Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 12, с. 875 – 879

Некоторые точные решения уравнения локальной индукции для движения вихря в бозе-конденсате с гауссовым профилем плотности

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 19 октября 2016 г.

После переработки 7 ноября 2016 г.

Рассмотрена динамика вихревой нити в бозе-конденсате, равновесная плотность которого во вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ системе координат является гауссовой с квадратичной формой $\mathbf{r}\cdot\hat{D}\mathbf{r}$. Показано, что уравнение движения нити в приближении локальной индукции допускает класс точных решений в виде прямого вихря $\mathbf{R}(\beta,t)=\beta\mathbf{M}(t)+\mathbf{N}(t)$, где β – продольный параметр, t – время. Вихрь скользит по поверхности эллипсоида, что следует из законов сохранения $\mathbf{N}\cdot\hat{D}\mathbf{N}=C_1$ и $\mathbf{M}\cdot\hat{D}\mathbf{N}=C_0=0$. Уравнение эволюции касательного вектора $\mathbf{M}(t)$ оказывается замкнутым и имеет интегралы движения $\mathbf{M}\cdot\hat{D}\mathbf{M}=C_2$, $(|\mathbf{M}|-\mathbf{M}\cdot\hat{G}\mathbf{\Omega})=C$, где матрица $\hat{G}=2(\hat{I}\,\mathrm{Tr}\,\hat{D}-\hat{D})^{-1}$. Пересечение соответствующих поверхностей уровня определяет траектории в фазовом пространстве.

DOI: 10.7868/S0370274X16240103

Введение. Теоретическое описание динамики квантованных вихревых нитей во вращающемся бозе-конденсате является сложной физической задачей (см., например, [1–3] и многочисленные ссылки там). Некоторое упрощение рассмотрения возможно, если частота вращения Ω мала по сравнению с характерной поперечной частотой ловушки $\omega_\perp$, а конденсат находится в так называемом режиме Томаса–Ферми (т.е. $[\mu-V_{\min}]\gg\hbar\omega_\perp$, где μ – химический потенциал, $V_{\min}$ – минимальное значение потенциала ловушки). При таких условиях невозмущенное вихрем поле плотности внутри конденсата, т.е. не слишком близко к поверхности Томаса–Ферми $[\mu-V(\mathbf{r})]=0$, с хорошей точностью дается выражением $\rho_0(\mathbf{r})\approx\mathrm{const}[\mu-V(\mathbf{r})]$ (подразумевается, что волновая функция конденсата подчиняется уравнению Гросса–Питаевского). При этом характерный размер конденсата $\tilde{R}$ много больше толщины кора вихря ξ, а плотность вдали от вихря практически статична (при отсутствии потенциальных возмущений). Поведение вихревой нити с хорошей точностью описывается классическими уравнениями медленной гидродинамики невязкой сжимаемой жидкости на заданном пространственно неоднородном фоне плотности. Отметим две технические трудности, присущие такой задаче уже на начальном ее этапе. Первая трудность связана с необходимостью найти невозмущенное вихрем поле скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ самого конденсата во вращающейся вместе с ловушкой системе координат, для чего нужно решить систему уравнений с переменными коэффициентами:

$$\mathbf{v}_0=\nabla\varphi-[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}],\quad \nabla\cdot(\rho_0\mathbf{v}_0)=0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения ловушки.

Пусть в системе имеется единственный вихрь с циркуляцией $\Gamma=2\pi\hbar/m_{\mathrm{atom}}$, динамика которого в трехмерном пространстве описывается неизвестной векторной функцией $\mathbf{R}(\beta,t)$, где β – произвольный параметр вдоль нити, t – время. Уравнение движения тонкой вихревой нити в классической гидродинамике следует из вариационного принципа с лагранжианом вида (см. подробности в [4, 5])

$$\mathcal{L}=\Gamma\oint(\mathbf{F}(\mathbf{R})\cdot[\mathbf{R}_\beta\times\mathbf{R}_t])d\beta-\mathcal{H}\{\mathbf{R}\}, \qquad (2)$$

