Письма в ЖЭТФ, том 105, вып. 2, с. 70 – 76 © 2017 г. 25 января

Изотропизация двумерной гидродинамической турбулентности в прямом каскаде

Е. А. Кузнецов[a,b,c1)], *Е. В. Серещенко*[c,d,e]

[a] *Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[b] *Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия*

[c] *Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[d] *Дальневосточный федеральный университет, 690950 Владивосток, Россия*

[e] *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН*

630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 17 ноября 2016 г.

Представлены результаты численного моделирования прямого каскада двумерной гидродинамической турбулентности (с разрешением до 16384×16384). Если на раннем этапе (на временах порядка обратного инкремента накачки $\tau \sim \Gamma_{\max}^{-1}$) развитие турбулентности идет примерно по тому же сценарию, что и в случае с вырождающейся турбулентностью [1, 2] – формируются квази-сингулярные распределения ротора завихренности (di-vorticity), которым в k-пространстве соответствуют джеты, что приводит к сильной анизотропии турбулентности, то при временах порядка 10τ турбулентность становится практически изотропной. В частности, на этих временах не наблюдается какой-либо заметной анизотропии угловых флуктуаций спектра энергии (при фиксированном k), а у функции распределения вероятности завихренности при больших аргументах формируется экспоненциальный хвост с показателем, линейно зависимым от завихренности, что согласуется с теоретическим предсказанием [3].

DOI: 10.7868/S0370274X17020047

1. Введение. В 1967 г. Крейчнаном [4] было показано, что в развитой двумерной гидродинамической турбулентности существуют в инерционном интервале масштабов два колмогоровских спектра, порождаемых двумя интегралами движения – энергии $E = 1/2\int(\mathbf{v})^{\mathbf{2}}\mathbf{dr}$ и энстрофии $1/2\int\Omega^2 d\mathbf{r}$, где $\mathbf{v}$ – скорость жидкости и $\Omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ – завихренность. Первый спектр соответствует постоянному потоку энергии ϵ, направленному в область малых волновых чисел (обратный каскад); этот спектр имеет ту же самую зависимость от k, что и знаменитый колмогоровский спектр для трехмерной гидродинамической турбулентности: $E(k) \sim \epsilon^{2/3}k^{-5/3}$. Второй спектр – спектр Крейчнана

$$E(k) \sim \eta^{2/3}k^{-3} \tag{1}$$

соответствует постоянному потоку энстрофии η в область малых масштабов (прямой каскад). Существование этих двух спектров было подтверждено в многочисленных численных экспериментах, моделирующих двумерную турбулентность при больших числах Рейнольдса – в режиме, когда в нулевом приближении в соответствующих инерционных интервалах вместо уравнения Навье–Стокса можно использовать уравнение Эйлера (см., например, обзор [5] и соответствующие там ссылки). Вместе с тем, сразу после работы [4] в первых численных экспериментах [6] наблюдалось появление резких градиентов завихренности, соответствующих формированию скачков (квази-шоков) с толщинами, малыми по сравнению с их длиной. Основываясь на этих численных наблюдениях, Саффман [7] предложил другой спектр $E(k) \sim k^{-4}$, главный вклад в который вносят изотропно распределенные квази-шоки (в этом смысле спектр Саффмана аналогичен спектру Кадомцева–Петвиашвили [8] для звуковой турбулентности). С другой стороны, вычисление фурье-образа от скачка завихренности $\Omega_k \propto k^{-1}$ немедленно приводит к спектру крейчнановского типа $E(k) \sim k^{-3}$. Распределение от скачка, однако, сильно анизотропно: имеет вид джета с малым угловым раствором порядка $(kL)^{-1}$, где L – характерная длина квази-шока. Подчеркнем, что для изотропных распределений скачков завихренности мы должны прийти к спектру Саффмана. В этом смысле *спектры с крейчнановским*

