (2007); Л. А. Фальковский, УФН **182**, 1223 (2012).
6. T. Ando, Y. Zheng, and H. Suzuura, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 1318 (2002).
7. J. Horng, C. F. Chen, B. Geng, C. Girit, Y. Zhang, Z. Hao, H. A. Bechtel, M. Martin, A. Zettl, M. F. Crommie, Y. R. Shen, and F. Wang, Phys. Rev B **83**, 165113 (2011).
8. K. A. Ritter and J. W. Lyding, Nat. Mater. **8**, 235 (2009).
9. C. Tao, L. Jiao, O. V. Yazyev, Y.-C. Chen, J. Feng, X. Zhang, R. B. Capaz, J. M. Tour, A. Zettl, S. G. Louie, H. Dai, and M. F. Crommie, Nat. Phys. **7**, 616 (2011).
10. L. Brey and H. A. Fertig, Phys. Rev. B **73**, 235411 (2006).
11. N. M. R. Peres, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. B **73**, 125411 (2006).
12. J. A. M. van Ostaay, A. R. Akhmerov, C. W. J. Beenakker, and M. Wimmer, Phys. Rev. B **84**, 195434 (2011).
13. S. Fujii, M. Ziatdinov, M. Ohtsuka, K. Kusakabe, M. Kiguchia, and T. Enoki, Farad. Discuss. **173**, 173 (2014).
14. P. A. Maksimov, A. V. Rozhkov, and A. O. Sboychakov, Phys. Rev. B **88**, 245421 (2013).
15. Yu. I. Latyshev, A. P. Orlov, V. A. Volkov, V. V. Enaldiev, I. V. Zagorodnev, O. F. Vyvenko, Yu. V. Petrov, and P. Monceau, Sci. Rep. **4**, 7578 (2014).
16. Ю. И. Латышев, А. П. Орлов, А. В. Фролов, В. А. Волков, И. В. Загороднев, В. А. Скуратов, Ю. В. Петров, О. Ф. Вывенко, Д. Ю. Иванов, М. Конзиковски, П. Монсеау, Письма в ЖЭТФ **98**, 242 (2013).
17. В. А. Волков, И. В. Загороднев, ФНТ **35**, 5 (2009).
18. G. Tkachov, Phys. Rev. B **79**, 045429 (2009).
19. D. M. Basko, Phys. Rev. B **79**, 205428 (2009).
20. I. V. Zagorodnev, Zh. A. Devizorova, and V. V. Enaldiev, Phys. Rev. B **92**, 195413 (2015).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физико-математическая литература, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М. (2008), с. 684.
22. L. Ju, B. Geng, J. Horng, C. Girit, M. Martin, Z. Hao, H. A. Bechtel, X. Liang, A. Zettl, Y. R. Shen, F. Wang, Nature Nanotechnology **6**, 630 (2011).
23. Z. Sun, A. Martinez, and F. Weng, Nat. Photonics **10**, 227 (2016).