причем векторная функция $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ удовлетворяет условию

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{R})=\rho_0(\mathbf{R}). \qquad (3)$$

Гамильтониан $\mathcal{H}\{\mathbf{R}\}$ представляет собой сумму

$$\mathcal{H}\{\mathbf{R}\}=\mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\}+\Gamma\oint(\mathbf{A}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{R}_\beta)d\beta, \qquad (4)$$

где $\mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\}$ – кинетическая энергия самого вихря, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – векторный потенциал невозмущенной (массовой) плотности тока, т. е. $\rho_0\mathbf{v}_0=\mathrm{curl}\,\mathbf{A}$. Имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{K}_\Gamma=(\Gamma/2)\int_{S_\Gamma}(\rho_0\mathbf{v}_\Gamma\cdot d\mathbf{S}), \qquad (5)$$

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

где S_Γ – поверхность, натянутая на вихревой контур, $\mathbf{v}_\Gamma$ – самосогласованное поле скорости, создаваемое (квази)сингулярной вихревой нитью (интегрирование обрезается на расстоянии порядка ξ от линии вихря). Вторая упомянутая техническая трудность состоит в том, что данный интеграл не удается записать в замкнутом виде в терминах функции $\mathbf{R}(\beta, t)$, поскольку пространственная неоднородность плотности препятствует точному аналитическому вычислению $\mathbf{v}_\Gamma$. Однако в так называемом приближении локальной индукции функционал $\mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\}$ всегда может быть вычислен с логарифмической точностью:

$$\mathcal{K}_\Gamma\{\mathbf{R}\} \approx (\Gamma^2\Lambda/4\pi)\int \rho_0(\mathbf{R})|\mathbf{R}_\beta| d\beta, \qquad (6)$$

где $\Lambda = \log(\tilde{R}/\xi) \approx \log([\mu - V_{\min}]/\hbar\omega_\perp) \approx \mathrm{const} \gg 1$ – большой логарифм. Соответствующее вариационное уравнение движения

$$\Gamma[\mathbf{R}_\beta \times \mathbf{R}_t]\rho_0(\mathbf{R}) = \delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R} \qquad (7)$$

после его разрешения относительно временнóй производной выглядит следующим образом [3–5]:

$$\mathbf{R}_t = \frac{\Gamma\Lambda}{4\pi}\Big\{\kappa\mathbf{b} + \Big[\frac{\nabla\rho_0(\mathbf{R})}{\rho_0(\mathbf{R})} \times \frac{\mathbf{R}_\beta}{|\mathbf{R}_\beta|}\Big]\Big\} + \mathbf{v}_0(\mathbf{R}), \qquad (8)$$

где κ – локальная кривизна нити, $\mathbf{b}$ – единичный вектор бинормали, $\mathbf{R}_\beta/|\mathbf{R}_\beta|$ – единичный вектор касательной. Решения данного уравнения исследовались (в основном – в линеаризованном виде) для гармонических трехмерных ловушек (см., например, [6, 7]) либо для строго двумерных профилей плотности [5]. Насколько известно автору, никакие существенно нестационарные точные решения до сих пор не были получены. В данной работе будет найдена некоторая точная конечномерная интегрируемая редукция уравнения (8) в случае ангармонической ловушки с гауссовым профилем равновесной плотности конденсата. Следует отметить, что гауссово распределение плотности ранее рассматривалось при теоретическом исследовании вихревых решеток в сплюснутых квазидвумерных конденсатах [8]. Гауссовость предполагается в той области пространства, где уравнение (8) применимо и где, собственно, сосредоточена основная энергетика вихря. Отклонение от гауссовости подразумевается лишь вблизи поверхности Томаса–Ферми, но в главном приближении оно не должно учитываться.

