Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 10, с. 701 – 707 © 2016 г. 25 ноября

О построении квазиоптического приближения в диссипативных средах с пространственной дисперсией

А. А. Балакин[1)], *Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов*

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 5 июля 2016 г.
После переработки 3 октября 2016 г.

В работе предложена новая форма квазиоптического уравнения, описывающего распространение электромагнитного волнового пучка в стационарной плавнонеоднородной среде с пространственной дисперсией и диссипацией. Используемый подход гарантирует положительную определенность поглощаемой мощности в локально диссипативной среде, что является нетривиальным свойством для неоднородных сред с пространственной дисперсией. Построена эффективная численная схема для решения полученного квазиоптического уравнения.

DOI: 10.7868/S0370274X16220070

Введение. Несмотря на значительное развитие методов моделирования распространения электромагнитных волн, основанных на численном решении полной системы уравнений Максвелла, асимптотические методы описания волновых полей в плавнонеоднородных средах со сложным диэлектрическим откликом до сих пор остаются основным инструментом интерпретации и оптимизации в экспериментах по нагреву и генерации тока сверхвысокочастотными полями в системах магнитного удержания, в задачах распространения и генерации сигналов в ионосфере и множестве других областей физики и астрофизики. Основной и наиболее проработанный асимптотический подход основан на расчете геометрооптических лучей и поглощения вдоль них [1, 2]. Простое и эффективное в нерезонансных и слабодиссипативных средах геометрооптическое приближение способно лишь на качественном уровне описывать распространение и дифракцию волнового пучка в более сложных средах с сильной пространственной дисперсией и неоднородным поглощением, характерным, например, для областей электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса в высокотемпературной плазме [3].

Часть проблем, связанных с использованием приближения геометрической оптики, решается моделированием изменения параметров гауссовых пучков с расчетом поглощения по центральному лучу [4, 5]. Такой подход, известный как безаберрационное приближение, хотя и позволяет формально учесть дифракцию волнового пучка, но для описания поглощения в неоднородной на масштабе пучка среды с сильной пространственной дисперсией он пригоден еще в меньшей степени, чем лучевое описание [6].

Следующий шаг в развитии асимптотических методов был сделан в рамках квазиоптического подхода, сводящего уравнения Максвелла к эволюционному уравнению на плавную огибающую волнового пучка. Такое описание позволяет последовательно учесть анизотропию среды, пространственную неоднородность, дисперсию и резонансную диссипацию в рамках единого подхода. Первоначально метод был развит для однородных и кусочно однородных сред [7, 8] и плавнонеоднородных изотропных сред [4, 8, 9]. Обобщение на случай анизотропных и гиротропных сред с пространственной дисперсией и диссипацией было развито в [10–12]. Подход был реализован для моделирования распространения квазиоптических волновых пучков в тороидальных магнитных ловушках и, в целом, показал значительно большую точность при описании пространственного распределения энерговклада при резонансном поглощении по сравнению с используемыми лучевыми подходами [13, 14]. При этом было использовано упрощенное с учетом специфики геометрии задачи (вертикальный ввод излучения в тороидальной магнитной конфигурации) факторизованное представление эволюционного оператора в квазиоптическом уравнении, основанное на явном разделении эффектов пространственной неоднородности и дисперсии.

В настоящей работе предложено обобщение развитого в [10–12] квазиоптического подхода. Основное отличие представленной теории в использовании полного (не факторизованного) представления квазиоптического эволюционного оператора, которое

[1)]e-mail: balakin.alexey@yandex.ru

пригодно для описания распространения волновых пучков в произвольных плавно неоднородных средах, а не только в средах со специальной симметрией. Для обеспечения корректности метода нам потребовалось модифицировать формальный способ учета диссипации среды.

Предложенный метод разрабатывался для описания распространения излучения в магнитоактивной плазме. Однако в данной статье "плазменная" специфика нигде не используется, поэтому метод применим для более широкого круга задач, требующих точного описания структуры волнового поля в неоднородных анизотропных средах с пространственной дисперсией и диссипацией.

