Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 11, с. 806 – 812

Осцилляции Ааронова–Бома, обусловленные нетопологическими поверхностными состояниями в дираковских нанопроволоках[1)]

В. В. Еналдиев[+ 2)], *В. А. Волков*[+* 2)]

[+]*Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия*

[*] *Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 5 октября 2016 г.
После переработки 20 октября 2016 г.

Эффект Ааронова–Бома в магнитопроводимости нанопроволок, изготовленных из топологических изоляторов, является ярким проявлением существования топологических поверхностных состояний. В настоящей работе показано, что поверхностные состояния в нанопроволоках из дираковских материалов (висмут, висмут сурьма и сплавы $Pb_{1-x}Sn_xSe$), находящихся в нетопологической фазе, также приводят к эффекту Ааронова–Бома, который проявляется как поправка к магнитопроводимости объемных состояний. Цилиндрическая нанопроволока описывается трехмерным уравнением Дирака с граничным условием, инвариантным по отношению к инверсии времени. Граничное условие задается одним феноменологическим параметром, знак которого разделяет поверхностные состояния на нетопологические и состояния топологичекого типа. Нетопологические состояния возникают вне запрещенной зоны. В продольном магнитном поле они дают поправку ааронов–бомовского типа к плотности состояний и, соответственно, проводимости нанопроволоки. С ростом магнитного поля фаза осцилляций изменяется от π до 2π.

DOI: 10.7868/S0370274X16230089

1. Введение. Энергетические спектры электронов и дырок в дираковских материалах описываются стандартным или модифицированным уравнением Дирака (см., например, обзор [1]). Недавно появившаяся топологическая классификация объемной зонной структуры кристаллов [2, 3] привлекла дополнительное внимание к таким дираковским материалам как висмут, висмут сурьма, и сплавы $Pb_{1-x}Sn_xSe$. При определенном составе сурьмы сплав $Bi_{1-x}Sb_x$ становится топологическим изолятором (ТИ), хотя чистый висмут таковым не является [4–7]. При определенном содержании олова сплавы $Pb_{1-x}Sn_xSe$ становятся топологическими кристаллическими изоляторами (ТКИ). Поверхностные состояния (ПС) в ТИ и ТКИ защищены соответственно симметрией по отношению к инверсии времени и зеркальной симметрией. Топологические ПС приводят к появлению эффекта Ааронова–Бома в магнитопроводимости нанопроволоки. В настоящей работе мы покажем, что эффект Ааронова–Бома может также существовать в нетопологической фазе дираковских материалов.

Сплав $Pb_{1-x}Sn_xSe$ имеет кристаллическую решетку каменной соли с четырьмя неэквивалентными L-долинами в обратной решетке. Висмут-сурьма имеет похожую кристаллическую структуру с дополнительным сдвигом вдоль пространственной диагонали куба, что уменьшает количество L-долин до трех. В L-точках зоны Бриллюэна в окрестности уровня Ферми оба материала имеют две близко лежащие зоны, вырожденные по спину [8, 9]. Поэтому для их описания минимальный $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-гамильтониан должен содержать две взаимодействующие зоны. Это приводит к трехмерному анизотропному уравнению Дирака, которое описывает динамику фермионов в $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-приближении. В данной работе мы будем использовать упрощенную изотропную версию уравнения Дирака:

$$\{m\tau_z\otimes\sigma_0 + c\tau_x\otimes(\sigma\mathbf{k})\}\,\Psi = E\Psi, \qquad (1)$$

здесь $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – трехмерный квазиимпульс, $2m$ – величина запрещенной зоны в L-точке, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ и $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ – векторы матриц Паули, действующие в спиновом и зонном пространствах соответственно, σ_0, τ_0 – единичные матрицы 2×2, c – эффективная скорость света, $\Psi = (\Psi_c, \Psi_v)$ – четырех-компонентная огибающая функция, Ψ_c, Ψ_v – спиноры, описывающие валент-

[1)] См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru.

[2)] e-mail: vova.enaldiev@gmail.com; volkov.v.a@gmail.com ную зону и зону проводимости, соответственно. В Приложении (см. дополнительные материалы) приводится детальный вывод $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-гамильтониана для $Bi_{1-x}Sb_x$ и $Pb_{1-x}Sn_xSe$, который имеет вид гамильтониана из левой части уравнения (1) с анизотропными граничными условиями.

Исследование ПС для уравнения Дирака (1) имеет довольно долгую историю. Сначала Джакив и Ребби [10] показали, что одномерная версия уравнение Дирака имеет двукратно вырожденные связанные состояния с нулевой энергией при условии изменения знака массы m с разных сторон интерфейса. Позже было показано [11], что интерфейсные состояния с двумерным вейлевским спектром должны возникать в переходах на основе сплава $Pb_{1-x}Sn_xSe$, так как изменение состава приводит в изменению знака массового члена. Зависимость массового члена от координаты использовалась для феноменологического описания поверхности ТИ [12] и ТКИ [13].

