

# Динамика квантовых вихрей в квазидвумерном бозе-конденсате с двумя “дырами”

В. П. Рубан<sup>1)</sup>

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 7 февраля 2017 г.

После переработки 18 февраля 2017 г.

Рассмотрена в гидродинамическом приближении динамика взаимодействующих квантовых вихрей в квазидвумерном пространственно неоднородном бозе-конденсате, равновесная плотность которого обращается в ноль в двух точках плоскости, в каждой из точек возможно наличие неподвижного вихря с несколькими квантами циркуляции. Выбран специальный класс профилей плотности, так что с помощью конформного отображения плоскости на цилиндр удается аналитически вычислить поле скорости, создаваемое точечными вихрями. Уравнения движения представлены в неканонической гамильтоновой форме. Теория обобщена на случай, когда конденсат образует кривую квазидвумерную оболочку в трехмерном пространстве.

DOI: 10.7868/S0370274X17070086

**Введение.** Квантовые вихри и их динамика, как неотъемлемая часть физики бозе-конденсированных газов, стали предметом многочисленных исследований (см., [1–5] и ссылки там). Отдельного внимания в этой связи заслуживают квазидвумерные бозе-системы при нулевой температуре, поскольку в них теория вихрей может быть относительно простой. Волновая функция конденсата, прижатого внешним трехмерным потенциалом к плоскости  $\mathbf{x} = (x, y)$ , после “отщепления” поперечной координаты, вдоль которой квантовое движение заморожено, подчиняется двумерному уравнению Гросса–Питаевского (возможно, с неоднородным нелинейным коэффициентом). Здесь вихри – нули волновой функции – всего лишь точки на плоскости, в отличие от вихревых линий в трехмерных конденсатах. Циркуляция скорости вокруг каждого вихря равна  $\Gamma = 2\pi\hbar/m_{\text{atom}}$ . Аналогичные в математическом смысле объекты давно известны также в нелинейной оптике ([6] с ссылками). Динамика вихрей обычно происходит на пространственно неоднородном фоне равновесной двумерной плотности  $\rho(\mathbf{x})$ , профиль которой в случае бозе-газа определяется потенциалом ловушки. Достаточно протяженный квазидвумерный конденсат в режиме Томаса–Ферми с хорошей точностью описывается классической гидродинамической теорией мелкой воды над неровным дном с глубиной  $h(\mathbf{x}) \propto \rho(\mathbf{x})$ . Для построения компактной теории взаимодействующих вихрей важно, что в пределе боль-

ших расстояний между ними и малых скоростей их движения, когда потенциальные возмущения несущественны, движение “точечных” вихрей в классической гидродинамике подчиняется неканоническим гамильтоновым уравнениям вида [7, 8]

$$\Gamma \sigma_n \rho(\mathbf{x}_n) \dot{x}_n = \frac{\partial H(\{\mathbf{x}_n\})}{\partial y_n}, \quad -\Gamma \sigma_n \rho(\mathbf{x}_n) \dot{y}_n = \frac{\partial H(\{\mathbf{x}_n\})}{\partial x_n}, \quad (1)$$

где  $\sigma_n = \pm 1$  в зависимости от положительной либо отрицательной ориентации  $n$ -го вихря,  $H(\{\mathbf{x}_n\})$  – гамильтониан (кинетическая энергия) системы как функция положения всех вихрей. Поле скорости при этом удовлетворяет условию  $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ , так что в двумерном пространстве  $\rho V_x = \partial_y \psi$ ,  $\rho V_y = -\partial_x \psi$ , где  $\psi(\mathbf{x})$  – функция тока. Завихренность течения  $\omega = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ , т.е. функции  $\psi$  и  $\omega$  связаны линейным уравнением

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Для системы “точечных” вихрей завихренность  $\omega(\mathbf{x}) \approx \Gamma \sum_n \sigma_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$ . Таким образом, естественно возникает необходимость вычислить функцию Грина, т.е. решить уравнение [1–4, 6, 8]:

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 2\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3)$$

Гамильтониан вихрей просто выражается через  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ . Действительно, если плотность нигде не обращается в ноль, то

