Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 10, с. 695 – 700 © 2016 г. 25 ноября

Развитие структур высокой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера: влияние начальных условий

Д. С. Агафонцев[+*1)], *Е. А. Кузнецов*[*×], *А. А. Майлыбаев*[∘]

[+] *Институт океанологии им. Ширшова РАН, 117218 Москва, Россия*

[*] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[×] *Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[∘] *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 22460-320 Rio de Janeiro, Brazil*

Поступила в редакцию 19 сентября 2016 г.

Развитие трехмерных течений несжимаемой идеальной жидкости приводит к формированию очень тонких блинообразных областей с растущей завихренностью. Эти области эволюционируют в соответствии со скейлингом $\omega_{\max}(t) \propto \ell(t)^{-2/3}$ между максимумом завихренности и толщиной блина, обеспечивая основной вклад в спектр энергии, в котором наблюдается постепенное формирование колмогоровского интервала $E_k \propto k^{-5/3}$ для некоторых начальных течений. В настоящей работе на основе массивного численного моделирования мы изучаем влияние начальных условий на процессы формирования блинов и развития колмогоровского спектра.

DOI: 10.7868/S0370274X16220069

1. Введение. Согласно теории Колмогорова–Обухова развитой гидродинамической турбулентности [1, 2], флуктуации скорости на промежуточном масштабе l подчиняются степенному закону $\langle|\delta v|\rangle \propto \varepsilon^{1/3}l^{1/3}$, где ε есть средний поток энергии от больших масштабов к малым. Вследствие этого флуктуации поля завихренности $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ расходятся на малых масштабах как $\langle|\delta\omega|\rangle \propto \varepsilon^{1/3}l^{-2/3}$. Эти соотношения приводят к колмогоровскому спектру энергии $E_k \propto \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ для соответствующей области волновых чисел (инерционного интервала), см., например, [3, 4]. Таким образом, колмогоровский спектр связан с мелкомасштабными структурами высокой завихренности. Теория Колмогорова–Обухова основывается на предположениях изотропии и локальности нелинейного взаимодействия. В таком случае динамика течения в инерционном интервале может быть описана с помощью уравнений Эйлера, и появление колмогоровского спектра можно ожидать еще до возбуждения вязких масштабов [5–8].

В предыдущей статье [9] нами было исследовано развитие областей высокой завихренности в трехмерных несжимаемых уравнениях Эйлера с помощью численного моделирования высокой точности для двух начальных условий (н.у.). Согласно [10, 11], в ситуации общего положения такие области представляют собой экспоненциально сжимающиеся блинообразные структуры (тонкие вихревые слои). В отличие от этих двух работ, нами было обнаружено, что эволюция блинов определяется двумя разными экспонентами $\ell(t) \propto e^{-t/T_\ell}$ и $\omega_{\max}(t) \propto e^{t/T_\omega}$, описывающими сжатие в поперечном направлении и рост завихренности соответственно с универсальным отношением $T_\ell/T_\omega \approx 2/3$. Это отношение приводит к скейлингу колмогоровского типа $\omega_{\max}(t) \propto \ell(t)^{-2/3}$ между максимумом завихренности и толщиной блина. Число блинов, соответствующих разным пространственным масштабам, увеличивается со временем. Нами было показано, что эти структуры порождают в фурье-пространстве сильно анизотропное поле завихренности, сконцентрированное в "джетах", вытянутых в направлениях, перпендикулярных блинам. Эти джеты, занимающие лишь малую долю всего k-пространства, доминируют в спектре энергии, где отчетливо наблюдается постепенное формирование интервала с колмогоровским скейлингом $E_k \propto k^{-5/3}$, для полностью невязких течений.