Другой подход к проблеме ПС для уравнения Дирака (1) состоит в выводе граничного условия для четырехкомпонентной волновой функции Ψ на поверхности кристалла. Впервые это было сделано в [14] до знаменитой работы [11], однако, первая работа не вызвала интереса. В ней граничное условие (ГУ) выводится из эрмитовости гамильтониана Дирака в ограниченной области и инвариантности задачи по отношению к инверсии времени. Полученное ГУ имеет вид

$$(\sigma_0\Psi_v - ia_0\sigma\mathbf{n}\Psi_c)_{\mathbf{r}\in S} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(S)$ – внутренняя нормаль к поверхности S, a_0 – действительный феноменологический параметр, который характеризует атомную структуру поверхности и свойства зон бесконечного кристалла. Позднее в работе [15] было показано, что для моделирования ГУ (2) необходимо рассматривать не только изменение массового члена, но и дополнительный электрический потенциал, отвечающий за сродство контактирующих материалов.

Для некоторых ориентаций поверхности мы можем дополнительно потребовать инвариантности ГУ (2) относительно зеркальной симметрии, если не происходит реконструкция поверхности [16]. Например, в L-долине по направлению [111] в структуре каменной соли, в системе координат $z||[111]$, $y||[1\bar{1}0]$, $x||[\bar{1}\bar{1}2]$, xz – плоскость зеркальной симметрии. Если нормаль к поверхности кристалла лежит в xz-плоскости (т.е. $\mathbf{n} = (n_x, 0, n_z)$), тогда инвариантность ГУ (2) относительно зеркальной симметрии приводит к условию

$$M_y\hat{\Gamma}\Psi\Big|_S = D(M_y)\hat{\Gamma}D^{-1}(M_y)D(M_y)\Psi\Big|_S = = -\hat{\Gamma}\widetilde{\Psi}\Big|_S = 0, \tag{3}$$

здесь M_y – оператор зеркальной симметрии, представляющийся матрицей $D(M_y) = -i\tau_z \otimes \sigma_y$, $\widetilde{\Psi} = D(M_y)\Psi(x, -y, z)$, оператор ГУ

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} -ia_0\,(n_x\sigma_x + n_z\sigma_z) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Сравнивая (3), (4) с ГУ (2), можно увидеть, что зеркальная симметрия не накладывает никаких ограничений на значения параметра a_0. Однако для сплава висмут-сурьма это не так (см. Доп.материалы).

На полупространстве $z \geq 0$ уравнение (1) с ГУ (2) приводят к появлению двумерных безмассовых ПС с коническим спектром [14] (см. вставки на рис. 1)

$$E = sv|\mathbf{k}_{||}| + E_0, \quad \frac{vm}{c^2\hbar} - s\frac{E_0}{m}|\mathbf{k}_{||}| \geq 0, \tag{5}$$

где $v = 2a_0c/(1 + a_0^2)$ – скорость ПС, $\mathbf{k}_{||} = (k_x, k_y, 0)$, $E_0 = m(1 - a_0^2)/(1 + a_0^2)$ – энергия точки Дирака, $s = \pm 1$ – собственные значения оператора киральности $\tau_z \otimes (\sigma, [\mathbf{n}, \mathbf{p}])$. Знак параметра a_0 описывает два качественно различных случая: (i) при $a_0 \geq 0$ ПС находятся в щели (красные линии на вставке к рис. 1b, (ii) при $a_0 \leq 0$ ПС находятся вне запрещенной зоны (красные линии на вставке к рис. 1a). Следовательно, при помощи ГУ (2) можно феноменологически описывать два типа ПС в сплавах $Pb_{1-x}Sn_xSe$, существующих в случае прямого или инвертированного порядков зон [16, 17].

Цель нашей работы состоит в изучении нетопологических ПС и, для сравнения, ПС топологического типа и выявлении их вклада в осцилляции Ааронова–Бома в проводимости нанопроволоки. Мы будем предполагать, что параметр a_0 постоянен на поверхности проволоки. Аналогичный подход использовался для объяснения появления и проводящей природы краевых состояний, вращающихся вокруг наноотверстия в графене [18]. Кроме того, мы вычислим вклад ПС в магнитопроводимость, что актуально в связи с недавними экспериментальными работами по магнитосопротивлению нанопроволок висмута [19, 20] и $Pb_{1-x}Sn_xSe$ [21].

Работа построена следующим образом. Сначала вычисляются спектры электронов в нанопроволоке без магнитного поля. Затем включается продольное магнитное поле и вычисляется спектр ПС и их вклад в магнитопроводимость.