Квазиоптическое уравнение. Строгий вывод квазиоптических уравнений относительно сложен [11, 12]. Ниже мы приведем лишь основные шаги этого вывода. Начнем с уравнений Максвелла для $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ процессов, записанного в операторной форме

$$\hat{L}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{L}_{ij} \equiv \delta_{ij}\hat{p}^2 - \hat{p}_i\hat{p}_j - \hat{\varepsilon}_{ij}, \qquad (1)$$

где оператор $\hat{L}_{ij}[E_j(\mathbf{r})]$ действует на j-ю декартову компоненту $E_j(\mathbf{r})$ вектора электрического поля (далее всюду "$\hat{}$[...]" обозначает оператор, действующий на функцию в квадратных скобках). В уравнении (1) оператор импульса $\mathbf{p}$ определяется как оператор дифференцирования в координатном пространстве, нормированный на вакуумное волновое число k_0

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\mathrm{i}k_0}\nabla, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

а $\hat{\varepsilon}_{ij}$ – оператор, полученный из тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} путем замены волнового вектора $\mathbf{k}$ на оператор $k_0\hat{\mathbf{p}}$ и симметризации полученного выражения, подробнее эта процедура описана в следующем разделе. В плавно неоднородной среде приближенное решение уравнений Максвелла естественно искать в виде квазиоптического пучка, отвечающего заданной волновой моде. Для этого определим вектор поляризации $\mathbf{e}$ интересующей нас геометрооптической моды как решение уравнения $L_{ij}e_j = 0$ в локально однородной среде. Далее, используя ту же технику, что и при переходе $\varepsilon_{ij} \to \hat{\varepsilon}_{ij}$, вектору поляризации $\mathbf{e}(\mathbf{r},\mathbf{p})$ можно сопоставить оператор $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}})$. Тогда приближенное решение уравнения (1) можно искать в виде

$$E_j(\mathbf{r}) = \hat{e}_j(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}})[U(\mathbf{r})].$$

Здесь оператор вектора поляризации "действует" на скалярную амплитуду волнового пучка $U(\mathbf{r})$. Уравнение для скалярной амплитуды U принимает вид:

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{p}})[U(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{e}_i^*\hat{L}_{ij}\hat{e}_j. \qquad (2)$$

Следующим шагом следует выбрать криволинейную систему координат, связанную с опорным лучом, вдоль которого параметры волнового пучка меняются медленно. При построении квазиоптической теории для тороидальных магнитных ловушек в качестве опорного луча выбирается центральный геометрооптический луч [10, 13, 15]. Однако, опорный луч не привязан к распределению поля в волновом пучке и, в общем случае, может быть выбран произвольно [13]. Введем систему координат и канонически сопряженных импульсов

$$\mathbf{r} = (\boldsymbol{\xi}, \tau), \quad \hat{\mathbf{p}} = (\hat{\mathbf{q}}, \hat{p}_\tau),$$

где τ – эволюционная координата вдоль опорного луча, $\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{r}_\perp$ – совокупность двух криволиейных координат, ортогональных опорному лучу, $\hat{\mathbf{q}} \equiv (\mathrm{i}k_0)^{-1}\nabla_\perp$ и $\hat{p}_\tau \equiv (\mathrm{i}k_0)^{-1}\partial/\partial\tau$.

Полагая изменение параметров пучка плавным вдоль опорного луча, мы можем представить скалярную амплитуду U в виде

$$U(\mathbf{r}) = \tilde{u}(\tau,\boldsymbol{\xi})\exp\left(\mathrm{i}k_0\int p_0(\tau)\,d\tau\right),$$

где $\tilde{u}(\tau,\boldsymbol{\xi})$ – комплексная огибающая волнового пучка, функция $p_0(\tau)$ задает зависимость "несущей фазы" волнового поля вдоль оси системы. Подставляя поле в таком виде в (2), получаем уравнение для комплексной огибающей [10, 12]:

$$\hat{\mathcal{H}}\left(\tau,\boldsymbol{\xi},\hat{\mathbf{p}} + p_0(\tau)\boldsymbol{\tau}_0\right)[\tilde{u}(\tau,\boldsymbol{\xi})] = 0. \qquad (3)$$