Упрощение в случае гауссовой плотности. Выбор профиля равновесной плотности в форме $\rho_0(\mathbf{r}) \propto \exp(-\mathbf{r}\cdot\hat{D}\mathbf{r})$ с некоторой постоянной положительно определенной симметрической матрицей $\hat{D}$ продиктован, во-первых, тем обстоятельством, что градиент логарифма плотности, который фигурирует в уравнении локальной индукции, в данном случае равен $-2\hat{D}\mathbf{r}$, т.е. линеен по $\mathbf{r}$. Во-вторых, для профилей плотности, которые зависят только от комбинации $\mathbf{r}\cdot\hat{D}\mathbf{r}$, уравнения (1) имеют простое явное решение, причем поле скорости $\mathbf{v}_0$ также оказывается линейным по $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v}_0 = -[\mathbf{B}\times\hat{D}\mathbf{r}], \quad \mathbf{B} = 2(\hat{I}\mathrm{Tr}\hat{D} - \hat{D})^{-1}\mathbf{\Omega}, \qquad (9)$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица. Действительно, предположив решение в виде $\mathbf{v}_0 = \hat{A}\mathbf{r}$, получим после подстановки в (1) систему уравнений на матрицу $\hat{A}$:

$$\epsilon_{ijk}A_{jk} = 2\Omega_i, \quad \mathrm{Tr}\hat{A} = 0, \quad \hat{D}\hat{A} + \hat{A}^T\hat{D} = 0. \qquad (10)$$

Расписав эти условия покомпонентно в системе главных осей квадратичной формы, найдем, что элементы $\hat{A}$ даются формулой

$$A_{ij} = 2\epsilon_{ijk}\Omega_k\frac{d_j}{d_i + d_j}, \qquad (11)$$

где $d_i > 0$ – собственные числа матрицы $\hat{D}$. Заметим теперь, что

$$2\epsilon_{ijk}\frac{\Omega_k}{d_i + d_j} = \epsilon_{ijk}B_k, \quad B_k = \frac{2\Omega_k}{-d_k + \sum_j d_j}, \qquad (12)$$

откуда следуют выражения (9).

С учетом найденных формул уравнение локальной индукции (соответствующим образом обезразмеренное) в гауссовом случае записывается как

$$\mathbf{R}_t = \kappa\mathbf{b} + \Big[\frac{\mathbf{R}_\beta}{|\mathbf{R}_\beta|}\times\hat{D}\mathbf{R}\Big] - [\mathbf{B}\times\hat{D}\mathbf{R}]. \qquad (13)$$

Интегрируемая редукция. Интересное наблюдение состоит в том, что уравнение (13) допускает решения в виде нестационарного прямого вихря,

$$\mathbf{R}(\beta, t) = \beta\mathbf{M}(t) + \mathbf{N}(t). \qquad (14)$$

Кривизна нити при этом тождественно равна нулю, и после подстановки (14) в (13) получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{N}} = \Big[\Big(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} - \mathbf{B}\Big)\times\hat{D}\mathbf{N}\Big], \qquad (15)$$

$$\dot{\mathbf{M}} = \Big[\Big(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} - \mathbf{B}\Big)\times\hat{D}\mathbf{M}\Big]. \qquad (16)$$

Легко убедиться в наличии интегралов движения:

$$\mathbf{N}\cdot\hat{D}\mathbf{N} = C_1, \quad \mathbf{M}\cdot\hat{D}\mathbf{N} = C_0, \quad \mathbf{M}\cdot\hat{D}\mathbf{M} = C_2. \qquad (17)$$

Без ограничения общности можно положить $C_0 = 0$. Тогда становится ясным, что прямой вихрь в любой момент времени касается эллипсоида $\mathbf{r} \cdot \hat{D}\mathbf{r} = C_1$, причем $\mathbf{N}$ есть точка касания.

Заметим теперь, что уравнение для $\mathbf{M}$ имеет неканоническую гамильтонову структуру, напоминающую структуру уравнения Ландау–Лифшица, но с участием матрицы $\hat{D}$:

$$\dot{\mathbf{M}} = \left[\frac{\partial H(\mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} \times \hat{D}\mathbf{M}\right], \quad H = |\mathbf{M}| - \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}. \tag{18}$$

До сих пор не предполагалось, что вектор угловой скорости в системе главных осей эллипсоида независим от времени – написанные выше уравнения движения справедливы и для нестационарной $\mathbf{\Omega}(t)$. Но если $\mathbf{\Omega} = \text{const}$ (что будет предполагаться далее), то гамильтониан $H(\mathbf{M}) = C$ представляет собой еще один интеграл движения.