2. Спектр дираковских фермионов в нанопроволоке. Рассмотрим цилиндрическую нанопро-

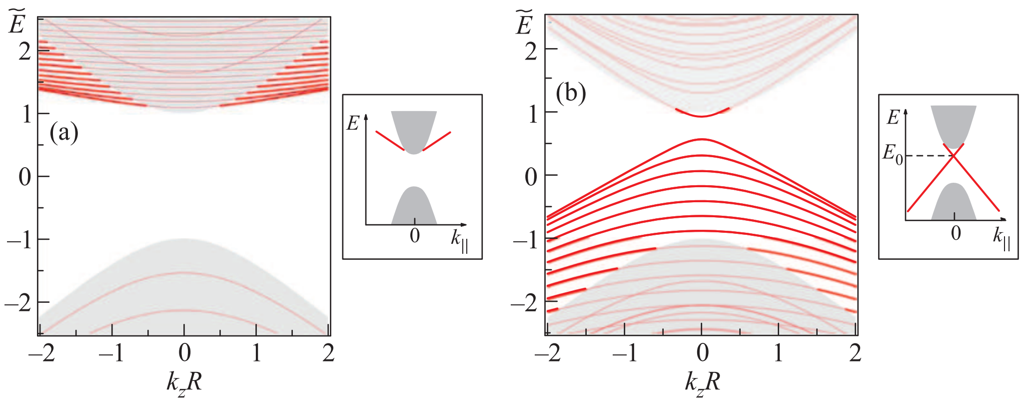

Рис. 1. (Цветной онлайн) Спектр подзон ($\widetilde{E} = ER/\hbar c$) дираковских фермионов в нанопроволоке для двух типов значений граничного параметра a_0: (a) – при $a_0 = -0.1$ и $mR/\hbar c = 2$, (b) – $a_0 = 0.4$ и $mR/\hbar c = 3$. Жирными красными кривыми выделены спектры поверхностных подзон нетопологического (a) и топологического (b) типов. Спектры ПС для полупространства показаны на вставках [14]. Серым цветом закрашена область размерно-квантованных состояний. Все подзоны двукратно вырождены по знаку j

волоку радиуса R. Мы выберем ось z вдоль оси нанопроволоки. Спиноры Ψ_c, Ψ_v подчиняются уравнению Дирака (1) и удовлетворяют ГУ (2) с постоянным значением параметра a_0 на цилиндрической поверхности. Мы положим $\hbar = c = 1$ повсюду, кроме тех случаев, где они необходимы. Цилиндрическая симметрия уравнения Дирака (1) с ГУ (2) подразумевает сохранение продольного квазиимпульса k_z и полного углового момента $J_z = \sigma_0 \otimes j_z$, обладающего собственными значениями $j = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$, где $j_z = \sigma_0(-i\partial_\theta) + \sigma_z/2$. Следовательно, мы можем искать Ψ_c в следующем виде:

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} \psi_{c1}(r)e^{i(j-1/2)\theta} \\ \psi_{c2}(r)e^{i(j+1/2)\theta} \end{pmatrix} e^{ik_z z}. \tag{6}$$

Используя уравнение Дирака (1), удобно выразить Ψ_v через Ψ_c. Радиальные волновые функции $\psi_{c1}(r), \psi_{c2}(r)$ подчиняются уравнению

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{(j \mp 1/2)^2}{r^2}\right)\psi_{c1,c2} = \\ = \left(E^2 - m^2 - k_z^2\right)\psi_{c1,c2}, \tag{7}$$

и ГУ

$$\begin{pmatrix} i\left(\partial_r - \frac{j-1/2}{R} - a_0(E+m)\right) & k_z \\ -k_z & i\left(\partial_r + \frac{j+1/2}{R} - a_0(E+m)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{c1}(r) \\ \psi_{c2}(r) \end{pmatrix}\Bigg|_{r=R} = 0. \tag{8}$$

Следовательно $\psi_{c1,c2}(r) = C_{1,2} J_{j\mp 1/2}(kr)$, где $k = \sqrt{E^2 - m^2 - k_z^2}$, $J_{j\mp 1/2}(kr)$ – функции Бесселя 1-го рода, C_1, C_2 – произвольные постоянные; ГУ (8) налагают связь на постоянные C_1, C_2 и приводят к дисперсионному уравнению

$$k\left[\frac{J_{j-1/2}(kR)}{J_{j+1/2}(kR)} - \frac{J_{j+1/2}(kR)}{J_{j-1/2}(kR)}\right] = \\ = \left(a_0 - \frac{1}{a_0}\right)E + m\left(a_0 + \frac{1}{a_0}\right). \tag{9}$$