Считая огибающую $\tilde{u}$ плавно зависящей от продольной координаты,

$$|\partial\tilde{u}/\partial\tau| \ll k_0 p_0|\tilde{u}|, \qquad (4)$$

разложим уравнение (3) до первого порядка по степеням $\partial\tilde{u}/\partial\tau$:

$$\hat{\mathcal{H}}[\tilde{u}] \approx \hat{\mathcal{H}}_0[\tilde{u}] + \frac{1}{\mathrm{i}k_0}\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_0}{\partial p_0}\left[\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}_0}{\partial p_0\partial\tau}[\tilde{u}]\right) = 0, \qquad (5)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{r},\hat{\mathbf{q}} + p_0(\tau)\boldsymbol{\tau}_0)$ – укороченный оператор, в котором отсутствуют производные по эволюционной координате τ. Последнее слагаемое в уравнении (5) в пределе геометрической оптики дает предэкспоненциальный множитель, ответственный за изменение интенсивности из-за группового замедления волн. Это слагаемое можно исключить заменой

$$\tilde{u} = \hat{A}[u], \qquad \frac{\partial\hat{\mathcal{H}}_0}{\partial p_0}\frac{\partial\hat{A}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}_0}{\partial p_0\partial\tau}\hat{A} = 0,$$

в результате которой получаем более простое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \mathrm{i}k_0 \hat{H}[u], \qquad \hat{H} = -\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_0}{\partial p_0}\hat{A}\right)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_0 \hat{A}. \quad (6)$$

За исключением ряда очень специальных случаев, оператор $\partial\hat{\mathcal{H}}_0/\partial p_0$ можно считать локальным (т.е. не содержащим производных по координатам и сводящимся к умножению на заданную функцию) при условии, что среда является плавнонеоднородной на масштабе длины волны излучения. В этом случае замена амплитуды поля также сводится к локальному преобразованию $u = \tilde{u}\sqrt{\partial\mathcal{H}_0/\partial p_0}$.

Уравнение (6) описывает эволюцию скалярной амплитуды волнового пучка u вдоль оси τ с учетом эффектов дифракции, аберраций, пространственной дисперсии и диссипации в параксиальном приближении (4). Физический смысл нового гамильтониана $\hat{H}$ нетрудно установить, если сопоставить левую и правую части уравнения (6) – это оператор продольного волнового числа $\hat{p}_\tau - p_0$ (с учетом вычитания несущей гармоники), выраженный через поперечные производные. Ниже мы покажем, что такой квазиоптический оператор можно построить по решению алгебраического дисперсионного уравнения $p_\tau(\mathbf{r},\mathbf{q})$ для рассматриваемой моды в локально однородной среде, т.е. в символической форме

$$\hat{H} = p_\tau\left(\mathbf{r}, (\mathrm{i}k_0)^{-1}\nabla_\perp\right) - p_0(\tau). \quad (7)$$

Заметим, что в отличие от геометрической оптики, при определении эволюционного оператора у нас имеется определенная свобода в выборе $p_0(\tau)$, связанная с конечным поперечным размером пучка. Эту величину удобно находить как решение локального дисперсионного уравнения

$$\mathcal{R}e\, H\left(\tau, \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau), \tilde{\mathbf{q}}(\tau) + p_0(\tau)\boldsymbol{\tau}_0\right) = 0,$$

с поперечной координатой $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau)$ и волновым числом $\tilde{\mathbf{q}}(\tau)$, отвечающими, соответственно, максимумам волнового поля и его спектра в сечении τ.