[1)] e-mail: kuznetso@itp.ac.ru

поведением, порождаемые квази-сингулярностями, обязаны быть анизотропными. Именно об этом свидетельствуют как аналитические аргументы, так и численные эксперименты в случае вырождающейся двумерной турбулентности [1, 2, 9, 10], когда в спектрах турбулентности анизотропия обусловлена присутствием джетов. В указанных работах был выявлен физический механизм формирования квазишоков благодаря тенденции к опрокидыванию (отметим, что такой процесс не происходит за конечное время в соответствии со строгими теоремами [11]). Этот механизм связан со свойством вмороженности в жидкость векторного поля ротора завихренности $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\Omega$ (по английски – di-vorticity): в инерционной области масштабов $\mathbf{B}$ подчиняется уравнению вмороженности [12, 13]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\, [\mathbf{v}\times\mathbf{B}],\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \qquad (2)$$

Из (2) сразу видно, что $\mathbf{B}$ может изменяться только благодаря компоненте скорости $\mathbf{v_n}$, нормальной к силовой линии поля $\mathbf{B}$. Из-за вмороженности поля $\mathbf{B}$ эта компонента одновременно есть скорость его силовых линий. Кроме того, в ситуации общего положения для этой компоненты $\operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0$, что и является причиной сжимаемости самого поля $\mathbf{B}$. Последнее следует из того, что уравнение (2) допускает интегрирование в терминах отображения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, являющегося решением системы для лагранжевых траекторий, задаваемых $\mathbf{v}_n$: $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t)$; $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}$. В этом случае $\mathbf{B}$ задается выражением

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_a)\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{B_0}(\mathbf{a})$ – начальное значение поля $\mathbf{B}$, а J – якобиан преобразования $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$. На J при этом не накладывается никаких ограничений – якобиан может принимать произвольные значения. В газодинамике, как известно, причиной опрокидывания и формирования ударных волн являются сжимаемость преобразования от эйлерового описания к лагражевому и обращение соответствующего якобиана в ноль. Однако для двумерной гидродинамики Эйлера есть только тенденция к образованию резких градиентов завихренности в виде квази-шоков, что было подтверждено в численных экспериментах для вырождающейся (свободной) турбулентности [1, 2, 10]. В частности, рост максимума величины B в этих экспериментах составлял два – два с половиной порядка, а пространственное распределение $|B|$ концентрировалось в окрестности линий (положений квази-шоков), между которыми значения $|B|$ были значительно ниже. Каждому такому квази-шоку соответствовал в спектре энергий свой джет. Вдоль каждого такого джета распределение энергии падало по крейчнановскому закону $E \sim k^{-3}$. Первые результаты наших численных экспериментов по двумерной турбулентности прямого каскада, т.е. при наличии накачки и затухания, были представлены в [14]. Накачка, задаваемая инкрементом $\Gamma(k)$, была сосредоточена в области малых k с сильным (сингулярным при $k = 0$) затуханием, обеспечивающим подавление обратного каскада. При больших волновых числах, в области с $k = k_0 \sim 2/3k_{\max}$, вводилось затухание вязкого типа, которое позволяло одновременно решать проблему алиазинга. На малых временах развитие турбулентности в инерционном интервале соответствовало картине вырождающейся турбулентности с формированием квази- шоков и соответственно джетов в спектре турбулентности. В этих экспериментах на начальном этапе происходит формирование крейчнановской зависимости спектра от k ($E \sim k^{-3}$) при всех углах, а также зависимости продольной структурной функции скорости третьего порядка $S_3 = \langle \delta v_{\|}^3 \rangle$ от расстояния между точками R с сильной анизотропией, характерной для вырождающейся турбулентности. При этом усредненный по углам спектр $E(k) = C_{\mathrm{K}}\eta^{2/3}k^{-3}$, где $C_{\mathrm{K}} \simeq 1.3$ – константа Крейчнана, совпадал со спектром, полученным ранее численно в [15–18]. Важно подчеркнуть, что для структурной функции S_3 усреднение по углам давало ответ, сильно отличающийся от изотропного значения. Анализ результатов свидетельствовал в пользу того, что причина этого кроется в недостаточном пространственно-временном разрешении. В связи с этим нами было увеличено пространственное разрешение до 16384×16384 точек и поднято время счета примерно вдвое по сравнению с лучшими экспериментами [14]. Основное отличие полученных результатов состоит в том, что на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ в прямом каскаде происходит разрушение джетовой структуры спектров и турбулентность стремится к изотропной. В частности, на этих временах не наблюдается какой-либо заметной анизотропии угловых флуктуаций спектра энергии (при фиксированном k). В режиме изотропного распределения в данной работе нами найдена функция распределения вероятности P как для завихренности, так и для модуля di-vorticity B. Структура $P(\Omega)$ соответствует предсказаниям изотропной теории [3].