Поверхностные состояния соответствуют мнимым значениям k, в то время как действительные значения k описывают размерно-квантованные состояния. Благодаря свойству симметрии дисперсионного уравнения (9) $a_0 \to 1/a_0, E \to -E$, нам достаточно рассмотреть случай $|a_0| \leq 1$. Кроме того, дисперсионное уравнение не зависит от знака j, что следует из свойства функций Бесселя целого индекса $J_{-j\mp 1/2}(x) = (-1)^{j\pm 1/2} J_{j\pm 1/2}(x)$. Последнее отражает аксиальную симметрию нанопроволоки. Поэтому все одномерные подзоны вырождены двукратно по знаку j. Результат качественного графического решения дисперсионного уравнения (9) представлен на рис. 1. При $|k_z| \to \infty$ энергии размерно-квантованных состояний стремятся к $E = \pm\hbar c\sqrt{m^2/\hbar^2 c^2 + k_z^2 + \gamma_{j\pm 1/2,n}^2/R^2}$, где $\gamma_{j\pm 1/2,n}$ – n-ый нуль функции Бесселя 1-го рода $J_{j\pm 1/2}$. При $a_0 > 0$ ПС приобретают массу, равную $\hbar v|j|/R$ в пределе толстых проволок ($|a_0|mR/\hbar c \gg 1$). Энергетический спектр ПС имеет асимптоты

$$E = sv\hbar\sqrt{k_z^2 + \frac{j^2}{R^2}} + E_0, \\ \kappa = \frac{vm}{c^2\hbar} - s\frac{E_0}{m}\sqrt{k_z^2 + \frac{j^2}{R^2}} \geq 0, \tag{10}$$

когда длина спадания радиальной части волновой функции κ^{-1} много меньше радиуса проволоки R ($\kappa R \gg j^2$). Чем ближе энергии ПС к области размерно-квантованных состояний (эта область выделена серым цветом на рис. 1), тем менее прижата волновая функция ПС к поверхности нанопроволоки.

3. Дираковские фермионы в нанопроволоке в продольном магнитном поле: спектр и проводимость. Продольное магнитное поле $\mathbf{B} = (0,0,B)$ включается в уравнение Дирака при помощи подстановки Пайерлса $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ (e – заряд электрона). В нанопроволоке удобно пользоваться цилиндрической калибровкой вектор-потенциала $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$. Далее для определенности мы рассмотрим случай $B > 0$. Радиальные части ψ_{c1}, ψ_{c2} спинора Ψ_c подчиняются следующему уравнению

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{(j \mp 1/2)^2}{r^2} + \frac{j \pm 1/2}{\lambda^2} + \frac{r^2}{4\lambda^4}\right) \times \\ \times \psi_{c1,c2} = (E^2 - m^2 - k_z^2)\psi_{c1,c2}, \tag{11}$$

где $\lambda^2 = 1/eB$ – квадрат магнитной длины. Нормируемые решения радиальных уравнений (11) выражаются через функции Куммера $M(\alpha, \beta, \xi)$ [22]. При $B > 0$ нас интересуют спектры ПС для $j \leq -1/2$. Дисперсионное уравнение при отрицательных значениях j записывается следующим образом (см. Дополнительные материалы):

$$\left[2(j-1/2) - a_0 R(E+m)\widetilde{M}\right] \times \\ \times \left[\frac{R^2k^2}{2(j-1/2)} + \frac{a_0 R(E+m)}{\widetilde{M}}\right] + k_z^2 R^2 = 0. \tag{12}$$

где

$$\widetilde{M} = \frac{M(1-\lambda^2k^2/2, -j+3/2, R^2/2\lambda^2)}{M(-\lambda^2k^2/2, -j+1/2, R^2/2\lambda^2)}. \tag{13}$$

Численное решение уравнения (12) дает энергетический спектр дираковских фермионов в нанопроволоке в продольном магнитном поле (см. рис. 2). В двух предельных случаях закон дисперсии ПС имеет вид (см. Дополнительные материалы):

$$E_{k_z js} = sv\hbar\sqrt{k_z^2 + \frac{(j + \Phi - \gamma_B)^2}{R^2}} + E_0, \tag{14}$$

где $\Phi = \pi eBR^2/hc$ – количество квантов магнитного потока, проходящих через сечение проволоки, $\gamma_B = 0$ в квазиклассическом пределе $|\kappa R/j| \gg \max(|j|, \Phi)$ (слабые магнитные поля и сильная прижатость ПС к поверхности), $\gamma_B = 1/2$ в пределе сильных магнитных полей ($\Phi \gg |j - 1/2|$, $\Phi \gg \lambda^2k^2/2$, последнее условие приводит к $|a_0 + 1/a_0| \gg 1$ в уравнении (14)). При $a_0 > 0$ оба значения $s = \pm 1$ разрешены в (14), и ПС образуются в запрещенной зоне. Это напоминает случай нанопроволоки из топологического изолятора [23–26]. При $a_0 < 0$ разрешено только одно значение s и ПС существуют на фоне подзон Ландау и скачущих орбит (см. рис. 2c).