Баланс энергии. Можно показать, что в рамках сделанных приближений величина

$$\Pi_\tau = \int |u|^2 d\boldsymbol{\xi} \quad (8)$$

с точностью до размерного коэффициента совпадает с полным потоком энергии в волновом пучке вдоль оси τ. В дальнейшем мы будем использовать разложение оператора $\hat{H}$ на эрмитову и антиэрмитову части

$$\hat{H} = \hat{H}_H + \mathrm{i}\hat{H}_A, \quad (9)$$

где $\hat{H}_H \equiv (\hat{H}+\hat{H}^\dagger)/2$ и $\hat{H}_A \equiv (\hat{H}-\hat{H}^\dagger)/2\mathrm{i}$ – эрмитовы операторы в смысле стандартного скалярного произведения $\int a^* b\, d\boldsymbol{\xi}$. В силу уравнения (6) плотность поглощенной мощности можно представить как

$$\frac{\partial \Pi_\tau}{\partial \tau} = -2k_0 \int u^* \hat{H}_A[u] d\boldsymbol{\xi}. \quad (10)$$

Как и ожидалось, антиэрмитова часть эволюционного оператора $\mathrm{i}\hat{H}_A$ ответственна за диссипацию или усиление волнового поля. В частности, в бездиссипативной среде, описываемой эрмитовым эволюционным оператором, поток энергии Π_τ вдоль оси τ сохраняется в силу уравнения (6).

Представление операторов. Основная сложность при практическом использовании уравнения (6) состоит в неопределенности вида оператора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, необходимого для получения оператора $\hat{H}$. В общем случае оператор $\hat{\varepsilon}$ удобно ввести в виде [16]

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \sum_{m,n} \frac{1}{n!m!}\left(\frac{\partial^{m+n}\varepsilon_{ij}}{\partial\boldsymbol{\xi}^m \partial\mathbf{q}^n}\right) \frac{\boldsymbol{\xi}^m \hat{\mathbf{q}}^n + \hat{\mathbf{q}}^n \boldsymbol{\xi}^m}{2}, \quad (11)$$

где $\varepsilon_{ij}(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})$ – заданное матричное ядро, порождающее линейный оператор. Для такого представления оператора эрмитова матрица ε_{ij} всегда порождает эрмитов оператор $\hat{\varepsilon}$, а антиэрмитова матрица – антиэрмитов оператор. Это нетривиальное свойство позволяет ввести диэлектрический отклик неоднородной среды, совместимый с законом сохранения энергии. Ядро оператора $\varepsilon_{ij} = \sum \varepsilon_{ij}^{(n)}$ представляет собой сумму поправок к тензору диэлектрической проницаемости по степеням характерного масштаба l неоднородности среды: $\varepsilon_{ij}^{(n)} \propto (k_0 l)^{-n}$. В плавно неоднородных средах $k_0 l \gg 1$, поэтому, как правило, можно ограничиться только нулевым членом, то есть выражением диэлектрической проницаемости, полученным в "локально однородном" приближении.

Мы можем применить разложение, аналогичное (11), и непосредственно для оператора $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \sum_{m,n} \frac{1}{n!m!}\left(\frac{\partial^{m+n} H}{\partial\boldsymbol{\xi}^m \partial\mathbf{q}^n}\right) \frac{\boldsymbol{\xi}^m \hat{\mathbf{q}}^n + \hat{\mathbf{q}}^n \boldsymbol{\xi}^m}{2}.$$

Выразим операцию дифференцирования по пространственным переменным через интеграл Фурье, после чего в правой части получаются ряды Тэйлора, которые удается просуммировать в явном виде:

$$\hat{H}[u] = \iint \frac{H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q}) + H(\tau, \boldsymbol{\xi}', \mathbf{q})}{2} \times \\ \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}')} u(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2}. \quad (12)$$

Таким образом, оператор $\hat{H}$ порождается скалярной функцией $H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})$, причем в качестве нулевого приближения напрашивается решение $p_\tau(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})$ локально однородной задачи. Отметим, что это представление автоматически порождает эрмитовы операторы для действительных $H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})$ и антиэрмитовы операторы для чисто мнимых $H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})$.