В настоящей работе мы продолжаем это исследование и изучаем влияние н.у. на процессы формирования блинов и развития колмогоровского спектра энергии. Нами проведены численные эксперименты для 30 н.у. в виде суперпозиции сдвигового течения $\omega_x = \sin z$, $\omega_y = \cos z$, $\omega_z = 0$ и случайного (не обязательно малого) возмущения. Наличие сдвигового течения влияет на ориентацию появляющихся блинов: от полностью случайной, когда сдвиговое течение от-

1)e-mail: dmitrij@itp.ac.ru

сутствует, до почти однонаправленной и ориентированной вдоль оси z, когда случайное возмущение мало. Мы наблюдаем, что скейлинг $\omega_{\max}(t) \propto \ell(t)^{-2/3}$ между максимумом завихренности и толщиной блина выполняется универсальным образом, тогда как н.у. в виде сдвигового течения и малого возмущения приводят к существенно более длинным интервалам волновых чисел со спектром энергии, близким к колмогоровскому $E_k \propto k^{-5/3}$.

2. Численные методы. Несжимаемые трехмерные уравнения Эйлера (в терминах завихренности)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{v} = \mathrm{rot}^{-1}\boldsymbol{\omega}, \qquad (1)$$

интегрируются численно в периодическом ящике $\mathbf{r} = (x,y,z) \in [-\pi,\pi]^3$ с использованием псевдоспектрального метода Рунге–Кутта четвертого порядка точности. Чтобы избежать влияния так называемой *bottle-neck* неустойчивости, используется фильтрация в фурье-пространстве на каждом шаге по времени с помощью функции, предложенной в [12],

$$\rho(\mathbf{k}) = \exp\left(-36\sum_{j=x,y,z}(k_j/K_{\max}^{(j)})^{36}\right), \qquad (2)$$

где $\mathbf{k} = (k_x,k_y,k_z)$ – волновой вектор, $K_{\max}^{(j)} = N_j/2$ – максимальные волновые числа и N_j – числа узлов решетки вдоль направлений $j = x,y,z$, так что $|k_j| \le K_{\max}^{(j)}$. Функция (2) отсекает примерно 20 % спектра по краям спектрального пространства в каждом из трех направлений. Обратный оператор ротора в уравнении (1) вычисляется в фурье-пространстве (см., например, [9]). Адаптивный шаг по времени определяется с помощью критерия устойчивости CFL с числом Куранта 0.5.

Мы используем адаптивную анизотропную прямоугольную решетку, которая является однородной в каждом направлении и подстраивается независимо вдоль каждой из трех координат. Алгоритм адаптации происходит от стандартного правила деалиазинга, оптимизированного для квадратичной нелинейности уравнений Эйлера. На малых временах фурье-спектр решения сосредоточен на малых гармониках, тогда как высшие гармоники содержат численный шум. Мы отслеживаем границу "сигнал-шум" (см. [9]) до тех пор, пока она не достигнет $2K_{\max}^{(j)}/3$ по любому из трех направлений $j = x,y,z$. Затем мы переопределяем решетку вдоль соответствующего направления, используя фурье-интерполяцию, которая имеет ошибку, сравнимую с ошибкой округления. Пока моделирование выполняется таким образом, ошибка алиазинга исключается, а влияние фурье-фильтрации (2) на "содержащие сигнал" гармоники пренебрежимо мало. Мы начинаем численные эксперименты на кубической решетке 128^3. Когда общее число узлов достигает 1024^3, мы продолжаем эксперимент на фиксированной решетке до тех пор, пока фурье-спектр завихренности на $2K_{\max}^{(j)}/3$ не превысит 10^{-10} от своего максимального значения вдоль любого из трех направлений j (см. [9]).

Мы выполнили численные эксперименты для 30 н.у. в виде суперпозиции сдвигового течения

$$\boldsymbol{\omega}_{sh}(\mathbf{r}) = (\sin z, \cos z, 0), \quad |\boldsymbol{\omega}_{sh}(\mathbf{r})| = 1, \qquad (3)$$

и случайного периодического возмущения (различного для каждого н.у.)

$$\boldsymbol{\omega}_p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}}\left[\mathbf{A_h}\cos(\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{B_h}\sin(\mathbf{h}\cdot\mathbf{r})\right]. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{h} = (h_x,h_y,h_z)$ – вектор с целочисленными компонентами $|h_j| \le 2$, $j = x,y,z$, а векторы $\mathbf{A_h}$ и $\mathbf{B_h}$, состоящие из действительных коэффициентов с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\mathbf{h}}^2 \sim \exp(-|\mathbf{h}|^2)$, удовлетворяют условиям ортогональности $\mathbf{h}\cdot\mathbf{A_h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{B_h} = 0$, необходимым для самосогласованности. Сдвиговое течение (3) является точным решением уравнений Эйлера со скоростью, совпадающей с завихренностью: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$.