В достаточно слабых магнитных полях периодически (с единичным периодом) возникают бесщелевые поверхностные подзоны при полуцелых значениях $j_0 \equiv -\Phi$. При дальнейшем увеличении магнитного поля, когда магнитная длина сравнивается с длиной спадания ПС κ^{-1}, период появления бесщелевых подзон начинает слабо зависеть от величины магнитного поля B. Вдали от точки Дирака $(E - E_0)R/\hbar v \equiv pR \gg 1$ плотность ПС со спектром (14) выражается формулой (см. Дополнительные материалы):

$$\rho(E) = \rho_0 \left(1 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} S(E)\right) \times \\ \times \Theta\left[(E - E_0)\,\mathrm{sgn}(a_0(a_0^2 - 1)) + \hbar v k_e\right], \tag{15}$$

где $\Theta[...]$ – функция Хевисайда, она определяет область энергий, в которой существуют ПС (при $0 < a_0 \leq 1$ область энергий $E < E_0 + \hbar v k_e$, при $a_0 > 1$ область энергий $E > E_0 - \hbar v k_e$, при $-1 < a_0 < 0$ область энергий $E > E_0 - \hbar v k_e$, и при $a_0 \leq 1$ область энергий $E < E_0 + \hbar v k_e$), $\rho_0 = (E - E_0)/2\pi(\hbar v)^2$ – плотность состояний свободных двумерных безмассовых дираковских фермионов, $k_e = 2|a_0|m/\hbar c|1 - a_0^2|$, S – осциллирующая поправка к плотности состояний ρ_0 за счет периметрического квантования движения ПС:

$$S(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(2\pi pRn - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\pi n\left(\Phi - \frac{1}{2} - \gamma_B\right)\right)}{\sqrt{2\pi pRn}}. \tag{16}$$

Когда энергия в уравнении (16) совпадает с одним из доньев поверхностных подзон, величины $pR \pm (\Phi - 1/2 + \gamma_B)$ стремятся к целым $N_\pm$. В этом случае S (16) можно оценить следующим образом (см. [27]):

$$S(\mu) \approx \frac{\Theta\left(pR \pm \left(\Phi - \frac{1}{2} - \gamma_B\right) - N_\pm\right)}{2\sqrt{2\pi pR\left(pR \pm \left(\Phi - \frac{1}{2} - \gamma_B\right) - N_\pm\right)}}, \tag{17}$$

откуда видно, что S расходится корневым образом, как и должно быть для плотности состояний одномерных подзон.

4. Проводимость поверхностных состояний. В данном разделе мы вычислим электрическую проводимость σ нанопроволоки длиной ℓ в стационарном электрическом поле F. Сначала мы рассмотрим случай $a_0 > 0$, когда уровень Ферми μ нахо-

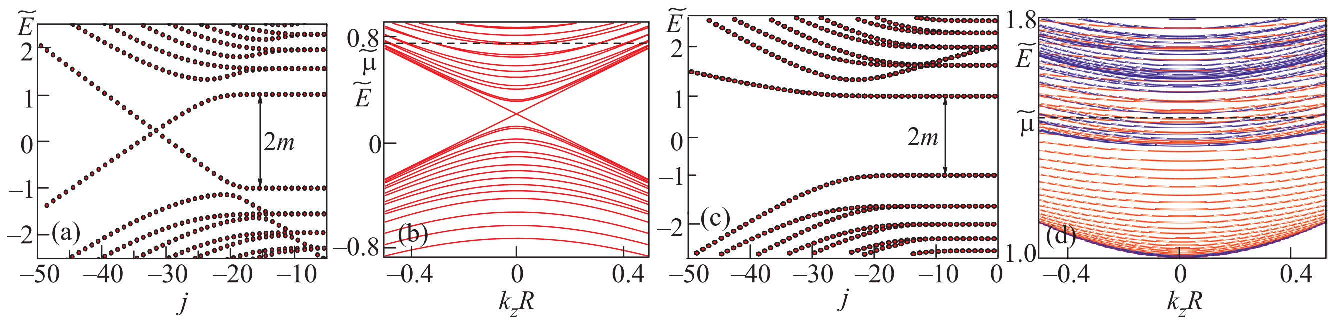

Рис. 2. (Цветной онлайн) Энергетический спектр дираковских фермионов в нанопроволоке в продольном магнитном поле для двух типов значений граничного параметра a_0: (a, c) – обезразмеренные спектры $\widetilde{E} = ER/\hbar c$ одномерных подзон как функции полного углового момента j при $a_0 = 0.8$ (a) и $a_0 = -0.2$ (c). (b, d) – Спектры одномерных подзон при $a_0 = 0.8$, $j = [-29.5, -21.5]$ (b) и $a_0 = -0.2$ $j = [-51.5, -7.5]$ (d). На рис. 2d красные кривые отвечают нетопологическим поверхностным подзонам, синие – подзонам Ландау и скачущих орбит. Для вычислений использовались следующие параметры: $\hbar c/\lambda = 0.896m$, $\Phi/\Phi_0 = 35$. Штрих-пунктирная линия на рис. (b) и (d) обозначает уровень Ферми $\widetilde{\mu}$