Длина вектора $\mathbf{M}$ не имеет непосредственного геометрического смысла, а существенно лишь его направление $\mathbf{m} = \mathbf{M}/|\mathbf{M}|$. Поэтому для дальнейшего исследования свойств рассматриваемой динамической системы удобно использовать комбинацию законов сохранения, в которой фигурирует только единичный касательный вектор $\mathbf{m}$:

$$\gamma(\mathbf{m}) \equiv \frac{1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m} \cdot \hat{D}\mathbf{m}}} = \text{const}, \qquad \mathbf{m}^2 = 1. \tag{19}$$

Интересно отметить, что уравнение движения для $\mathbf{m}$ имеет несколько иную гамильтонову структуру:

$$\dot{\mathbf{m}} = \sqrt{(\mathbf{m} \cdot \hat{D}\mathbf{m})^3}\Big[\frac{\partial \gamma(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \times \mathbf{m}\Big]. \tag{20}$$

Траектории системы являются линиями уровня функции $\gamma(\mathbf{m})$ на единичной сфере. В зависимости от соотношений между величинами d_i и от значения векторного параметра $\mathbf{B}$ фазовые портреты могут быть качественно различными. Введем параметризацию

$$d_1 = 1 + \alpha, \quad d_2 = 1 - \alpha, \qquad d_3 = \lambda, \tag{21}$$

$$\mathbf{m} = (\sqrt{1 - q^2}\cos\phi, \sqrt{1 - q^2}\sin\phi, q), \tag{22}$$

(где q есть косинус полярного угла), и рассмотрим некоторые примеры того, как "управляющий параметр" $\mathbf{\Omega}$ меняет динамику вихря.

Пример 1. Пусть вектор $\mathbf{\Omega}$ направлен по оси z. Тогда имеем семейство кривых, отличающихся значением параметра γ:

$$1 - \Omega q = \gamma\sqrt{(1 - q^2)(1 + \alpha\cos 2\phi) + \lambda q^2}. \tag{23}$$

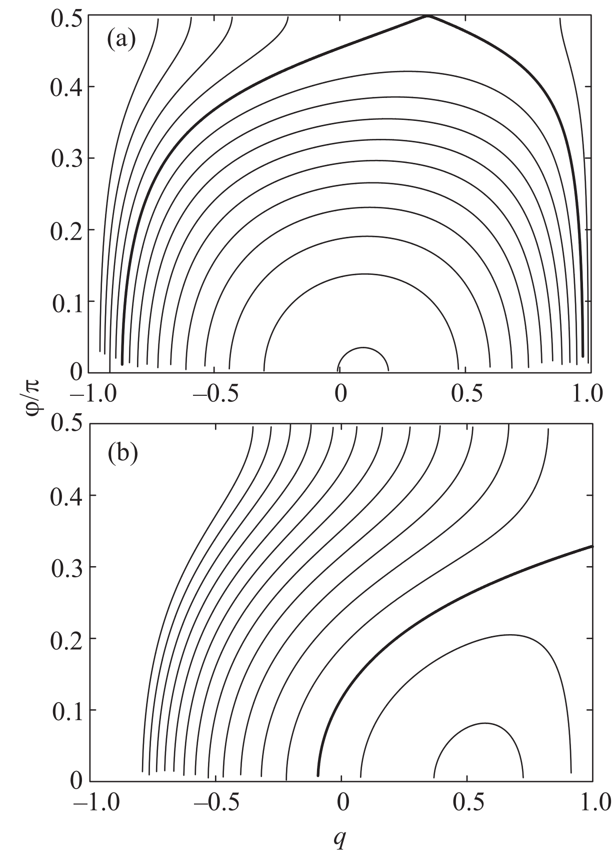

Рис. 1. Иллюстрация формулы (23) для $\alpha = 0.3$, $\lambda = 0.6$. (a) – $\Omega = 0.05$. (b) – $\Omega = 0.3$. Жирными линиями показаны сепаратриссы