Мы рассматриваем н.у. трех типов:

- Тип I – случайное течение $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p$.
- Тип II – смесь сдвигового течения со случайным возмущением $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{sh} + \boldsymbol{\omega}_p$. Амплитуда возмущения подобрана так, чтобы н.у. удовлетворяло $0.2 \le |\boldsymbol{\omega}| \le 1.8$, $\max|\boldsymbol{\omega}| \ge 1.6$.
- Тип III – смесь сдвигового течения со случайным возмущением $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{sh} + \boldsymbol{\omega}_p$. Амплитуда возмущения подобрана так, чтобы н.у. удовлетворяло $0.8 \le |\boldsymbol{\omega}| \le 1.2$, $\max|\boldsymbol{\omega}| \ge 1.15$.

Таким образом, н.у. типа I является периодическим случайным течением, типа II – смесью сдвигового течения и случайного течения в пропорции примерно $1:0.8$, и типа III – сдвиговым течением с малым возмущением. Для каждого типа было рассмотрено 10 случайных реализаций н.у. Результаты проиллюстрированы для трех репрезентативных численных экспериментов с н.у.:

- IC_1 (тип I); финальные время $t = 6.52$ и решетка $1152 \times 972 \times 864$;
- IC_2 (тип II); финальные время $t = 7.72$ и решетка $768 \times 864 \times 1458$;

- IC_3 (тип III); финальные время $t = 12.57$ и решетка $432 \times 864 \times 2592$.

В экспериментах мы отслеживаем эволюцию спектра энергии

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{p}|=k} |\mathbf{v}(\mathbf{p}, t)|^2, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{p}, t)$ – фурье-образ поля скорости, а интегральная сумма вычисляется суммированием по сферическим оболочкам единичной ширины $\Delta k = 1$. Для некоторых н.у. мы наблюдаем формирование интервала волновых чисел до $2 \lesssim k \lesssim 20$ со скейлингом, близким к колмогоровскому $E_k \propto k^{-5/3}$. Этот интервал характеризуется "замороженным" спектром, в отличие от быстрых изменений спектра со временем на более высоких волновых числах, и содержит малую часть общей энергии (почти вся энергия сосредоточена в первой гармонике $k = 1$).

Для того чтобы исключить возможность влияния фильтрации (2) на формирование степенного интервала в спектре энергии, был выполнен тщательный анализ результатов численных экспериментов. Во-первых, и энергия $E = (1/2) \int \mathbf{v}^2 \, d^3\mathbf{r}$ и спиральность $\Omega = \int (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}) \, d^3\mathbf{r}$ сохраняются в наших экспериментах с относительной точностью порядка 10^{-11}. Во-вторых, такой же спектр энергии получается при использовании фильтрации, соответствующей стандартному правилу деалиазинга

$$\rho(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \forall j : |k_j| \le 2K_{\max}^{(j)}/3, \\ 0, & \text{если} \quad \exists j : |k_j| > 2K_{\max}^{(j)}/3, \end{cases} \tag{6}$$

