Письма в ЖЭТФ, том 105, вып. 5, с. 261 – 265

Моделирование многократного рассеяния в среде с анизотропной индикатрисой

В. Л. Кузьмин,[1)] *А. Ю. Вальков*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251 С.-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 18 января 2017 г.
После переработки 26 января 2017 г.

Для систем с анизотропией рассеяния, описываемой фазовыми функциями Хеньи–Гринштейна и Рэлея–Ганса, выполнено численное моделирование и проведен сравнительный анализ многократного обратно-рассеянного излучения от слоев различной толщины, включая геометрию полупространства. Показано, что интенсивность обратного рассеяния зависит от вида фазовый функции; с ростом анизотропии растет различие между численными значениями интенсивности, получаемыми в двух моделях.

DOI: 10.7868/S0370274X17050022

Введение. В последнее время интерес к задаче переноса оптического излучения в случайно-неоднородной среде связан, главным образом, с биомедицинскими приложениями (см. [1–4]). Важной проблемой здесь является учет анизотропии индикатрисы однократного рассеяния (далее – "анизотропии рассеяния"). В большинстве работ для этого применяют эмпирическую фазовую функцию Хеньи–Гринштейна (ХГ), что связано, в основном, с ее математическим удобством. Фазовая функция Рэлея–Ганса (РГ), описывающая среду как суспензию твердых сфер, представляется здесь более реалистичной.

Существенным элементом эффективного алгоритма моделирования многократного рассеяния методом Монте-Карло (МК) является обратное преобразование для правильного в вероятностном смысле розыгрыша углов рассеяния. Поэтому важным свойством фазовой функции, рассматриваемой как плотность распределения вероятностей по углу рассеяния, является замкнутая элементарная форма для обратной функции интегрального, или кумулятивного, распределения. Этим свойством обладает функция ХГ, чем и объясняется ее популярность. При МК-симуляциях использовалась фазовая функция Ми [5]; однако, для нее не существует в замкнутом виде кумулятивной функции распределения. Использовались и другие фазовые функции [6, 7], однако они имеют тот же недостаток.

В настоящем сообщении для модели Рэлея–Ганса кумулятивная функция найдена в явной форме, что позволило использовать в этой модели метод обратного преобразования и впервые выполнить моделирование многократного рассеяния для обоих видов фазовых функций одновременно. Мы рассчитали угловую зависимость обратного рассеяния и нашли значительное количественное различие в данных, полученных на основе двух моделей. В частности, интенсивность многократного рассеяния строго назад изменяется с ростом анизотропии рассеяния, заметно различаясь для рассматриваемых моделей, вопреки распространенному положению об универсальности описания рассеяния в диффузионном режиме, при котором конкретный вид фазовой функции становится не важен в пределе высоких кратностей.

Уравнение Бете–Солпитера. Уравнение Бете–Солпитера, описывающее перенос стационарного излучения, запишем в виде:

$$\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \,|\, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = k_0^4 \widetilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \\ + k_0^4 \int d\mathbf{r}_3 \widetilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_{23})\Lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)\Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 \,|\, \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_i),$$

где пропагатор $\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \,|\, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$ описывает распространение излучения, падающего в точке $\mathbf{r}_1$ и выходящего из $\mathbf{r}_2$, с начальным $\mathbf{k}_i$ и финальным $\mathbf{k}_f$ волновыми векторами; $\mathbf{k}_{ij}$ – волновой вектор вдоль направления из $\mathbf{r}_i$ в $\mathbf{r}_j$, $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны в вакууме; пропагатор однократного рассеяния $\Lambda(r) = r^{-2}\exp(-\mu r)$ представляет собой произведение комплексно-сопряженной пары функций Грина скалярного поля, с учетом множителя k_0^4, $\mu = \mu_s + \mu_a$ – коэффициент экстинкции, μ_a – коэффициент поглощения.