На рис. 1 представлены фазовые портреты при $\alpha = 0.3$, $\lambda = 0.6$ (вращение вокруг большой оси трехосного эллипсоида) для $\Omega = 0.05$ и для $\Omega = 0.3$ (показана только четверть единичной сферы; кривые следует мысленно продолжить по симметрии в азимутальном направлении). Видно, что при достаточно малой частоте вращения оба "полюса" являются устойчивыми особыми точками типа "центр". На x-меридианах имеются еще два центра, а на y-меридианах имеются две седловых точки. Такая структура интегральных линий естественна, поскольку при нулевой частоте вращения ловушки мы фактически имеем дело с классическими уравнениями, описывающими динамику твердого тела. При усилении вращения "южный полюс" остается центром, а две меридиональные седловые точки сближаются с "северным полюсом", превращая его после бифуркации в "седло".

На рис. 2 параметр $\lambda = 1.1$, т.е. вращение происходит вокруг средней оси. При малой угловой скорости оба полюса являются седловыми точками, а на x- и y-меридианах существует по два центра. С уве-

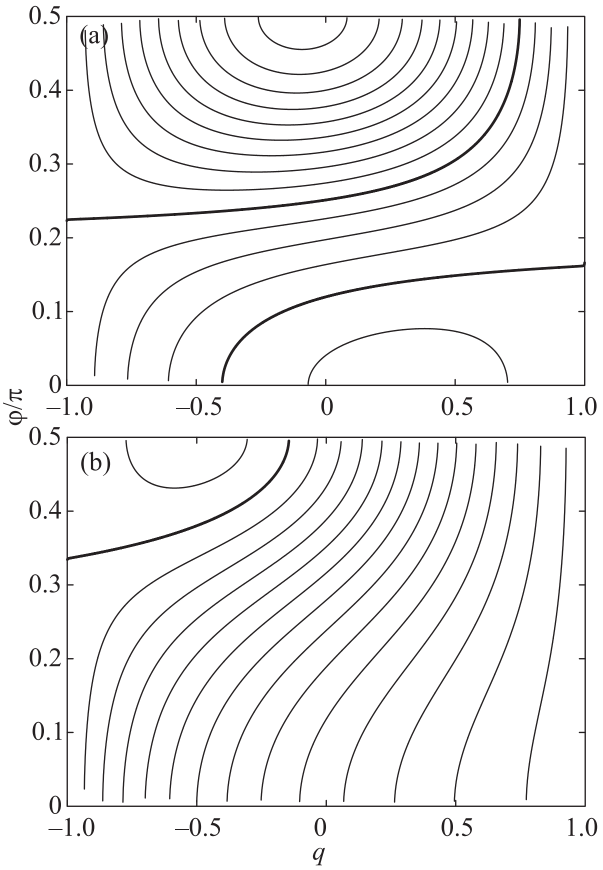

Рис. 2. Иллюстрация формулы (23) для $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1.1$. (a) – $\Omega = 0.05$. (b) – $\Omega = 0.3$