<sup>1)</sup>e-mail: ruban@itp.ac.ru

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{V}^2 d^2 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \frac{(\nabla_{\mathbf{x}} \psi)^2}{\rho(\mathbf{x})} d^2 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \psi \omega d^2 \mathbf{x} = \\
&= \frac{\Gamma^2}{4\pi} \sum_n F(\mathbf{x}_n) + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \sum_{m,n}' \sigma_n \sigma_m G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m). \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь штрих у знака двойной суммы означает, что слагаемые с  $m = n$  должны быть пропущены. Диагональные слагаемые подвергаются регуляризации по причине логарифмической расходимости двумерной функции Грина при близких аргументах:  $F(\mathbf{x}_n) = G(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n + \mathbf{e}\xi(\mathbf{x}_n))$ , где  $\xi(\mathbf{x})$  – ширина кора вихря, предположительно малая по сравнению с характерным масштабом неоднородности  $R_*$ . Как в теории мелкой воды, так и в уравнении Гросса–Питаевского (при условии, что эффективный нелинейный коэффициент – константа) размер  $\xi$  одинаково зависит от локальной плотности/глубины:  $\xi(\mathbf{x}) = \xi_* [\rho_0/\rho(\mathbf{x})]^{1/2}$ ,  $\Lambda = \log(R_*/\xi_*) \gg 1$ .

Таким образом, задача вычисления гамильтониана системы точечных вихрей свелась к решению уравнения (3). Сделав в нем подстановку  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sqrt{\rho(\mathbf{x})} \sqrt{\rho(\mathbf{x}_0)} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ , мы приходим к уравнению вида [1, 3, 6]:

$$[-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \tilde{\kappa}^2(\mathbf{x})]g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 2\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (5)$$

где коэффициент  $\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x}) = \sqrt{\rho}\nabla_{\mathbf{x}}^2(1/\sqrt{\rho})$ . В большинстве случаев решения не могут быть представлены в явном виде, за несколькими исключениями. В частности, если  $\tilde{\kappa}^2(\mathbf{x}) = \text{const} = \kappa^2$ , то возможные профили плотности даются выражением

$$\rho_{\kappa} = \left[ \int_0^{2\pi} C(\varphi) \exp(\kappa x \cos \varphi + \kappa y \sin \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \right]^{-2}, \quad (6)$$

в котором  $C(\varphi)$  – произвольная неотрицательная функция. Любая из функций  $\rho_{\kappa}$  имеет единственный максимум и не обращается в ноль в конечных точках. При этом функция Грина есть

$$G_{\kappa}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{\rho_{\kappa}(\mathbf{x}_1)\rho_{\kappa}(\mathbf{x}_2)} K_0(\kappa|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (7)$$

где  $K_0(\dots)$  – соответствующая модифицированная функция Бесселя. Кроме этого класса профилей плотности, точная функция Грина найдена для линейной зависимости ( $\rho = x$  при  $x > 0$ ) в работе [3], а также для гауссовой плотности в [8].

Цель данной работы – рассмотреть еще одно, ранее не исследованное семейство зависимостей  $\rho(\mathbf{x})$ , для которого функция Грина находится точно. В частности, в определенной области параметров, это будет конденсат в форме неоднородной плоской “шайбы с дырой” (т.е. кольцо). Поскольку теперь

плотность будет обращаться в ноль не только на бесконечности, появится возможность поместить в конечные нулевые точки по несколько квантов циркуляции и детально изучить их влияние на движение вихрей. Другими словами, развиваемый здесь подход применим к широкому кругу актуальных задач, связанных с так называемыми гигантскими вихрями ([9–14] и ссылки там).

Кроме того, здесь будет сделано обобщение теории на тот случай, когда квазидвумерный бозеконденсат не плоский, а расположен вдоль кривой поверхности в трехмерном пространстве (например, на сфере, эллипсоиде или на торе [15–18]). В классической гидродинамике аналогом такой ситуации является движение вихрей в океане переменной глубины на круглой планете. В отличие от подробно изученной динамики вихрей в однородном слое жидкости на кривых поверхностях ([19–24] и многочисленные ссылки там), последовательная теория вихрей в неоднородном кривом слое до сих пор отсутствовала.