Оптическая теорема связывает коэффициент рассеяния μ_s и интеграл по телесному углу от корреля-

[1)]e-mail: kuzmin_vl@mail.ru

тора диэлектрической проницаемости $\widetilde{G}(\mathbf{q})$. В случае скалярного поля

$$\mu_s = k_0^4 \int d\Omega_f \widetilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i). \quad (1)$$

Для электромагнитного поля в (1) добавляется рэлеевский множитель: $\widetilde{G} \to \widetilde{G}(1+\cos^2\theta_f)/2$.

Введем нормированную фазовую функцию

$$p(\hat{\mathbf{k}}_f \hat{\mathbf{k}}_i) = \widetilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) / \int d\Omega_f \widetilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i), \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{k}}$ обозначает единичный вектор вдоль $\mathbf{k}$, и уравнение Бете–Солпитера представим в виде

$$\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \,|\, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \mu_s p(\hat{\mathbf{k}}_f \hat{\mathbf{k}}_i)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \\ + \mu_s \int d\mathbf{r}_3 p(\hat{\mathbf{k}}_f \hat{\mathbf{k}}_{23})\Lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)\Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 \,|\, \mathbf{k}_{23}, \mathbf{k}_i). \quad (3)$$

Пусть z – декартова координата точки $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\perp, z)$, нормальная к границам плоско-параллельного слоя толщины T, $z \in [0; T]$; $T = \infty$ соответствует полупространству. Определим некогерентную часть интенсивности рассеянного назад излучения, отнесенной к плотности энергии падающего поля, как

$$J(s_i, s_f) = 4\pi \int_0^\infty dz_1 \int_{z_2>0} d\mathbf{r}_2 \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 \,|\, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \times \\ \times \exp\left(-\mu(s_f z_2 + s_i z_1)\right), \quad (4)$$

где $s_i = 1/\cos\theta_i$ $s_f = 1/\cos\theta_f$, θ_i – угол падения, θ_f – угол обратного рассеяния, отсчитываемый от обратного направления. Когерентная часть обратного рассеяния дается формулой (4) при замене экспоненты на $\exp\left((\mu_f + \mu_i)(z_1 + z_2)/2\right)\cos((\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))$. Для рассеяния строго назад этот вклад, за вычетом вклада однократного рассеяния, дает удвоение интенсивности; здесь мы его не рассматриваем в силу угловой узости пика.

Итерируя уравнение Бете–Солпитера, запишем интенсивность в виде ряда по кратностям рассеяния:

$$J(s_i, s_f) = J^{(1)}(s_i, s_f) + \sum_{n=2}^{\infty} J^{(n)}(s_i, s_f), \quad (5)$$

где $J^{(1)}(s_i, s_f) = 4\pi(\mu_s/\mu)(s_f + s_i)^{-1} p(\hat{\mathbf{k}}_f \hat{\mathbf{k}}_i)$ – вклад однократного рассеяния, а $J^{(n)}(s_i, s_f)$ – рассеяния n-го порядка, $n > 1$.

Для изотропного рассеяния $p(\hat{\mathbf{k}}_f \hat{\mathbf{k}}_i) = 1/4\pi$ члены низшего порядка в полупространстве вычисляются точно; для нормального падения и рассеяния назад имеем $J^{(1)}(1,1) = 0.5$, $J^{(2)}(1,1) = \frac{1}{2}\ln 2$, $J^{(3)}(1,1) = = \frac{1}{4}\ln^2 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{48}\pi^2$, $J^{(4)}(1,1) \approx 0.206753$. Мы используем эти значения для контроля численных симуляций многократного рассеяния.

Точное решение задачи об угловом распределении интенсивности многократного рассеяния от полупространства (задачи Милна) для изотропного рассеяния можно представить в виде (см. [8, 9])

$$J(s_i, s_f) = \frac{1}{s_i + s_f} \exp\left(-H(s_i) - H(s_f)\right), \quad (6)$$

$$H(s) = \frac{s}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{s^2 + s'^2} \ln\left(1 - \frac{\arctan s'}{s'}\right), \quad (7)$$

В направлении строго назад $J(1,1) \approx 4.22768$ [10].