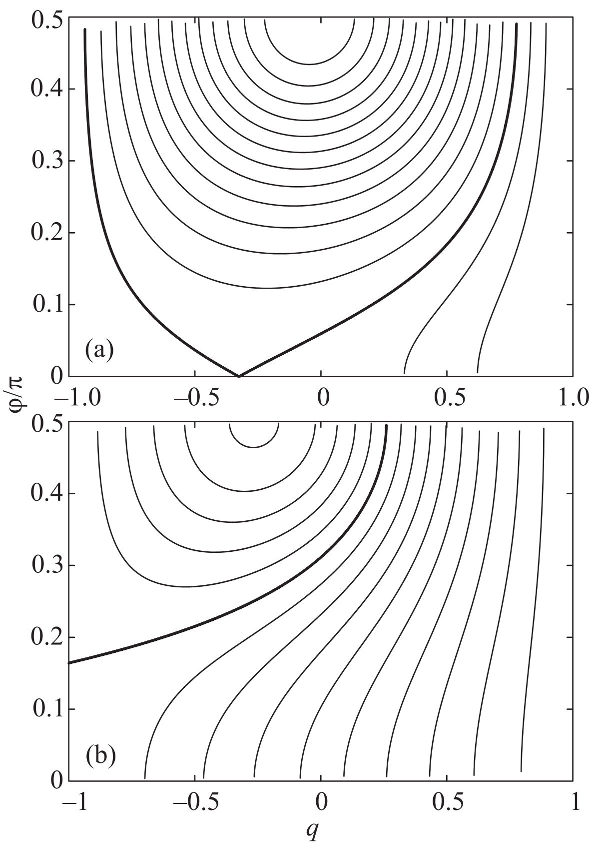

Рис. 3. Иллюстрация формулы (23) для $\alpha = 0.3$, $\lambda = 1.5$. (a) – $\Omega = 0.05$. (b) – $\Omega = 0.3$

личением Ω центры на x-меридианах сближаются с северным полюсом и превращают его в центр.

На рис. 3 параметр $\lambda = 1.5$, т.е. вращение происходит вокруг малой оси. В этом случае по мере увеличения Ω две седловые точки на x-меридианах приближаются к изначально устойчивому южному полюсу и превращают его в седло, тогда как северный полюс остается центром и еще два центра остаются на y-меридианах.

Нужно также сказать, что при еще большей частоте вращения во всех случаях остается только по два центра (не показано). Следует, однако, иметь в виду, что в действительности при быстром вращении в конденсат проникают два или более взаимодействующих между собой вихря.

Пример 2. Пусть теперь анизотропия $\alpha = 0$, но вектор $\mathbf{B}$ направлен под углом к оси симметрии эллипсоида. Тогда

$$1 - B_3 q - B_1\sqrt{1-q^2}\cos\phi = \gamma\sqrt{1+(\lambda-1)q^2}. \quad (24)$$

На рис. 4a, b показаны фазовые портреты в случае вытянутого эллипсоида вращения при $\lambda = 0.5$ для двух одинаково направленных векторов $\mathbf{B}$, отличающихся по абсолютной величине (показана только половина единичной сферы; кривые следует продолжить по симметрии в азимутальном направлении). При меньшей частоте вращения имеется два центра на x_- меридиане вблизи точек $\pm\mathbf{e}_z$ и еще один центр на x_+ меридиане, а на x_- меридиане имеется седло. При большей частоте вращения седло и центр в районе северного полюса взаимно уничтожают друг друга, в результате чего на сфере остаются только два центра.

На рис. 5a, b показан случай сплюснутого эллипсоида вращения при $\lambda = 2.0$. Здесь при меньшей частоте есть один центр на x_- меридиане, два центра на x_+ меридиане в районе полюсов, а также седло на x_+ меридиане. При большей скорости вращения происходит аннигиляция седла и центра в районе южного полюса.

Заключение. Таким образом, в данной работе теоретически показано, что на гауссовом фоне плотности трехмерная динамика квантованной вихревой нити во вращающемся существенно анизотропном бозе-конденсате может проходить в режиме прямо-