где $j = x, y, z$. В-третьих, численные эксперименты на разных решетках практически идеально сходятся друг с другом. Последние два факта продемонстрированы на рис. 1, на котором изображен спектр энергии при $t = 6$ для четырех экспериментов с н.у. I_1 из [9]. Два эксперимента с фурье-фильтрами (2) и (6), ограниченные общим числом узлов решетки 2048^3, переходят на финальную решетку $972 \times 2048 \times 4096$ только при $t = 6.08$. Это означает, что при $t = 6$ алиазинг и фильтрация имеют пренебрежимо малое влияние на "содержащие сигнал" гармоники для фильтрации Hou & Li (2), и в точности нулевое влияние для фильтрации, согласно правилу деалиазинга (6). Тем не менее, спектр энергии для этих расчетов практически совпадает со спектром двух других экспериментов с теми же фурье-фильтрами, но ограниченных решеткой 1024^3, на которые влияют как алиазинг, так и фурье-фильтрация. Все четыре эксперимента демонстрируют одинаковый 5/3-интервал в спектре энергии; при $t = 6$ относительная

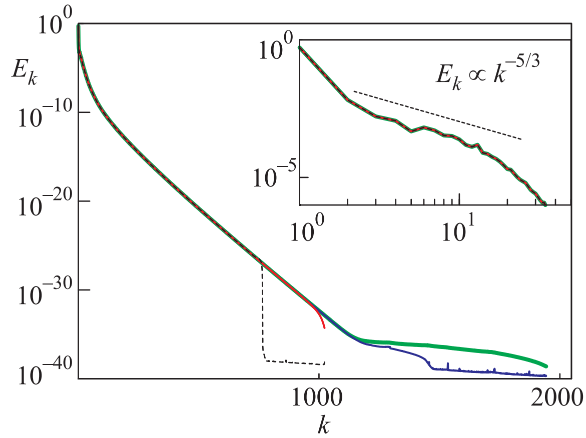

Рис. 1. (Цветной онлайн) Спектр энергии $E_k(t)$ при $t = 6$ для четырех экспериментов с н.у. I_1 из [9]: с числом узлов 2048^3 и фильтрацией Hou & Li (2) (жирная зеленая линия); 2048^3 узлов и правило деалиазинга (6) (синяя линия); 1024^3 узлов и фильтрация Hou & Li (2) (тонкая красная линия); 1024^3 узлов и правило деалиазинга (6) (пунктирная черная линия)

поточечная разница $|\boldsymbol{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}^{(2)}(\mathbf{r})|/|\boldsymbol{\omega}^{(1)}(\mathbf{r})|$ между любыми двумя экспериментами $\boldsymbol{\omega}^{(1)}(\mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\omega}^{(2)}(\mathbf{r})$ оказывается ниже 10^{-8}, при завихренности в диапазоне $0.22 \le |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})| \le 7.6$. Таким образом, появление интервала в спектре энергии со скейлингом колмогоровского типа не зависит от специфики нашей численной схемы и обусловлено динамикой течения, определяемой уравнениями Эйлера.

3. Результаты. Локальная геометрия структур высокой завихренности исследуется с помощью матрицы Гессиана $\partial_i \partial_j |\boldsymbol{\omega}|$ вторых производных модуля завихренности $|\boldsymbol{\omega}|$ относительно (x, y, z), вычисленных в локальном максимуме завихренности. Направление нормали к такой структуре определяется как собственный вектор, соответствующий наибольшему из трех собственных значений $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge |\lambda_3|$ Гессиана. Характерные размеры оцениваются исходя из локального приближения второго порядка как $\ell_i = \sqrt{2\,\omega_{\max}/|\lambda_i|}$. Следует отметить, что численное определение локальных максимумов завихренности является нетривиальной задачей из-за специфической геометрии блинообразных структур; для описания соответствующих методов см. [9].

Для всех 30 проведенных экспериментов области высокой завихренности представляют собой блинообразные структуры (тонкие вихревые листы) с уменьшающейся толщиной ℓ_1 и не меняющимися существенно двумя другими размерами $\ell_2 \sim \ell_3 \sim 1$. В конечный момент времени отношение продольных размеров к толщине достигает $\ell_2/\ell_1 \sim \ell_3/\ell_1 \sim 100$