**Модель конденсата с двумя “дырами”.** Итак, мы обращаемся к качественно более сложной по сравнению с (6) ситуации, когда плотность конденсата обращается в ноль в двух точках расширенной плоскости (сама плоскость плюс бесконечно удаленная точка). Чтобы иметь удобный для аналитического и численного исследования пример, определим комплексную переменную  $z = x + iy$  и рассмотрим следующий специальный класс профилей плотности с двумя “дырами”:

$$\rho(\mathbf{x}) = 4 \left( \left| \frac{Az}{1-Bz} \right|^{\alpha} + \left| \frac{1-Bz}{Az} \right|^{\alpha} \right)^{-2}, \quad (8)$$

где параметры  $\alpha > 0$ ,  $A > 0$ ,  $B \geq 0$ . Введем на плоскости  $\mathbf{x}$  криволинейные конформные координаты  $\mathbf{u} = (u, v)$  с помощью аналитической функции

$$u + iv \equiv w = \ln(Az/[1-Bz]). \quad (9)$$

Обратное отображение дается выражением

$$z = 1/[Ae^{-w} + B], \quad (10)$$

причем координаты  $(u, v)$  расположены на цилиндре:  $u \in (-\infty : +\infty)$ ,  $v \in [0 : 2\pi)$ . Якобиан этого отображения

$$J(\mathbf{u}) = |Ae^{-w}/(Ae^{-w} + B)|^2. \quad (11)$$

В новых координатах плотность задается формулой

$$\rho(\mathbf{u}) = \rho(u) = 1/\cosh^2(\alpha u). \quad (12)$$

Обезразмеренные уравнения движения вихрей в терминах  $\mathbf{u}_n$  имеют вид

$$\sigma_n J(\mathbf{u}_n) \rho(u_n) \dot{u}_n = \partial \tilde{H}_\alpha / \partial v_n, \quad (13)$$

$$-\sigma_n J(\mathbf{u}_n) \rho(u_n) \dot{v}_n = \partial \tilde{H}_\alpha / \partial u_n. \quad (14)$$

Уравнение функции Грина в конформных переменных сохраняет простую структуру

$$-\nabla_{\mathbf{u}} \frac{1}{\rho(u)} \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = 2\pi \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (15)$$

Оно дополняется  $2\pi$ -периодическими граничными условиями по координате  $v$ , нулевой асимптотикой при  $u \rightarrow +\infty$ , а также условием отсутствия циркуляции скорости вокруг точки  $z = 0$ , что означает

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\partial_u G(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)}{\rho(u)} = 0. \quad (16)$$

Решение находится путем подстановки

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = g_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) / [\cosh(\alpha u) \cosh(\alpha u_0)]. \quad (17)$$

Функция  $g_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)$  удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами,

$$[-\nabla_{\mathbf{u}}^2 + \alpha^2] g_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = 2\pi \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (18)$$

Нужное решение есть

$$g_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) = \mathbf{g}(u - u_0, v - v_0) + \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(u+u_0)}, \quad (19)$$

где четная по обоим своим переменным функция  $\mathbf{g}(U, V)$  определяется быстро сходящейся бесконечной суммой

$$\mathbf{g}(U, V) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K_0 \left( \alpha \sqrt{U^2 + (V + 2\pi l)^2} \right). \quad (20)$$

Заметим, что при больших значениях  $|U|$  имеет место приближенное равенство  $\mathbf{g}(U, V) \approx \exp(-\alpha|U|)/2\alpha$ , которое позволяет легко убедиться в выполнении условия (16). При малых же значениях аргументов получаем  $\mathbf{g}(U, V) \approx \ln(1/\sqrt{U^2 + V^2}) + \text{const}$ .