Важным свойством представления (12) является возможность написать приближенное решение уравнения (6) в виде операторной экспоненты. Действительно, нам требуется приближенное решение за малый, но конечный шаг расчета Δ, которое удовлетворяет уравнению (6) при малых $\Delta \to 0$ и совпадает с точным решением в однородной среде:

$$u(\tau + \Delta, \boldsymbol{\xi}) = \iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \Delta H(\mathbf{q}) + \mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')} u(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2}. \tag{13}$$

Наиболее простым видом приближенного решения, удовлетворяющего этим требованиям, является обобщение (13) на плавнонеоднородные среды:

$$u(\tau + \Delta, \boldsymbol{\xi}) \approx \hat{S}_H[u],$$

где

$$\hat{S}_H[u] \equiv \iint \exp\left(\mathrm{i}k_0 \Delta \frac{H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q}) + H(\tau, \boldsymbol{\xi}', \mathbf{q})}{2}\right) \times \\ \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')} u(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2}. \tag{14}$$

По форме такой вид приближенного решения совпадает с операторной экспонентой [13, 17], и имеет те же достоинства и недостатки.

Для вычисления оператора вида (14) существует эффективная численная процедура, требующая не более N^2 операций для N ячеек сетки по координате $\boldsymbol{\xi}$. При этом шаг расчета Δ не имеет формальных ограничений со стороны числа точек по эволюционной координате, в отличие от традиционных конечно-разностных методов [18]. Шаг расчета ограничен лишь величиной коммутатора

$$\Delta \ll \frac{1}{k_0 \Pi_\tau} \int \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_i}[\xi_i u] - \xi_i \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_i}[u] \right|^2 d\boldsymbol{\xi}. \tag{15}$$

С другой стороны, метод операторной экспоненты строго обоснован только для сред без диссипации, заданных эрмитовым эволюционным оператором и сохраняющим интеграл (8). В неоднородных диссипативных средах с пространственной дисперсией формула (14) может дать решение с экспоненциально растущей энергией даже для случая диссипации в рамках геометрооптического приближения (т.е. при $\mathcal{I}\mathrm{m}\, H > 0$). Формальная причина заключается в том, что “диссипативное” слагаемое $\hat{H}_A$ в (9), отвечающее “диссипативному” ядру $\mathcal{I}\mathrm{m}\, H > 0$ после применения процедуры (12), может иметь отрицательные собственные значения. Преобразование (12) гарантирует только действительность всех собственных значений, но не их знакоопределенность.

По сути это известная проблема правильной аппроксимации среды для физически корректного описания поглощения энергии волнового пучка [19]. Ошибки в аппроксимации эрмитовой части при нарушении условия (15) лишь возмутят фазовый профиль волнового пучка, а их влияние будет заметно на трассах, больших дифракционной длины. Систематические ошибки в аппроксимации антиэрмитовой части влияют непосредственно на амплитуду пучка. В результате приближенное решение может, например, экспоненциально быстро увеличивать энергию пучка. Особенно эта проблема актуальна для СВЧ пучков электрон-циклотронного диапазона частот, когда диссипация нарастает резко как в координатном пространстве, так и в пространстве волновых векторов.

Простейшая корректная аппроксимация, гарантирующая знакоопределенность собственных чисел антиэрмитовой части оператора $\hat{H}_A$, состоит в использовании модельного оператора, представимого в виде квадрата некоторого другого эрмитового оператора. Определим $\hat{H}_A = \hat{G}\hat{G}$, где оператор $\hat{G}$ строится аналогично (12),

$$\hat{G}[u] = \iint \frac{G(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q}) + G(\tau, \boldsymbol{\xi}', \mathbf{q})}{2} \times \\ \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')} u(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2},$$

но с ядром $G = \sqrt{\mathcal{I}\mathrm{m} H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})}$.

Для иллюстрации метода рассмотрим оператор

$$\hat{H}_A = -\left(x^2 \partial_{xx} + 2x\partial_x + 1\right),$$

отвечающий ядру $H = \mathrm{i}\, k_0^2 x^2 p_x^2$ с положительно определенной мнимой частью. Из интуитивных представлений этот оператор должен описывать диссипативную среду. Однако нетрудно убедиться, что соответствующее этому оператору изменение полного потока энергии (10) не является знакоопределенным:

$$\frac{\partial \Pi_\tau}{\partial \tau} = -2k_0 \int \left(|x\partial_x u|^2 - |u|^2\right) dx.$$