дится в запрещенной зоне (см. рис. 2b). При указанных условиях только ПС дают вклад в проводимость при низких температурах. Мы пренебрежем междолинным рассеянием и рассмотрим слабый случайный потенциал примесей в виде $V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ где $u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = U\delta(r-r_i)\delta(\theta-\theta_i)\delta(z-z_i)/r_i$. В расчетах мы будем использовать волновую функцию в квазиклассическом приближении:

$$|j,k_z,s\rangle \approx \tag{18}$$
$$\approx C_{k_zj}\begin{pmatrix} e^{i(j-1/2)\theta} \\ -\dfrac{is}{k_z}\sqrt{k_z^2+\frac{(j+\Phi)^2}{R^2}}e^{i(j+1/2)\theta} \\ \dfrac{sa_0}{k_z}\sqrt{k_z^2+\frac{(j+\Phi)^2}{R^2}}e^{i(j-1/2)\theta} \\ ia_0e^{i(j+1/2)\theta} \end{pmatrix}\frac{e^{\kappa(r-R)+ik_zz}}{\sqrt{2\pi\kappa r}}.$$

В этом разделе мы также предположим, что уровень Ферми μ достаточно удален от E_0 (но, тем не менее, в запрещенной зоне) так, чтобы было заполнено много поверхностных подзон с $s = 1$ ($QR \gg 1$, где $\hbar vQ = \mu - E_0$). В случае слабых примесей, когда характерное время изменения функции распределения электрона намного превышает период осцилляций оператора эволюции ($\sim \hbar/\mu$), достаточно ограничиться τ-приближением в кинетическом уравнении Больцмана. Также будем считать, что одномерная длина локализации намного больше длины нанопроволоки. Последнему условию легко удовлетворить в случае заполнения большого числа поверхностных подзон ($QR \gg 1$). Следовательно, мы можем пренебречь специфическими одномерными локализационными эффектами. В рассматриваемом приближении ток вдоль оси z выражается формулой [28]:

$$j_z = -\frac{g_v e^2 F}{\ell}\sum_{\nu}(v_z)_\nu^2\,\tau_\nu\left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\bigg|_{E=E_\nu}\right), \tag{19}$$

здесь $\nu = \{k_z, j\}$, $(v_z)_\nu$ – диагональный матричный элемент оператора скорости гамильтониана Дирака, g_v – число неэквивалентных L-долин в зоне Бриллюэна, τ_ν – время релаксации фермиона в состоянии $|\nu\rangle$, которое выражается формулой:

$$\tau_\nu^{-1} = \sum_{\nu'} W_{\nu\nu'}\left(1-\frac{(v_z)_{\nu'}}{(v_z)_\nu}\right). \tag{20}$$

В предыдущей формуле вероятность переходов $W_{\nu\nu'}$, усредненная по конфигурациям примесей, выражается формулой:

$$W_{\nu\nu'} = \frac{2\pi}{\hbar}\times$$
$$\times\sum_i\int_0^R\frac{2r_idr_i}{R^2}\left|\langle\nu|u_{\nu-\nu'}(r)e^{i(j-j')\theta+i(k_z-k_z')z}|\nu'\rangle\right|^2\times$$
$$\times\,\delta(E_\nu-E_{\nu'}), \tag{21}$$

здесь мы ввели коэффициент Фурье потенциала примеси $u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$:

$$u_\lambda(r) = \frac{1}{2\pi\ell}\times$$
$$\times\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_0^{2\pi}u(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)e^{-im(\theta-\theta_i)-iq(z-z_i)}dzd\theta =$$
$$= \frac{U}{2\pi\ell r_i}\delta(r-r_i), \quad \lambda = \{m,q\}. \tag{22}$$

Используя формулу суммирования Пуассона, можно получить следующее уравнение для времени релаксации (20) в ведущем порядке по $(pR)^{-1/2}$:

$$\tau_\nu^{-1} = \frac{\pi n_{im}}{\hbar}\frac{U^2\kappa}{R}\rho_0(E_\nu)\frac{\left(2-\sqrt{2}+\frac{\tilde{j}^2}{\sqrt{2}k_z^2R^2}\right)}{\left(1+\frac{\tilde{j}^2}{2k_z^2R^2}\right)}\times$$
$$\times\left[1+\frac{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\tilde{j}^2}{k_z^2R^2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(2-\sqrt{2}+\frac{\tilde{j}^2}{\sqrt{2}k_z^2R^2}\right)}S(E)\right], \qquad (23)$$