**Гамильтониан.** Составляя гамильтониан вихрей с помощью найденной функции Грина, можно учесть наличие произвольного целого числа  $Q_0$  квантов циркуляции скорости вокруг точки  $z = 0$  путем соответствующего изменения асимптотического условия на функцию тока при  $u \rightarrow -\infty$ . Заметим также, что при  $B \neq 0$  несколько вихрей ( $|Q_\infty|$  штук) можно поместить в окрестность точки  $w_\infty = \ln(A/B) + i\pi$ , которая соответствует  $z = \infty$ . Поскольку якобин  $J$  там обращается в бесконечность, то из уравнений движения (13), (14) следует, что эти вихри будут оставаться неподвижными в точке  $(u_\infty, \pi)$ . Тем самым

можно добиться произвольных (целочисленных) значений  $Q_0$  и  $Q_1$  квантов циркуляции вокруг каждой из двух конечных нулевых точек плотности  $z_0 = 0$  и  $z_1 = 1/B$ , так как целые числа  $Q_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_\infty$  связаны между собой соотношением

$$Q_0 + Q_1 + Q_\infty + \sum_{n=1}^N \sigma_n = 0, \quad (21)$$

где  $N$  – число подвижных вихрей. В результате безразмерный гамильтониан дается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha^{\{N\}} = & \frac{1}{2} \sum_n \frac{\Lambda_0 + \ln[\sqrt{(J(\mathbf{u}_n)/J_0)/\cosh(\alpha u_n)}]}{\cosh^2(\alpha u_n)} + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left\{ Q_0 + \frac{Q_\infty}{(1 + e^{2\alpha u_\infty})} + \sum_n \frac{\sigma_n}{(1 + e^{2\alpha u_n})} \right\}^2 + \\ & + \sum_{n,m}' \frac{\sigma_n \sigma_m}{2} \frac{\mathbf{g}(u_n - u_m, v_n - v_m)}{\cosh(\alpha u_n) \cosh(\alpha u_m)} + \\ & + Q_\infty \sum_n \sigma_n \frac{[\mathbf{g}(u_n - u_\infty, v_n - \pi)]}{\cosh(\alpha u_n) \cosh(\alpha u_\infty)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\Lambda_0 = \mathbf{g}(\xi_*/\sqrt{J(0)}, 0) \gg 1$  – большой логарифм. Для применимости этой формулы необходимо, чтобы все числители в первой сумме были не малы по сравнению с единицей. В противном случае приближение точечного вихря не работает.

Во всех численных примерах, представленных далее, мы полагаем  $\Lambda_0 = 7.0$ ,  $\alpha = 2.0$ , а все вихри имеют положительный знак, т.е.  $\sigma_n = +1$ .

Чтобы увидеть качественное отличие данной системы от систем типа (6), рассмотрим для начала динамику единственного вихря. Траектории вихря на плоскости являются линиями уровня гамильтониана (22) при  $N = 1$ . Два примера фазовых портретов для различных наборов параметров  $A$ ,  $B$ ,  $Q_0$  и  $Q_1$  показаны на рис. 1.

**Осесимметричный случай.** Если  $B = 0$ , то система становится осесимметричной: якобин  $J(u)$  не зависит от угловой координаты  $v = \phi$ , и гамильтониан вихрей (22) инвариантен относительно одновременного сдвига по всем переменным  $v_n$ . Поэтому появляется еще один интеграл движения, помимо гамильтониана – угловой момент

$$M = \sum_n \sigma_n \mu(u_n), \quad \mu(u) = \int_{-\infty}^u J(s) \rho(s) ds. \quad (23)$$

Можно без ограничения общности положить  $A = 1$ , и тогда

$$\mu(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^{2s} ds}{\cosh^2(\alpha s)} = -\frac{2}{\alpha} \frac{e^{2u}}{1 + e^{2\alpha u}} + \frac{2}{\alpha} \int_0^{e^{2u}} \frac{d\chi}{1 + \chi^\alpha}. \quad (24)$$