для некоторых таких структур. Число блинов растет со временем; блины демонстрируют четкую тенденцию к асимптотическим экспоненциальным росту завихренности $\omega_{\max}(t) \propto e^{t/T_\omega}$ и сжатию в поперечном направлении $\ell_1(t) \propto e^{-t/T_\ell}$ с отношением $T_\ell/T_\omega \approx 2/3$. Здесь $\omega_{\max}(t)$ является максимумом завихренности в блине. Отношение $T_\ell/T_\omega \approx 2/3$ приводит к скейлингу колмогоровского типа между максимумом завихренности и толщиной блина,

$$\omega_{\max}(t) \propto \ell_1(t)^{-2/3}, \qquad (7)$$

который показан на рис. 2 на примере н.у. IC_1 (тип I) и IC_3 (тип III). Отметим, что для некоторых н.у.

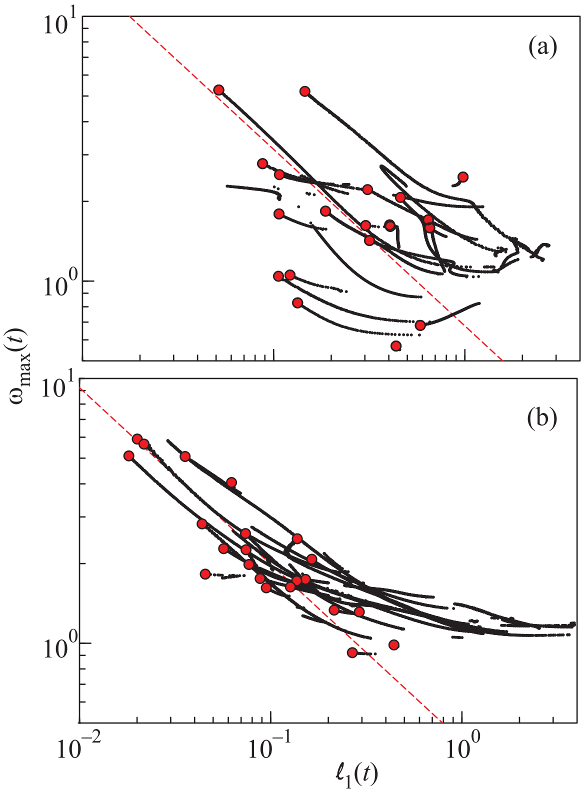

Рис. 2. (Цветной онлайн) Локальные максимумы завихренности $\omega_{\max}(t)$ и толщина блинов $\ell_1(t)$ в процессе эволюции блинообразных структур для н.у. IC_1 (тип I) (a) и IC_3 (тип III) (b). В конечный момент времени локальные максимумы отмечены красными кругами; пунктирная красная линия обозначает степенной закон $\omega_{\max} \propto \ell_1^{-2/3}$

и для некоторых блинов мы наблюдаем отклонения от скейлинга (7). Тонкие блинообразные структуры порождают в фурье-пространстве сильно анизотропное поле завихренности, сконцентрированное в "джетах", вытянутых в направлениях, перпендикулярных блинам. Эти джеты, занимающие лишь небольшую часть всего k-пространства, обеспечивают основной вклад в спектр энергии (5). Таким образом, развитие блинообразных структур и эволюция спектра энергии напрямую связаны друг с другом. Все эти наблюдения совпадают с теми, о которых сообщалось в нашей предыдущей работе [9], основанной на численных экспериментах для всего двух н.у.

Для н.у. типа I развивающиеся блинообразные структуры имеют произвольную ориентацию. Соответствующие эксперименты останавливались на решетках типа 1000^3; максимум завихренности увеличивался в 2.5–4 раза по сравнению со своим начальным значением. Десять вариантов н.у. типа II порождают блины с направлениями нормалей, как правило, внутри 45°-угла от оси z; все такие эксперименты заканчивались на решетках типа $800 \times 800 \times 1500$ с ростом глобального максимума завихренности в 4–6 раз. Десять вариантов н.у. типа III заканчивались на решетках, похожих на $600 \times 600 \times 2500$, с увеличением глобального максимума завихренности в 3–5 раз; направления нормалей к блинам лежали, как правило, в пределах 15° от оси z.