Метод обратного преобразования. При МК-моделировании переноса излучения стандартно используют две подстановки метода обратного преобразования: подстановка, основанная на экспоненциальном распределении расстояния между рассеивателями, и подстановка, основанная на обратной кумулятивной фазовой функции угла рассеяния.

Для вычисления случайного значения подынтегрального выражения, соответствующего n-му члену в (5), мы рекуррентно порождаем случайную траекторию событий рассеяния в точках $\mathbf{r}_j$, $j = 1, \ldots, n$, используя на каждом шаге две указанные процедуры обратного преобразования. Расстояние $r'_j = = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}|$ разыгрывается с помощью переменной $\xi_j = \exp(-\mu r'_j)$, а полярный угол θ_j, отсчитываемый от предыдущего направления рассеяния $\mathbf{r}'_{j-1}$, с помощью переменной

$$\chi_j = 2\pi \int_{-1}^{t_j} p(t')dt', \ t_j = \cos\theta_j. \quad (8)$$

Переходя последовательно для каждого $j = 2, 3, \ldots$ от 3D-интегрирования по $\mathbf{r}_j$ к интегрированию по разностной переменной $\mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$, имеем

$$\int d\mathbf{r}'_j \Lambda(r'_j) p(t_j) f(r'_j, t_j) = \frac{1}{2\pi\mu} \times \\ \times \int_0^1 d\xi_j \int_0^1 d\chi_j \int_0^{2\pi} d\phi_j f\left(-\frac{\ln\xi_j}{\mu}, t(\chi_j)\right), \quad (9)$$

где $f(r'_j, t_j)$ – произвольная функция, $t_j = t(\chi_j)$ – обратная функция к $\chi_j = \chi(t_j)$ в (8), ϕ_j – азимутальный угол. Интегрирование в (9) выполняется усреднением по выборке равномерно распределенных случайных переменных $\xi_j, \chi_j \in [0; 1]$ и $\phi_j \in [0; 2\pi]$.

Введем $q = kR\sqrt{2(1-t)}$ для (8) и получим

$$1 - \chi = 2\pi(kR)^{-2} \int_0^q p(q')q'dq'. \quad (10)$$

Здесь учтено условие нормировки

$$2\pi(kR)^{-2} \int_0^{2kR} p(q)qdq = 1. \quad (11)$$

Если рассматривать функцию $2\pi(kR)^{-2}p(q)$ как плотность распределения $q \in [0; 2kR]$, то согласно (10) функция $\chi'(q) = 1-\chi(q)$ имеет смысл кумулятивной функции распределения, которая равна вероятности величины q' находиться в интервале $q' < q$.

Фазовую функцию РГ можно записать как

$$p(q) = 2(\pi A)^{-1}q^{-6}(\sin q - q\cos q)^2. \quad (12)$$

По условию (11) постоянная $A = (kR)^{-2}F(2kR)$, где

$$F(q) = 4\int_0^q q'^{-5}(\sin q' - q'\cos q')^2 dq'. \quad (13)$$

Существенно, что функция $F(q)$ элементарная,

$$F(q) = q^{-4}(q^4 - q^2 + q\sin 2q - \sin^2 q), \quad (14)$$

$0 \leqslant F(q) < 1$. Из (10) получаем $\chi' = F(q)/F(2kR)$. Обратное преобразование дает величину

$$q = F^{-1}(x), \quad (15)$$

где $x = F(2kR)\chi'$, $0 \leqslant x \leqslant F(2kR) < 1$.