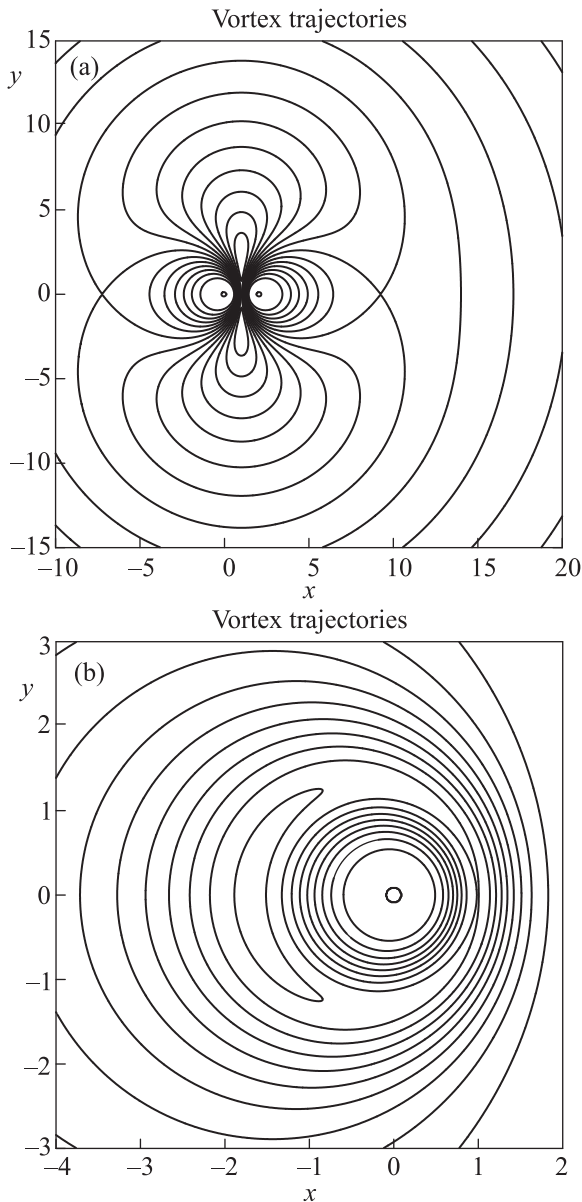


Рис. 1. Примеры траекторий одиночного вихря на плоскости для двух наборов параметров. (а) –  $A = B = 0.5$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $Q_1 = 1$ . (б) –  $A = 0.8$ ,  $B = 0.2$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $Q_1 = 0$

При рациональных значениях параметра  $\alpha$  интеграл выражается в элементарных функциях.

Наличие второго закона сохранения делает задачу движения двух вихрей интегрируемой. Примеры проекций фазовых траекторий системы двух вихрей на плоскость  $(\phi_2 - \phi_1, u_1)$  при фиксированном  $M$  представлены на рис. 2, из которого, в частности, следует, что при  $Q_0 = 0$  диаметрально расположенные вихри вблизи максимума плотности находятся в неустойчивом относительном равновесии.

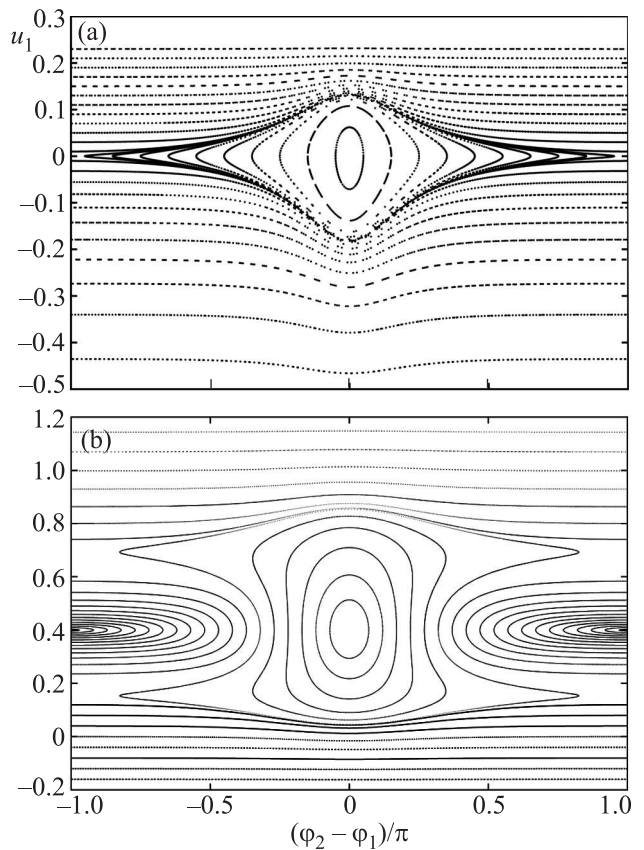


Рис. 2. Фазовые траектории двух вихрей при  $Q_0 = 0$  для двух значений углового момента. (а) –  $M = 2\mu(0)$ . (б) –  $M = 2\mu(0.4)$