2. Основные уравнения и численная схема. Кратко остановимся на уравнениях движения и численной схеме, которые полностью совпадают с [14]. Численное моделирование прямого каскада для двумерной гидродинамической турбулентности осу-

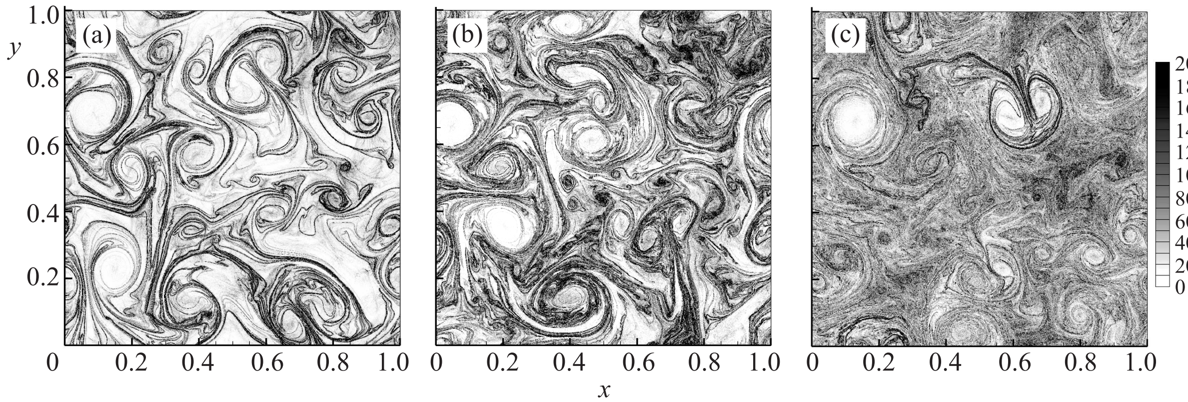

Рис. 1. Распределение модуля $|B|$ при $t = 150, 250, 450$ – соответственно (a)–(c)

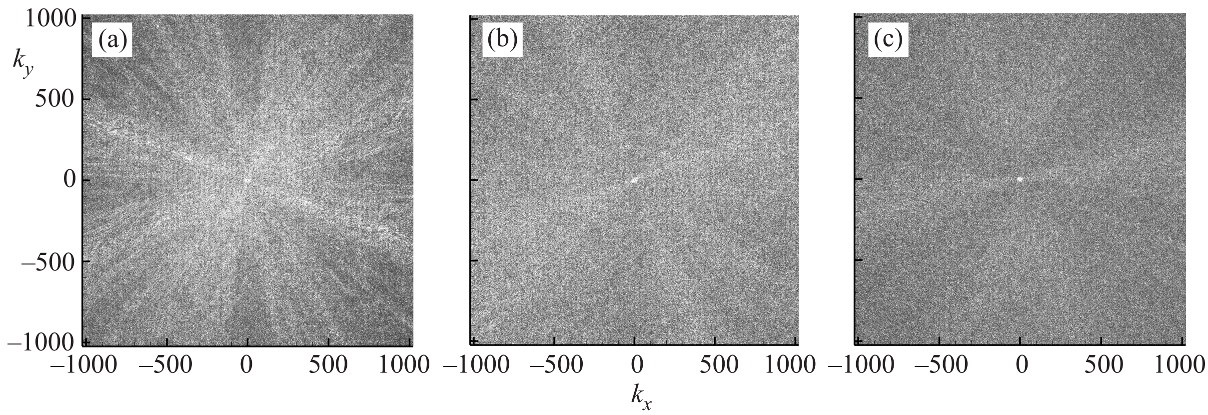

Рис. 2. Распределение плотности энергии флуктуаций $\epsilon(\mathbf{k})$, нормированной на k^{-4} при $t = 150, 250, 450$ – соответственно (a)–(c)