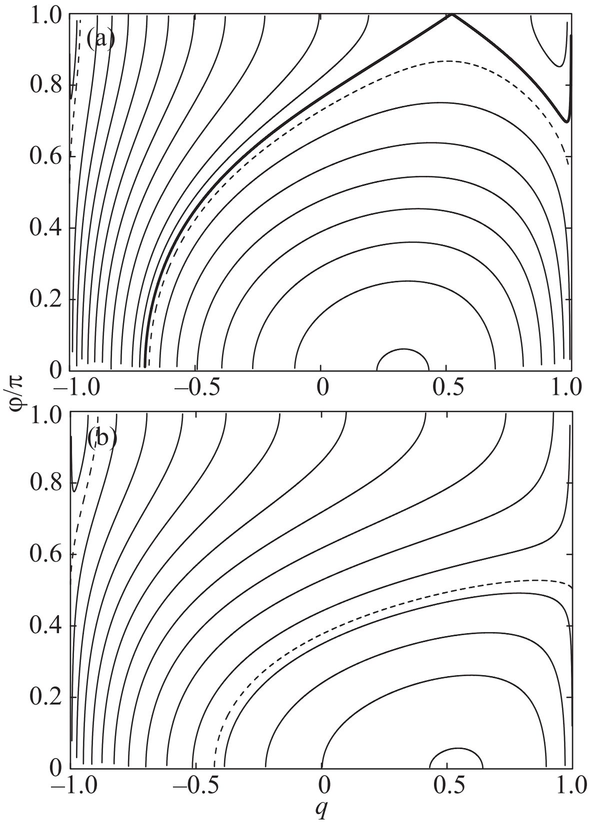

Рис. 4. Иллюстрация формулы (24) для $\lambda = 0.5$. (a) – $B_3 = B_1 = 0.2$. (b) – $B_3 = B_1 = 0.4$. Штриховыми линиями показаны неособые траектории, проходящие через точки $\pm\mathbf{e}_z$

го вихря, когда вращение ловушки и пространственная неоднородность плотности конденсата доминируют над эффектом кривизны нити. Проанализирована соответствующая интегрируемая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Меняя угловую скорость вращения ловушки, можно до некоторой степени управлять поведением прямолинейного вихря. Естественно предположить, что и при учете нелокальных поправок в уравнении движения, а также в близких к гауссовому случаях возможен качественно похожий режим, когда кривизна вихревой линии будет заметна лишь вблизи поверхности конденсата. По крайней мере, для почти сферической невращающейся гармонической ловушки приближенные решения в виде прямого вихря, проходящего через точку симметрии, были найдены в работе [3].

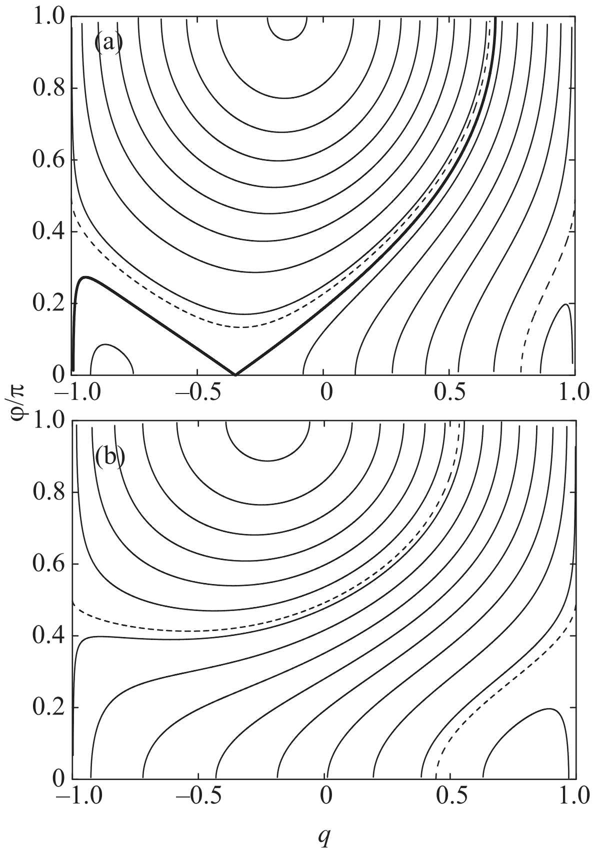

Рис. 5. Иллюстрация формулы (24) для $\lambda = 2.0$. (a) – $B_3 = B_1 = 0.2$. (b) – $B_3 = B_1 = 0.4$

1. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, J. Phys.: Condens. Matter **13**, R135 (2001).
2. A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
3. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000).
4. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **64**, 036305 (2001).
5. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **103**, 878 (2016).
6. A. Fetter, Phys. Rev. A **69**, 043617 (2004).
7. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, Phys. Rev. A **74**, 041603 (2006).
8. D. E. Sheehy and L. Radzihovsky, Phys. Rev. A **70**, 063620 (2004).