где $n_{im} = N/2\pi R\ell$ – двумерная концентрация примесей, $\tilde{j} = j + \Phi - \gamma_B$. Дираковские фермионы, заполняющие ПС, эффективно рассеиваются только теми примесями, которые расположены в слое толщины κ^{-1} у поверхности нанопроволоки. Дополнительный сдвиг фаз в последнем члене формулы (23) отражает фазу Берри ПС. В рассматриваемом случае ($pR \gg 1$) сумма в уравнении (23) является малой осциллирующей поправкой к незаквантованной плотности ПС ρ_0. Именно она приводит к осцилляциям Ааронова–Бома в наблюдаемых величинах. Для получения проводимости нанопроволоки необходимо подставить время релаксации (23) в (19). Опуская громоздкие вычисления, приходим к окончательному результату в ведущем порядке по $(QR)^{-1/2}$:

$$\sigma = \sigma_{2D}2\pi R\left[c_1 - c_2S(\mu)\right], \qquad (24)$$

где $c_1 \approx 0.95$, $c_2 \approx 10.6$ и

$$\sigma_{2D} = \frac{e^2v^2\hbar R}{\pi n_{imp}U^2\kappa} \qquad (25)$$

– стандартная проводимость двумерных безмассовых фермионов, рассеивающихся на короткодействующих примесях при соответствующей замене потенциала $U^2\kappa/R \to u_0^2$ [29]. Ряд в (24) сходится для всех значений магнитного потока Φ, кроме тех случаев, когда уровень Ферми совпадает с дном одной из поверхностных подзон. Как было показано в предыдущем разделе, это происходит, когда $QR \pm (\Phi - 1/2 - \gamma_B)$ равно целому числу. В этом случае приближение времени релаксации неприменимо даже для слабых примесей. Уравнение (24) применимо, когда уровень Ферми достаточно удален от доньев поверхностных подзон, где выполняется условие $S \ll 1$.

Теперь рассмотрим случай $a_0 < 0$. Учитывая переходы только между ПС, можно получить похожий ответ для вклада в проводимость:

$$\delta\sigma = \sigma_{2D}2\pi R\left[c_1 - c_2S(\mu)\right]\times$$
$$\times\,\Theta\left[(\mu - E_0)\,\mathrm{sgn}(1-a_0^2) + \hbar v k_e\right]. \qquad (26)$$

Функция Хевисайда в этом уравнении означает, что данная поправка к проводимости возникает только тогда, когда уровень Ферми лежит в зоне проводимости или валентной зоне, в зависимости от значений параметра a_0, и пересекает поверхностные подзоны.

Теперь проанализируем ситуацию, когда уровень Ферми лежит в окрестности дираковской точки E_0 при $a_0 \geq 0$. Тогда, при полуцелых Φ, возникают бесщелевые подзоны. Рассеяние назад между ветвями бесщелевых подзон запрещено, так как при этом $W_{\nu\nu'}$ в (21) обращается в нуль. Следовательно, в рассматриваемом режиме проводимость нанопроволоки будет периодически осциллировать с периодом Φ_0 и значением в максимуме $g_v e^2/h$ при полуцелых Φ, когда возникают бесщелевые подзоны [23] (в пределе слабых полей) или при целых Φ в пределе сильных полей.

Заключение. Мы показали, что в зависимости от знака параметра a_0 инвариантное по отношению к инверсии времени ГУ для уравнения Дирака в нанопроволоке может приводить к появлению ПС топологического или нетопологического типа. Параметр a_0 определяется микроскопической структурой поверхности и свойствами зон в объеме кристалла. При $a_0 > 0$ ПС топологического типа, образующиеся в запрещенной зоне, также как и в нанопроволоках из топологических изоляторов [23, 25, 26, 30], приводят к ааронов–бомовским осцилляциям магнитопроводимости. Хотя при $a_0 < 0$ поверхностные подзоны являются нетопологическими и образуются вне запрещенной зоны, они также приводят к осцилляциям Ааронова–Бома в проводимости нанопроволоки. Фаза осцилляций равна π для обоих типов поверхностных подзон (т.е. обоих знаков a_0) в квазиклассическом пределе, однако, в пределе сильных магнитных полей появляется дополнительный фазовый сдвиг, равный π. Таким образом, наблюдение магнитоосцилляций проводимости типа Ааронова–Бома (или поверхностного вклада в проводимость при нулевом магнитном поле B) в дираковских нанопроволоках не является доказательством топологической природы ПС.