ществлялось в рамках уравнения для завихренности $\Omega = \nabla \times \mathbf{u}$ с периодическими граничными условиями по обеим координатам в ящике с размером $L = 1$, где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – скорость жидкости с условием несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\Omega = \hat{\Gamma}\Omega + \hat{\gamma}\Omega. \tag{4}$$

Оператор $\hat{\Gamma}$ описывает накачку, а также диссипацию на больших масштабах, чтобы исключить обратный каскад, а оператор $\hat{\gamma}$ ответственен за диссипацию энстрофии при больших k. Оба эти оператора задавались через их фурье-образы (см. [14]):

$$\Gamma_k = A\tfrac{(b^2-k^2)(k^2-a^2)}{k^2} \quad \text{при} \quad 0 \le k \le b,$$
$$\Gamma_k = 0 \quad \text{при} \quad k > b,$$

и

$$\gamma_k = 0 \quad \text{при} \quad k \le k_c,$$
$$\gamma_k = -\nu(k-k_c)^2 \quad \text{при} \quad k > k_c.$$

При численном интегрировании уравнения (4) параметры a и b выбирались из условия наиболее быстрого выхода системы на стационарный режим в области малых k. Ниже приведены результаты интегрирования с $A = 0.004$, $a = 3$ и $b = 6$. Для затухания вязкого типа, обеспечивающего поглощение энстрофии, коэффициент вязкости $\nu = 1.5$, k_c составляло $0.6k_{\max}$ с $k_{\max} = 8192$, что одновременно решало проблему алиазинга. Начальные условия были теми же самыми, что и в наших предыдущих работах [2, 14]: в виде набора вихрей гауссовой формы со случайными положением и размерами; начальная полная завихренность была равна нулю. Схема численного интегрирования (4) также полностью совпадала с [2, 14]: уравнение (4) решалось численно с помощью псевдо-спектрального метода Фурье; интегрирование по времени осуществлялось с помощью гибридного метода Рунге–Кутта–Кранка–Николсона третьего порядка точности. Численные эксперименты [14] выполнялись на сетке с максимальным разрешением 8192×8192, в данной работе мы представляем результаты численных экспериментов на сетке