Например, правая часть всегда положительна для гауссова волнового пучка $u \propto \mathrm{e}^{-x^2/w^2}$ независимо от его ширины. С другой стороны, если мы применим предложенную выше процедуру для ядра $G = k_0 x p_x$, то получим

$$\hat{G} = \mathrm{i}\left(x\partial_x + \frac{1}{2}\right), \quad \hat{H}_A = -\left(x^2\partial_{xx} + 2x\partial_x + \frac{1}{4}\right).$$

Изменение полного потока энергии для такого оператора становится знакоопределенным и соответствующим диссипации

$$\frac{\partial \Pi_\tau}{\partial \tau} = -2k_0 \int \left| x\partial_x u + \frac{1}{2}u \right|^2 dx.$$

Решение квазиоптического уравнения. Итак, при использовании модифицированного представления для диссипативной части квазиоптическое уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \mathrm{i}k_0 \hat{H}_H[u] - k_0 \hat{G}\hat{G}[u]. \tag{16}$$

Для построения численного алгоритма решения этого уравнения воспользуемся "split-step" методом, заключающемся в последовательном учете эрмитова $\hat{H}_H[u]$ и антиэрмитова $\mathrm{i}\hat{G}\hat{G}[u]$ слагаемых

$$u(\tau + \Delta, \boldsymbol{\xi}) \approx \hat{S}_{\mathrm{i}GG}\hat{S}_H[u],$$

где $\hat{S}$ определяется операторной экспонентой (14).

Как уже отмечалось, вычисление операторной экспоненты $\hat{S}_H$ от действительной части H не вызывает трудностей. Однако прямое вычисление экспоненты $\hat{S}_{\mathrm{i}GG}$ от матрицы $\mathrm{i}\hat{G}\hat{G}$ оказывается весьма ресурсоемким. Использование методов Адамса, Рунге–Кутта и подобных проблематично, т.к. оператор $\hat{G}$ может иметь большие собственные значения, соответствующие быстро затухающим модам. Это приводит к необходимости уменьшать шаг расчета Δ для обеспечения устойчивости метода. С другой стороны, такие быстро затухающие моды не представляют физического интереса, т.к. они соответствуют нераспространяющимся волнам. Это обстоятельство позволяет заменить операторную экспоненту $\hat{S}_{\mathrm{i}GG}$ на некоторый приближенный оператор $\hat{D}$, который должен правильно описывать слабозатухающие моды и обеспечивать при этом экспоненциальное затухание при больших собственных числах.

Для выполнения первого условия потребуем, чтобы оба оператора имели одинаковые асимптотики при $\Delta \to 0$:

$$\hat{S}_{\mathrm{i}GG} \approx \hat{D} = \hat{1} - k_0\Delta\hat{G}\hat{G} + O(\Delta^2).$$

Чтобы обеспечить второе требование, достаточно "обрезать" ядро оператора $\hat{D}$ при больших Δ. Одним из простейших операторов, удовлетворяющих указанным условиям, является $\hat{D} = \hat{1} - \hat{T}\hat{T}$, где оператор $\hat{T}$ строится аналогично (12), но с ядром

$$T(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q}) = \phi(\sqrt{k_0\Delta}\ G(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})),$$

где $\phi(x)$ – любая "регулярная" функция, удовлетворяющая условиям $\phi(x) \to x$ при $x \to 0$, $\phi(x) \to 1$ при $x \to \infty$ и $\phi''(0) = 0$; мы используем $\phi = \tanh(x)$. Вычисление оператора $\hat{D}$ сводится к последовательному двукратному применению преобразования Фурье к факторизованному ядру, поэтому вычислительная сложность этого оператора с точностью до фактора 2 такая же, как для операторной экспоненты (14).