Ни один из десяти вариантов н.у. типа I не приводил к появлению степенного интервала в спектре энергии с независящим от времени показателем степени. Это обстоятельство проиллюстрировано на рис. 3a, где спектр энергии на малых волновых числах ведет себя как $E_k \propto k^{-5}$ при $t = 3$ и близок к $E_k \propto k^{-3}$ в конечное время $t = 6.52$. Пять из десяти экспериментов с н.у. типа II показывают наличие степенного интервала со скейлингом, похожим на колмогоровский $E_k \propto k^{-5/3}$; этот интервал занимает область до $2 \lesssim k \lesssim 10$ для некоторых н.у. В большинстве экспериментов с н.у. третьего типа возникают достаточно длинные степенные интервалы, которые в финальный момент времени занимают область до $2 \lesssim k \lesssim 20$ и имеют скейлинг, похожий на колмогоровский $E_k \propto k^{-5/3}$. Разница между тремя типами н.у. проиллюстрирована на рис. 3. Настолько различное поведение не может быть объяснено различным пространственным разрешением соответствующих экспериментов: вариант IC_3 достигает точки остановки, соответствующей 1000 точек по оси z, при $t \approx 11.5$, когда степенной интервал в спектре энергии уже сформировался в области $2 \lesssim k \lesssim 20$. Отметим, что для некоторых н.у. наблюдается степенное поведение с разными показателями степени между $-8/3$ и $-4/3$; однако, для большинства экспериментов этот показатель достаточно близок к $-5/3$.

4. Заключение и обсуждение. В настоящей работе мы исследовали влияние н.у. на процессы формирования блинов и развития колмогоровского спектра энергии. С помощью 30 новых численных

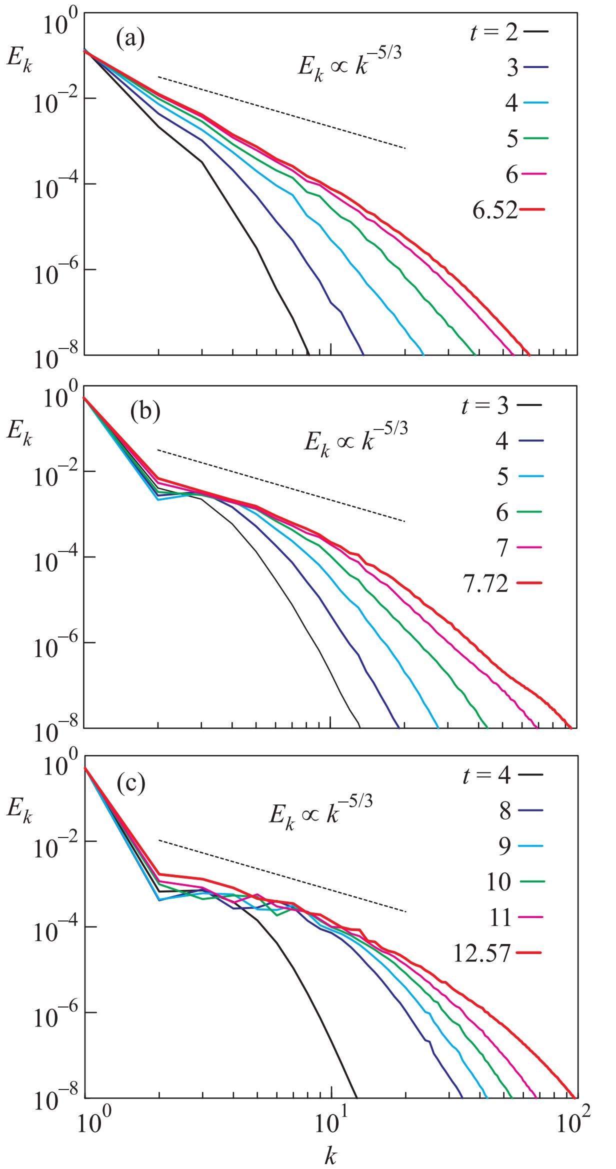

Рис. 3. (Цветной онлайн) Спектр энергии $E_k(t)$ в разные моменты времени для н.у. IC_1 (тип I) (a), IC_2 (тип II) (b) и IC_3 (тип III) (c)