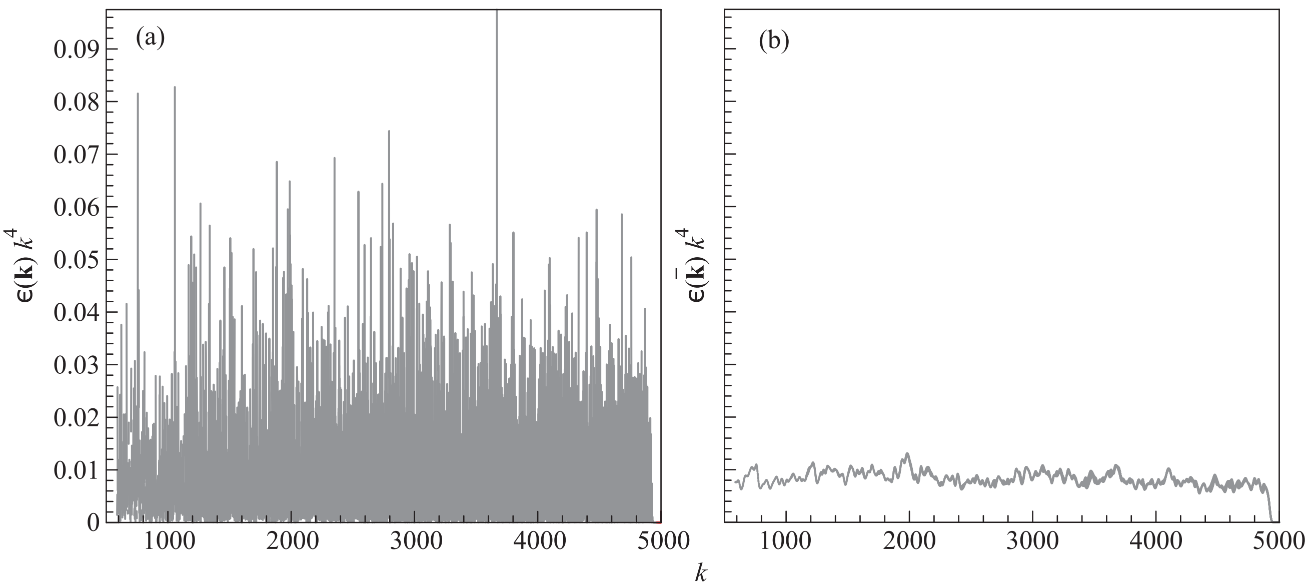

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости $\epsilon(\mathbf{k})k^4$ до усреднения (a) и усредненного значения $\epsilon(\bar{\mathbf{k}})k^4$ по окрестности $\Delta k = 100$ (b) от k на луче $\phi = 45°$ при $t = 150$

16384 × 16384. Вычисления проводились на GPU кластере (с использованием технологии NVIDIA CUDA) в вычислительном центре Новосибирского государственного университета.

3. Результаты численных экспериментов. На начальном этапе для времен порядка обратного инкремента накачки $\Gamma_{\max}^{-1}$ развитие турбулентности идет примерно по тому же сценарию, как и в случае вырождающейся турбулентности [2]: формируются квази-сингулярные распределения ротора завихренности (di-vorticity), которым в k-пространстве соответствуют джеты, что приводит к сильной анизотропии турбулентности. На рис. 1a показано типичное распределение модуля $|B|$, которое максимально сосредоточено на линиях (положениях квазишоков). Между этими линиями $|B|$ значительно ниже. Соответственно в спектре наблюдаются джеты (с малым или большим перекрытиями), как результат спектр турбулентности имеет большую анизотропную составляющую. На рис. 2a представлено распределение в k-пространстве плотности энергии флуктуаций $\epsilon(\mathbf{k})$, нормированной на k^{-4}. На каждом луче в инерционном интервале величина $\epsilon(\mathbf{k})k^4$ в заданный момент времени сильно флуктуирует, а после усреднения практически постоянна, так что после умножения $\epsilon(\bar{\mathbf{k}})$ на k мы приходим к зависимости углового спектра $E(k,\theta) \sim k^{-3}$ (на рис. 3a для угла $\phi = 45°$ при $t = 150$ представлена типичная зависимость $\epsilon(\mathbf{k})k^4$, рис. 3b – результат усреднения этой величины по флуктуациям). Важно отметить, что формирование крейчнановской зависимости от модуля k происходит на самой первой стадии развития прямого каскада, когда перекачка энстрофии достигает "вязкой" области. По нашим оценкам время этой стадии составляет порядка обратного инкремента $\Gamma_{\max}^{-1}$. На этой стадии спектр энергий существенно зависит от угла. Удивительным оказывается то, что после усреднения по углам спектр $E(k)$, имея крейчнановские зависимости от k и потока энстрофии η, определяемого как $1/2\int \gamma(k)|\Omega_k|^2 d\mathbf{k}$, дает значение для константы Крейчнана $C_{\mathrm{K}} \simeq 1.3$, совпадающее с полученным ранее в численных экспери-