Работа поддержана Российским научным фондом (проект 16-12-10411).

1. V. A. Volkov and V. V. Enaldiev, JETP **122**, No.3, 608 (2016).
2. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
3. X. L. Qi and S. C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).

4. T. H. Hsieh, H. Lin, J. Liu, W. Duan, A. Bansil, and L. Fu, Nat. Comm. **3**, 982 (2012).
5. S. Y. Xu, C. Liu, N. Alidoust, M. Neupane, D. Qian, I. Belopolski, J. D. Denlinger, Y. J. Wang, H. Lin, L. A. Wray, G. Landolt, B. Slomski, J. H. Dil, A. Marcinkova, E. Morosan, Q. Gibson, R. Sankar, F. C. Chou, R. J. Cava, A. Bansil, and M. Z. Hasan, Nat. Comm. **3**, 1192 (2012).
6. P. Dziawa, B. J. Kowalski, K. Dybko, R. Buczko, A. Szczerbakov, M. Szot, E. Lusakowska, T. Balasubramanian, B. M. Wojek, M. H. Berntsen, O. Tjernberg, and T. Story, Nat. Mater. **11**, 1023 (2012).
7. B. M. Wojek, R. Buczko, S. Safaei, P. Dziawa, B. J. Kowalski, M. H. Berntsen, T. Balasubramanian, M. Leandersson, A. Szczerbakow, P. Kacman, T. Story, and O. Tjernberg, Phys. Rev. B **87**, 115106 (2013).
8. J. O. Dimmock, I. Melngailis, and A. J. Strauss, Phys. Rev. Lett. **16**, 1193 (1966).
9. P. A. Wolff, J. Phys. Chem. Solids **25**, 1057 (1964).
10. R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **13**, 3398 (1976).
11. B. A. Volkov and O. A. Pankratov, JETP Lett. **42**, 178 (1985).
12. F. Zhang, C. L. Kane, and E. J. Mele, Phys. Rev. B **86**, 081303(R) (2012).
13. J. Liu, W. Duan, and L. Fu, Phys. Rev. B **88**, 241303(R) (2013).
14. V. A. Volkov and T. N. Pinsker, Sov. Phys. Solid State **23**, 1022 (1981).
15. B. A. Volkov, B. G. Idlis, and M. Sh. Usmanov, Phys. Usp. **38**, 761 (1995).
16. I. Zeljkovic, Y. Okada, M. Serbyn, R. Sankar, D. Walkup, W. Zhou, J. Liu, G. Chang, Y. J. Wang, M. Z. Hasan, F. Chou, H. Lin, A. Bansil, L. Fu, and V. Madhavan, Nat. Mater. **14**, 318 (2015).
17. S. G. Egorova, V. I. Chernichkin, L. I. Ryabova, E. P. Skipetrov, L. V. Yashina, S. N. Danilov, S. D. Ganichev, and D. R. Khokhlov, Sci. Rep. **5**, 11540 (2015).
18. Yu. I. Latyshev, A. P. Orlov, V. A. Volkov, V. V. Enaldiev I. V. Zagorodnev, O. F. Vyvenko, Yu. V. Petrov, and P. Monceau, Sci. Rep. **4**, 7578 (2014).
19. A. Nikolaeva, D. Gitsu, L. Konopko, M. J. Graf, and T. E. Huber, Phys. Rev. B **77**, 075332 (2008).
20. T. E. Huber, A. Adeyeye, A. Nikolaeva, L. Konopko, R. C. Johnson, and M. J. Graf, Phys. Rev. B **83**, 235414 (2011).
21. M. Safdar, Q. Wang, M. Mirza, Z. Wang, K. Xu, and J. He, Nano Lett. **13**, 5344 (2013).
22. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (1964).
23. J. H. Bardarson and J. E. Moore, Rep. Prog. Phys. **76**, 056501 (2013).
24. I. J. R. Aitchison, *Supersymmetry in Particle Physics. An Elementary Introduction*, Cambridge University Press (2007).
25. Y. Zhang, Y. Ran, and A. Vishwanath, Phys. Rev. B **79**, 245331 (2009)
26. P. A. Ioselevich and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. Lett. **106**, 077003 (2011).
27. A. S. Ioselevich, JETP Lett. **101**, 358 (2015).
28. V. B. Sandomirskii, Sov. Phys. JETP **25**, 101 (1967).
29. N. H. Hong and T. Ando, J. Phys. Soc. Jpn **67**, 2421 (1998).
30. P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **105**, 036803 (2010).
31. Y. Ohtsubo, L. Perfetti, M. O. Goerbig, P. Le F'evre, F. Bertran, A. Taleb-Ibrahimi, New J. Phys. **15**, 033041, (2013).