С помощью теоремы Лагранжа об обращении рядов получим из (13) разложение

$$q^2 = \frac{9}{2}x\left(1 + \frac{9}{20}x + \frac{81}{280}x^2 + \frac{2403}{11200}x^3 + \ldots\right) \quad (16)$$

и отсюда найдем формулу для обратной функции $q = F^{-1}(x)$. Однако этот ряд сходится только при $|x| < x_1 \approx 0.9528$. Значение $x_1 = F(q_1)$, где $q_1 \approx \approx 4.4934$ – наименьший положительный корень уравнения $\tan(q) = q$. В точке $|x| = x_1$ ряд расходится, так как $(F^{-1})'(x_1) = \infty$ в силу $F'(q_1) = 0$. Поэтому разложение (16) можно использовать для численных расчетов только при x заметно меньших x_1.

Индикатриса рассеяния $F'(q) \propto p(q)$ обращается в ноль для точек q_m, где $\tan q_m = q_m$,

$$q_m = r_m - \frac{1}{r_m} - \frac{2}{3r_m^3} - \frac{13}{15r_m^5} - \frac{146}{105r_m^7} + \cdots, \quad (17)$$

$r_m = \pi(m + 1/2)$, $m \geqslant 1$. В точках $x_m = F(q_m)$ обратная функция $F^{-1}(x)$ имеет сингулярности производной $\left(F^{-1}(x)\right)' \propto (x - x_m)^{-2/3}$ (рис. 1). Эти сингулярности учтены в численном алгоритме кусочной аппроксимации $F^{-1}(x)$ так, чтобы ее первая производная имела правильные особенности в точках x_m. При $x < x_1$, далеких от $x_1 \approx 0.95$, мы используем аппроксимацию (16) высокого порядка.

Рис. 1 показывает существенное отличие кумулятивных функций распределения, используемых при МК-симуляциях многократного рассеяния, для моделей ХГ и РГ с равными параметрами анизотропии.

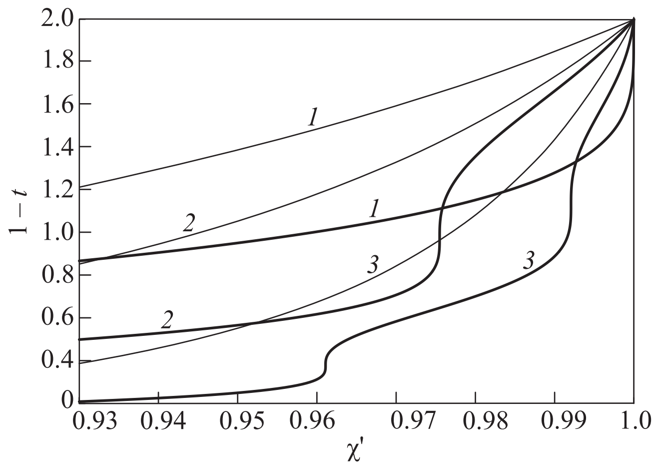

Рис. 1. Угловая переменная $1-t = 1-\cos\theta$ как функция кумулятивной вероятности χ' для моделей ХГ (тонкие линии) и РГ (толстые линии) в области χ' близких к единице: *1* – $g = 0.654$; *2* – $g = 0.786$; *3* – $g = 0.931$. В модели РГ этим значениям g, согласно (18), соответствуют $kR = 2.31$, 3.21 и 6.42

Обратное рассеяние в моделях ХГ и РГ. Для сравнения результатов рассеяния с фазовыми функциями ХГ и РГ мы выполнили численные расчеты угловой зависимости обратного рассеяния в плоскопараллельном слое, включая случай полупространства. В ХГ модели анизотропия рассеяния определяется параметром $g = \langle\cos\theta_s\rangle$ – средним косинусом угла рассеяния, а в модели РГ – параметром kR, связанным с g соотношением

$$g = \frac{4 - (kR)^{-2}\,\mathrm{Cin}(4kR)}{F(2kR)} - 3, \quad (18)$$

где $\mathrm{Cin}(x)$ – интегральный косинус. Параметр g, в свою очередь, связывает длину рассеяния $l_s = \mu_s^{-1}$ с транспортной длиной $l_{\mathrm{tr}} = l_s/(1-g)$.