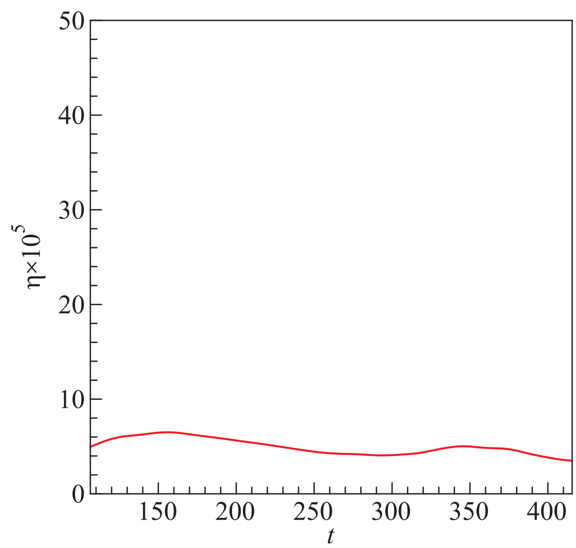

Рис. 4. (Цветной онлайн) Временнáя зависимость потока энстрофии η

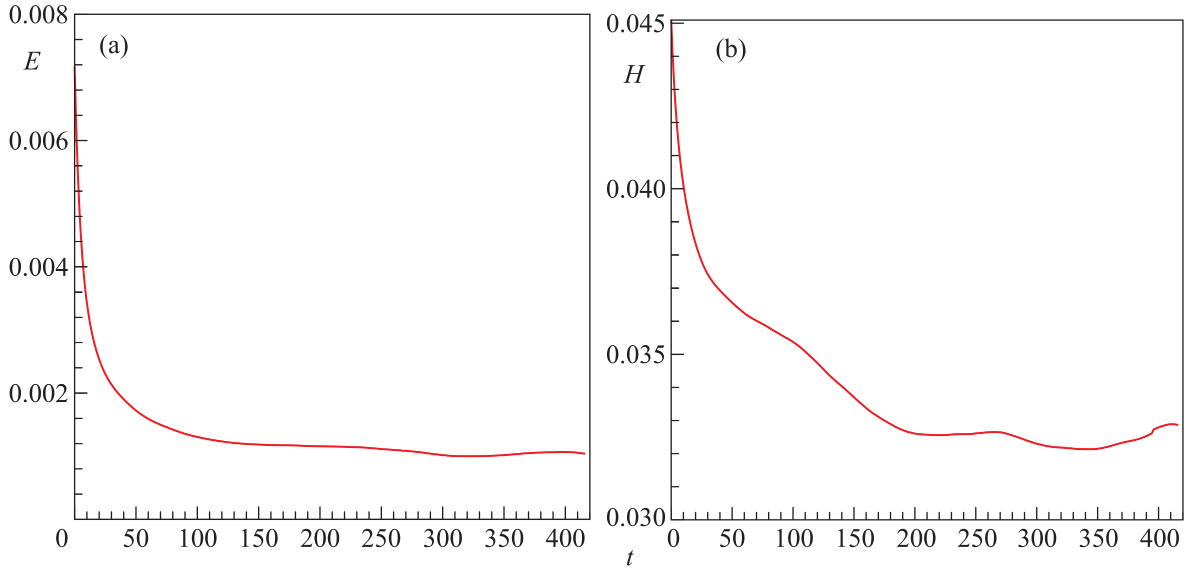

Рис. 5. (Цветной онлайн) Временная эволюция полной энергии E (a) и полной энстрофии H (b)

ментах [15–18]. На следующей стадии линии квазишоков становятся более запутанными (турбулентными) (рис. 1b), расстояние между ними сокращается и как результат анизотропия в спектре уменьшается (рис. 2b). Наконец, на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ джеты практически исчезают (рис. 1c и 2c) и турбулентность в прямом каскаде становится почти изотропной. Выясняется также, что на всех временах, начиная с появления джетов и кончая их исчезновением, поток энстрофии во времени почти постоянен (рис. 4). При этом полная энергия достаточно быстро – уже на первой стадии – становится постоянной, чего нельзя сказать о полной энстрофии. Эта величина приближается к постоянному значению только на стадии изотропизации (рис. 5). Другим свидетельством изотропизации турбулентности на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ является найденная нами функция распределения вероятности завихренности P (рис. 6), которая при больших аргументах имеет экспоненциальный хвост с показателем β, линейно зависящим от завихренности $\bar{\Omega}$, в соответствии с предсказанием изотропной теории [3]. Согласно этим предсказаниям угол наклона показателя порядка $\bar{\Omega}_{\rm rms}^{-1}$, где $\bar{\Omega}_{\rm rms} = [\eta \ln(L/R)]^{1/3}$ – среднеквадратичное значение флуктуаций завихренности. Численный эксперимент (рис. 6) дает асимптотику $P = 0.0005\exp(-2.3\bar{\Omega})$ при $\bar{\Omega}_{\rm rms} = 0.43$. Если вычислять поток энстрофии как интеграл $\eta = 1/2\int \gamma|\Omega_k|^2 d\mathbf{k}$, то $\bar{\Omega}_{\rm rms} = 0.15$. Вычисление $\bar{\Omega}_{\rm rms}$ с помощью найденной функции распределения дает значение 0.2566. Таким образом, с точностью до величин порядка единицы значения $\bar{\Omega}_{\rm rms}$ оказываются