экспериментов были систематически проверены основные результаты нашего предыдущего исследования [9], а именно, что области высокой завихренности представляют собой экспоненциально сжимающиеся блинообразные структуры, которые эволюционируют со скейлингом $\omega_{\max}(t) \propto \ell(t)^{-2/3}$ между максимумом завихренности и толщиной блина. В совокупности эти блины обеспечивают основной вклад в спектр энергии. Отметим, что наша работа [9] основывалась только на двух численных экспериментах.

Начальные условия для настоящего исследования были выбраны как комбинация сдвигового течения и случайного периодического потока. Такое сочетание позволяет влиять на ориентацию возникающих блинообразных структур, от полностью случайной при отсутствии сдвигового течения до почти однонаправленной, когда возмущение мало. Для полностью случайных н.у. в спектре энергии не наблюдалось возникновения степенного интервала с независящим от времени показателем степени. Напротив, в большинстве экспериментов с н.у. в виде суперпозиции сдвигового течения и малого возмущения возникают достаточно длинные интервалы со степенным скейлингом, похожим на колмогоровский $E_k \propto k^{-5/3}$.

Результаты данной работы ясно показывают, что на развитие колмогоровского спектра энергии можно влиять соответствующим выбором н.у. Природу этого влияния еще предстоит исследовать. Эволюция спектра энергии непосредственно связана с развитием блинообразных структур высокой завихренности. Тогда отличия в спектре для экспериментов с различными н.у. могут быть связаны, во-первых, с организацией течения в блинах и, во вторых, с распределением блинов по размеру, ориентации и положению в физическом пространстве. В следующей статье мы намерены представить убедительные свидетельства того, что организация течения вблизи блина очень похожа для любых блинов и любых н.у. Что касается распределения блинов по размеру, ориентации и положению, то тщательное численное исследование в этом направлении предполагает одинаковое пространственное разрешение для различных н.у. Для случайных периодических течений это означает, что конечные решетки должны иметь число точек порядка 2000^3, при значительном числе независимых численных экспериментов. В настоящий момент эти требования превышают наши вычислительные ресурсы и мы планируем продолжить это исследование в будущем.

Разработка численного кода и численные эксперименты были поддержаны Российским научным фондом (грант #14-22-00174); последние выполнялись в Новосибирском суперкомпьютерном центре (НГУ). Анализ результатов выполнялся в дата-центре Института фундаментальной и прикладной математики (IMPA, Рио-де-Жанейро). Д.С.А. благодарен за поддержку со стороны IMPA во время визитов в Бразилию. Работа А.А.М. была поддержана CNPq (грант 302351/2015-9) и Программой FAPERJ Pensa Rio (грант E-26/210.874/2014).

1. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**(1), 299 (1941).
2. А. М. Обухов, ДАН СССР **32**(1), 22 (1941).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика, Теоретическая физика*, т. VI, 3-е изд., перераб., Наука,

M. (1986) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, v. 6, *Fluid Mechanics*, Elsevier (2013)].

4. U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press (1999).
5. P. Orlandi and S. Pirozzoli, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 247 (2010).
6. D. D. Holm and R. M. Kerr, Phys. Rev. Lett. **88**(24), 244501 (2002).
7. C. Cichowlas, P. Bonaïti, F. Debbasch, and M. Brachet, Phys. Rev. Lett. **95**(26), 264502 (2005).
8. D. D. Holm and R. M. Kerr, Phys. Fluids **19**, 025101 (2007).
9. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **27**, 085102 (2015).
10. M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, and P. L. Sulem, Phys. Fluids A **4**, 2845 (1992).
11. U. Frisch, T. Matsumoto, and J. Bec, J. Stat. Phys. **113**, 761 (2003).
12. T. Y. Hou and R. Li, J. Comp. Phys. **226**(1), 379 (2007).