Мы выбрали параметры среды, характерные для суспензии интралипида, используемой в качестве биомодели (биофантома) при моделировании биоткани [11]: длину волны $\lambda = 685$ нм и показатель преломления $n = 1.4$. Для системы твердых сфер с $R = 250$ нм величина $kR = 3.21$, и из (18) имеем $g = 0.786$. Эта пара параметров применяется далее при сравнительном анализе моделей ХГ и РГ.

На рис. 2 представлена угловая зависимость обратного рассеяния от полупространства с изотропной и анизотропными фазовыми функциями.

Для изотропной индикатрисы рассеяния с выборкой $N_{\mathrm{in}} = 10^6$, при ограничении числом актов рассеяния $n_{\mathrm{sc}} = 10^6$, используя экстраполяцию $n_{\mathrm{sc}} \to \infty$, мы получили интенсивность строго назад $J(1,1) \approx \approx 4.231$ в замечательном согласии с теоретическим

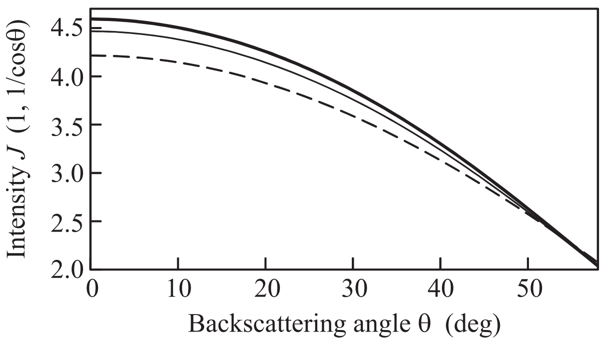

Рис. 2. Угловая зависимость интенсивности рассеянии от полупространства в заднюю полусферу. Угол θ отсчитывается от направления точно назад. Пунктирная линия – изотропное рассеяние. Тонкая линия – модель ХГ, а жирная – РГ, обе – для $g = 0.786$

результатом 4.228 [10, 9]. Для анизотропного рассеяния при $g = 0.786$ в модели ХГ получено $J(1,1) \approx \approx 4.49$, а в модели РГ – $J(1,1) = 4.61$ при соответствующем значении $kR \approx 3.21$. Отметим, что значения параметра анизотропии g, близкие к единице, требуют чрезвычайного увеличения порядка рассеяний $n_{\rm sc}$ из-за растущей доли вкладов высоких кратностей от удаленных областей, и как следствие увеличения объема выборки $N_{\rm in}$. Так, при $g = 0.931$ для расчета $J(1,1)$ с точностью до трех знаков использованы $N_{\rm in} = 3 \cdot 10^6$ и $n_{\rm sc} = 4.5 \cdot 10^6$ с применением экстраполяция $n_{\rm sc} \to \infty$ для уточнения третьего знака.

На рис. 3 представлена угловая зависимость интенсивности рассеяния от слоя толщиной в одну