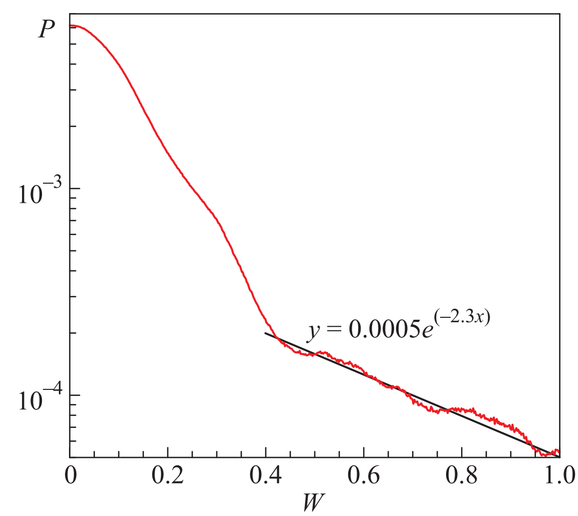

Рис. 6. (Цветной онлайн) Функция распределения вероятности завихренности P при $t = 450$

близкими друг к другу. Соответствующая функция распределения P для значения di-vorticity B имеет также две характерных области (рис. 7): в первой – функция распределения близка к пуассоновской $\sim B\exp(-B^2/B_0^2)$, во второй области (при больших значениях B) P имеет экспоненциальное поведение с более отчетливой линейной зависимостью показателя от B, чем аналогичная для завихренности. В данном численном эксперименте $B_{\rm rms}$ по наклону равно 88. Если вычислять $B_{\rm rms}$ по функции распределения $P(B)$, то это значение равно 84.6.

4. Заключение. Основной вывод этой работы состоит в том, что формирование степенной зависи-

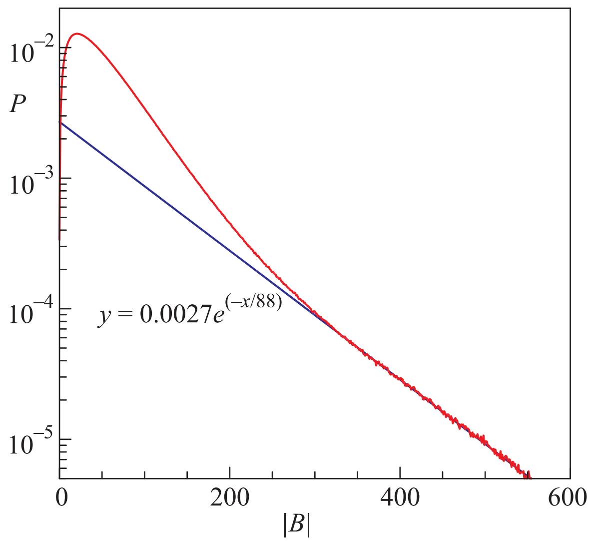

Рис. 7. (Цветной онлайн) Функция распределения вероятности di-vorticity P при $t = 450$