Таким образом, для квазиоптического уравнения (16) удается построить явную схему для шага по эволюционной координате, $u(\tau + \Delta, \boldsymbol{\xi}) \approx \hat{D}\hat{S}_H[u(\tau, \boldsymbol{\xi})]$, обеспечивающую устойчивое решение. В явном виде

$$\begin{gathered}
S(\boldsymbol{\xi}) = \exp\left(\mathrm{i}\, k_0 \Delta \mathcal{R}\mathrm{e}\, H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})/2\right), \\
T(\boldsymbol{\xi}) = \tanh\sqrt{k_0 \Delta \mathcal{I}\mathrm{m}\, H(\tau, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{q})}, \\
u_1 = \int S(\boldsymbol{\xi}) S(\boldsymbol{\xi}')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')}\, u(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2}, \\
u_2 = \int \frac{T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\xi}')}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')}\, u_1(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2}, \\
u_3 = \int \frac{T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\xi}')}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')}\, u_2(\tau, \boldsymbol{\xi}') \frac{d\boldsymbol{\xi}' d\mathbf{q}}{(2\pi/k_0)^2}, \\
u(\tau + \Delta, \boldsymbol{\xi}) = u_1 - u_3.
\end{gathered}$$

Пример: среда с неоднородной дисперсией поглощения. На рис. 1 приведен пример расчета модельной задачи, наглядно иллюстрирующей физические эффекты, которые в предлагаемом подходе удается описать, а в геометрооптическом и безаберрационном приближении – нет. Рассматривается плоскослоистая среда, заданная эволюционным оператором с ядром

$$H = -q^2/2 + \mathrm{i}\gamma q^2 \exp(-\xi^2/l^2).$$

Действительная часть отвечает за дифракцию в параксиальном приближении, мнимая часть задает неоднородную по поперечной координате диссипацию, которая также зависит от поперечного волнового числа. Волновой пучок распространяется в направлении τ, вдоль которого среда однородна. Похожая задача возникает, например, при моделировании СВЧ нагрева плазмы в окрестности второй циклотронной гармоники в центральной части прямой магнитной ловушки, волнами, распространяющимися вдоль оси ловушки.

В рассматриваемой среде в рамках геометрической оптики для параллельно распространяющихся

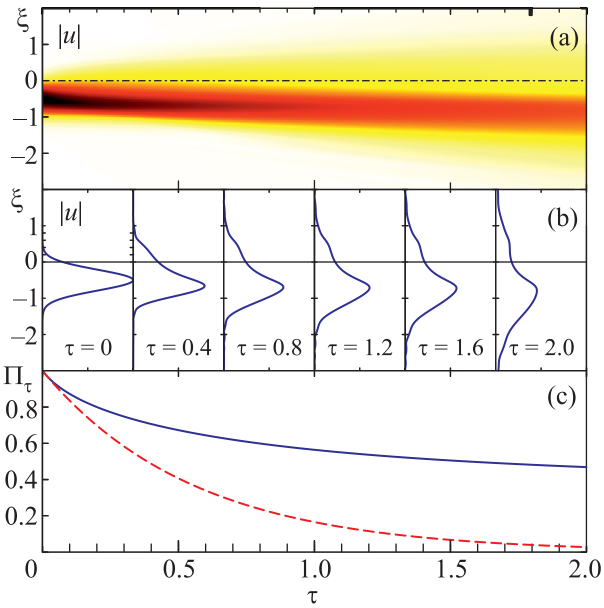

Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция амплитуды (a, b) и полного потока энергии (c) волнового пучка в среде, заданной гамильтонианом $H = -q^2/2 + 5iq^2 \exp[-6\xi^2]$. Начальное распределение амплитуды $u(0,\xi) = \exp[-6(\xi+0.5)^2]$, $k_0 = 10$. Горизонтальные линии на рисунках (a) и (b) отмечают положение максимума поглощения. Сплошной линией на рис. c показано квазиоптическое решение, пунктирной линией – решение в рамках безаберрационного приближения

лучей с $q = 0$ поглощение отсутствует. При использовании безаберрационного приближения, в котором поперечное распределение поля во всех сечениях τ жестко фиксировано в виде гауссова пучка [4, 5], интенсивность пучка будет экспоненциально убывать до нуля, поскольку заметная часть гауссова пучка всегда попадает в область диссипации. На самом деле неоднородность диссипации в сочетании с пространственной дисперсией приводит к экспоненциальному поглощению лишь до тех пор, пока в области диссипации не образуется “плато” в распределении поля, соответствующее $\partial u/\partial\xi \propto q \to 0$ (см. рис. 1). После формирования плато убывание полного потока энергии в пучке замедлится, поскольку диссипация будет происходить только за счет дифракционного затекания энергии в область поглощения. Кроме того, пространственная неоднородность поглощения приведет к отклонению центра масс пучка от области сильной диссипации. При этом профиль волнового пучка, очевидно, не может быть описан в безаберрационном приближении. Индуцированные диссипацией аберрации, в свою очередь, модифицируют характер поглощения пучка.