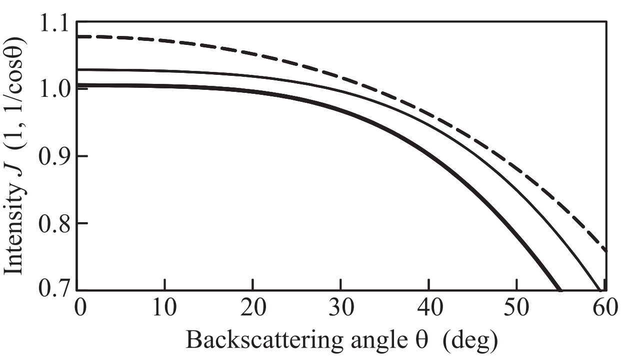

Рис. 3. То же, что на рис. 2 для слоя толщиной $T = l_{\rm tr}$

транспортную длину для двух фазовых функций. Видно, что различие фазовых функций при одинаковом параметре g приводит к разным значениям интенсивности рассеяния: разница медленно нарастает от 2.4 % до 3.0 % на углах 0°–30°, достигая 13 % на 60°. Укажем, что в случае толстых слоев индикатриса многократного рассеяния назад для изотропной фазовой функции оказывается ниже, а при переходе к тонким слоям – выше индикатрис для анизотропных фазовых функций, при этом индикатрисы для моделей ХГ и РГ также "меняются местами".

Угловая зависимость рассеяния определяется двумя факторами: анизотропией вытянутой вперед индикатрисы, которая приводит к усилению рассеяния с ростом угла обратного рассеяния, и фактором экстинкции $\exp(-\mu z_f/\cos\theta_f)$, который приводит к ослаблению рассеяния благодаря усилению экстинкции возвращающегося из среды под большими углами фотона. В случае тонких слоев доминирует первый механизм, приводя к усилению рассеяния с ростом обратного угла, а в случае толстых слоев указанный фактор экстинкции уменьшает интенсивность рассеяния на больших углах.

Для сопоставления с известными результатами при $g = 0$ и $g \to 1$ на рис. 2 и 3 приведены данные, рассчитанные в отсутствии внутреннего отражения на границе; в частности, такая ситуация искусственно создается в маммографии, проводя исследования на границе биоткань – вода.

Известно, однако, что в случае значительного скачка вклад внутреннего отражения необходимо учитывать [12]. В табл. 1 приведены численные значения интенсивности рассеянного точно назад излучения $J(1,1)$ для фазовых функций ХГ и РГ от полубесконечной среды и слоя толщиной в одну транспортную длину. Для полупространства видно прекрасное согласие с точным решением задачи Милна при $g = 0$. Для слоя $T = l_{\rm tr}$ в табл. 1 представлены результаты как без учета, так и с учетом внутреннего отражения на внешней границе слоя; для скачка показателя на границе мы выбрали значение $\Delta n = 0.4$, типичное на границе биоткань–воздух. Видно, что интенсивность обратно рассеянного излучения возрастает более чем вдвое благодаря многократным актам внутреннего отражения на границе в сравнении со случаем без отражения.

Отметим, что с ростом анизотропии значения интенсивности рассеяния от полупространства $J(1,1)$ для моделей РГ и ХГ все более различаются, что указывает на нарушение стандартного представления об универсальности описания многократного рассеяния в терминах $l_{\rm tr}$ и и g. В частности, при $g = 0.931$ и соответствующем значении $kR \approx 6.42$ в модели РГ мы получили $J(1,1) = 4.72$, что ближе к асимптотическому результату $J(1,1) = 4.8897\ldots$ при $g \to 1$ [13], чем к значению $J(1,1) = 4.53$, полученному в модели ХГ для того же g.

Заключение. На основе найденной в аналитической форме кумулятивной функции углового рас-

Таблица 1. Интенсивность $J(1,1)$ многократного рассеяния строго назад от полупространства и слоя толщиной $l_{\rm tr}$ для моделей ХГ и РГ

Параметры			Интенсивность		
g	kR	R (нм)	ХГ	РГ	Теория
Полупространство					
0	0	0	4.23	4.23	4.228
0.51	1.93	150	4.39	4.41	–
0.654	2.31	180	4.43	4.54	–
0.786	3.21	250	4.49	4.64	–
0.931	6.42	500	4.53	4.72	–
1	∞	∞	–	–	4.890
Слой толщиной $l_{\rm tr}$					
Без внутреннего отражения					
0	0	0	1.078	1.078	–
0.51	1.93	150	1.021	0.9923	–
0.654	2.31	180	1.022	1.013	–
0.786	3.21	250	1.028	1.006	–
0.931	6.42	500	1.042	1.003	–
С учетом внутреннего отражения					
0	0	0	2.061	2.061	–
0.51	1.93	150	2.420	2.315	–
0.654	2.31	180	2.499	2.429	–
0.786	3.21	250	2.558	2.318	–
0.931	6.42	500	2.610	2.291	–