мости от волнового числа k в спектре турбулентности прямого каскада с крейчнановским показателем благодаря квази-шокам завихренности представляет собой самый быстрый процесс. При этом в спектре турбулентности возникает сильная анизотропия за счет джетов – фурье-образов квази-шоков. На следующем (более медленном) этапе происходит усложнение (турбулизация) структуры линий квази-шоков. Расстояния между ними сокращаются, а спектр становится более изотропным. Важно также отметить, что в функции распределения вероятности завихренности при этих временах происходит формирование при больших аргументах экспоненциального хвоста с показателем, который может быть экстраполирован в виде линейной зависимости от завихренности, как было предсказано в [3]. Соответствующая функция распределения P для ротора завихренности (di-vorticity B) имеет также две характерные области: в первой – функция распределения близка к пуассоновской $\sim B\exp(-B^2/B_0^2)$, во второй области (при больших значениях B) P имеет экспоненциальное поведение с более отчетливой линейной зависимостью показателя от B, чем аналогичная для завихренности. Оба эти наблюдения свидетельствуют, что на больших временах турбулентность прямого каскада теряет анизотропию, обусловленную тенденцией к опрокидыванию. По нашему мнению, существуют по крайней мере две возможные причины изотропизации. Первая из них может быть связана с областью накачки, где, несмотря на сильное затухание в области малых k, формируются крупномасштабные вихри (это некоторые остатки до конца неубитого обратного каскада), которые, благодаря своему вращению, вносят в систему квазиударных скачков завихренности дополнительное растяжение линий di-vorticity, а с другой стороны делает систему значимых линий поля B более запутанной. Вторая возможная причина связана со взаимодействием турбулентности с областью затухания вязкого типа. Мы наблюдаем, что изотропизация спектров осуществляется при временах, больших времени крейчнановской перекачки энстрофии, когда волна перекачки достигает вязкой области. Как известно, турбулентность прямого каскада является нелокальной (точнее – слабо нелокальной), что сопровождается появлением логарифмических поправок к спектру Крейчнана $E(k) \sim k^{-3}$ (см. [4], а также [19]). Локальность турбулентности означает, что основным (главным) нелинейным взаимодействием является взаимодействие между масштабами одного порядка, взаимодействие сильно различных масштабов оказывается сильно подавленным. В такой ситуации обе граничные к инерционному интервалу области – области накачки и вязкого затухания, как источники изотропии, по нашему мнению, ответственны за изотропизацию турбулентности прямого каскада.

В заключение авторы благодарят В.В. Лебедева и И.В. Колоколова за полезные обсуждения. Данная работа выполнялась при поддержке гранта РНФ # 14-22-00174.

1. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. J. Rasmussen, Phys. Fluids **19**, 105110 (2007).
2. А. Н. Кудрявцев, Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма ЖЭТФ **96**, 783 (2012) [JETP Lett. **96**, 699 (2013)].
3. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev. E **83**, 045301(R) (2011).
4. R. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 1417 (1967).
5. G. Boffetta and R. E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).
6. D. K. Lilly, J. Fluid Mech. **45**, 395 (1971).
7. P. G. Saffman, Stud. Appl. Maths **50**, 49 (1971).
8. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН СССР **208**, 794 (1973) [Sov. Phys. Dokl. **18**, 115 (1973)].
9. Е. А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **80**, 92 (2004).
10. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. J. Rasmussen, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 253 (2010).
11. W. Wolibner, Math. Z. **37**, 698 (1933); В. И. Юдович, ЖВМ и МФ **3**, 1407 (1963); T. Kato, Arch. Rat. Mech. Anal. **25**, 189 (1967).
12. M. E. Brachet, M. Meneguzzi, and P. L. Sulem, J. Fluid Mech. **194**, 333 (1988).

13. J. Weiss, Physica D **48**, 273 (1991).
14. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма ЖЭТФ **102**, 870 (2015) [JETP Lett. **102**(11), 760 (2015)].
15. T. Gotoh, Phys. Rev. E **57**, 298491 (1998).
16. N. Schorghofer, Phys. Rev. E **61**, 657277 (2000).
17. E. Lindborg and K. Alvelius, Phys. Fluids **12**, 945 (2000).
18. E. Lindborg and A. Vallgren, Phys. Fluids **22**, 091 (2010).
19. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev E **50**, 3883 (1994).