Заключение. Развитая в работе техника была использована для создания квазиоптического кода *QOOT*, описывающего распространение и поглощение квазиоптических СВЧ пучков в прямой магнитной ловушке. Недавно код был применен для моделирования резонансного электрон-циклотронного нагрева плазмы в крупномасштабной газодинамической ловушке ГДЛ в ИЯФ СО РАН [20, 21]. Показано, что в условиях большой установки с плотной горячей плазмой квазиоптические эффекты неоднородной диссипации могут и должны учитываться в будущих оптимизированных сценариях ЭЦР нагрева. Более подробно это описано в [22].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ # 15-02-07600-а.

---

1. Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика в неоднородных средах*, Наука, М. (1980).
2. D. Farina, Fusion Sci. Technol. **52**, 154 (2007).
3. R. Prater, D. Farina, Yu. Gribov, R.W. Harvey, A.K. Ram, Y.-R. Lin-Liu, E. Poli, A.P. Smirnov, F. Volpe, E. Westerhof, A. Zvonkov, and the ITPA Steady State Operation Topical Group, Nucl. Fusion **48**, 035006 (2008).
4. G. V. Pereverzev, Phys. Plasmas, **5**, 3529 (1998).
5. A. A. Balakin, M. A. Balakina, A. I. Smirnov, and G. V. Permitin, J. of Physics D **40**, 4285 (2007).
6. O. Maj, A. A. Balakin, and E. Poli, Plasma Phys. Controll. Fusion **52**, 085006 (2010).
7. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, М. (1990).
8. В. И. Таланов, С. Н. Власов, *Самофокусировка волн*, ИПФ РАН, Н. Новгород (1997).
9. Г. В. Пермитин, А. И. Смирнов, ЖЭТФ **109**, 736 (1996).
10. А. А. Балакин, М. А. Балакина, А. И. Смирнов, Г. В. Пермитин, Физика плазмы **33**, 337 (2007).
11. А. А. Балакин, Радиофизика **55**, 521 (2012).
12. А. А. Балакин, Радиофизика **55**, 594 (2012).
13. A. A. Balakin, M. A. Balakina, and E. Westerhof, Nuclear Fusion **48**, 065003 (2008).
14. N. Bertelli, A. A. Balakin, E. Westerhof, and M. N. Buyanova, Nucl. Fusion **50**, 115008 (2010).
15. E. Poli, A. G. Peeters, and G. V. Pereverzev, Comp. Phys. Comm. **136**, 90, (2001).
16. A. A. Balakin and E. D. Gospodchikov, J. Phys. B **48**, 215701 (2015).
17. G. M. Fraiman, E. M. Sher, A. D. Yunakovsky, and W. Laedke, Physica D **87**, 325 (1995).
18. А. А. Самарский, *Введение в численные методы*, Лань, С.-Петербург (2009).
19. А. А. Балакин, М. А. Балакина, А. И. Смирнов, Г. В. Пермитин, Физика плазмы **34**, 533 (2008).

20. P. A. Bagryansky, A. G. Shalashov, E. D. Gospodchikov, A. A. Lizunov, V. V. Maximov, V. V. Prikhodko, E. I. Soldatkina, A. L. Solomakhin, and D. V. Yakovlev, Phys. Rev. Lett. **114** (20), 205001 (2015).
21. P. A. Bagryansky, A. V. Anikeev, G. G. Denisov et al. (Collaboration), Nucl. Fusion **55** (5), 053009 (2015).
22. A. G. Shalashov, A. A. Balakin, E. D. Gospodchikov et al. (Collaboration), *Quasi-optical theory of microwave plasma heating in open magnetic trap*, arXiv preprint, arXiv:1608.07273, 2016.