пределения построен эффективный алгоритм МК в модели РГ, с помощью которого выполнено моделирование обратного рассеяния от слоев различной толщины, включая случай полупространства. Оказалось, что отношение интенсивностей рассеяния средой с изотропной индикатрисой и средами с сильно анизотропными индикатрисами ХГ или РГ изменяется на обратное при переходе от полупространства к слою толщиной порядка транспортной длины: интенсивность многократного рассеяния строго назад от полупространства для случая сильной анизотропии рассеяния превышает интенсивность для изотропного рассеяния, при этом интенсивность рассеяния в модели РГ превышает интенсивность в модели ХГ; в случае слоя с толщиной $T = l_{\rm tr}$ наименьшая интенсивность получена для анизотропного рассеяния в модели РГ, а наибольшая – для изотропной модели.

Отметим факт немонотонной зависимости интенсивности обратного рассеяния от параметра анизотропии рассеяния для слоя. Указанная немонотонность обусловлена возрастанием относительной доли однократного рассеяния с уменьшением толщины и может служить критерием обоснованности использования той или иной модели рассеяния.

Обычно интерпретацию измерений интенсивности многократного рассеяния проводят в рамках диффузионного приближения, которое дает универсальное описание, сводящееся к двум параметрам – транспортной длине $l_{\rm tr}$ и степени анизотропии g, или, что эквивалентно, к двум длинам: $l_{\rm tr}$ и $l_s = l_{\rm tr}(1-g)$ [14]. Как следует из нашего исследования, при одинаковых $l_{\rm tr}$ и g картина углового распределения для разных фазовых функций различается, и для количественной интерпретации результатов требуется конкретизация фазовой функции.

Работа частично поддержана РФФИ, грант #1 6-02-00465А. В.Л.К. также благодарит за поддержку СПбГУ (грант # 11.37.145.2014).

1. V. V. Tuchin, ed., *Handbook of Optical Biomedical Diagnostics*, 2nd ed. SPIE Publ., Bellingham, WA (2016).
2. T. Durduran, R. Choe, W. B. Baker, and A. G. Yodh, Rep. Prog. Phys. **73**, 076701 (2010).
3. В. В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, Физматлит, М. (2012).
4. T. Vo-Dinh, ed., *Biomedical Photonics Handbook, 2nd ed.*, CRC Press, N.Y. (2015), v. II.
5. D. Toublanc, Appl. Opt. **35**, 3270 (1996).
6. Q. Liu and F. Weng, Appl. Opt. **45**, 7475 (2006).
7. H. R. Gordon, Opt. Express **15**, 5572 (2007).
8. Е. Е. Городничев, С. Л. Дударев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **96**, 847 (1989).
9. V. L. Kuzmin, V. P. Romanov, and E. V. Aksenova, Phys. Rev. E **65**, 016601 (2001).
10. T. M. Nieuwenhuizen and J. M. Luck, Phys. Rev. E **48**, 569 (1993).
11. V. L. Kuzmin, M. T. Neidrauer, D. Diaz, and L. A. Zubkov, J. Biomed. Opt. **20**, 105006 (2015).
12. J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz, Phys. Rev. A **44**, 3948 (1991).
13. E. Amic, J. M. Luck, and T. M. Nieuwenhuizen, J. Physics A: Mathematical and General **29**, 4915 (1996).
14. В. Л. Кузьмин, В. П. Романов, Усп. физ. наук **166**, 247 (1996).