Кроме того, при осевой симметрии становятся возможными “твердотельно” вращающиеся конфигурации  $N$  вихрей, соответствующие локальным минимумам функции  $\tilde{H}_\alpha^{(N)} + \Omega M$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения. Примеры показаны на рис. 3. Видно, что не всегда в равновесии вихри располагаются вблизи концентрических окружностей. Следует также отметить, что с увеличением скорости вращения вихри покидают область максимальной плотности и скапливаются внутри кольца, что качественно соответствует формированию гигантского вихря.

Динамика при  $N \geq 3$  в широкой области начальных значений проявляет признаки хаоса. Хаотичность обусловлена формированием достаточно тесных и поэтому быстро вращающихся пар вихрей (одного знака). Сам факт образования пары, период ее существования, размер, фаза вращения и другие характеристики оказываются практически непредсказуемыми из-за взаимодействия с остальными вихрями. Численный пример поведения пяти вихрей дан на рис. 4.

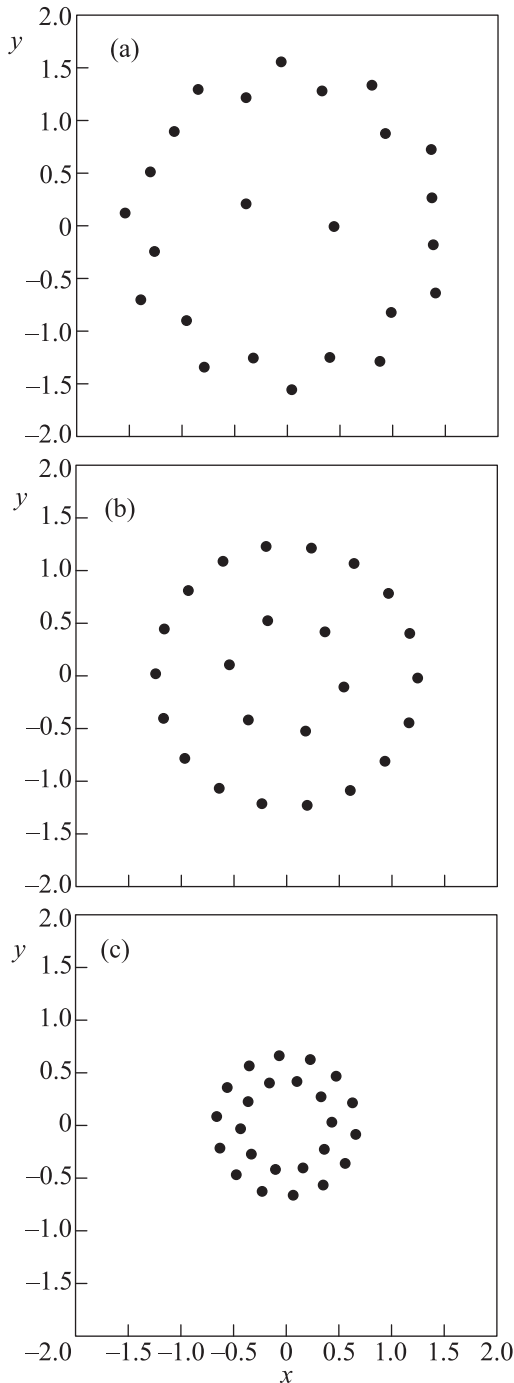


Рис. 3. Примеры стационарно вращающихся конфигураций  $N = 24$  вихрей при  $Q_0 = 12$  с разными угловыми скоростями. (а) –  $\Omega = 15$ . (б) –  $\Omega = 20$ . (с)  $\Omega = 50$

**Вихри на кривой поверхности.** Можно представить себе ситуацию, когда трехмерный потенциал ловушки устроен в виде узкого кривого “ущелья”, так что в равновесии бозе-конденсат оказывается (неравномерно) прижат к плоскости, как до сих пор предполагалось, а образует относительно

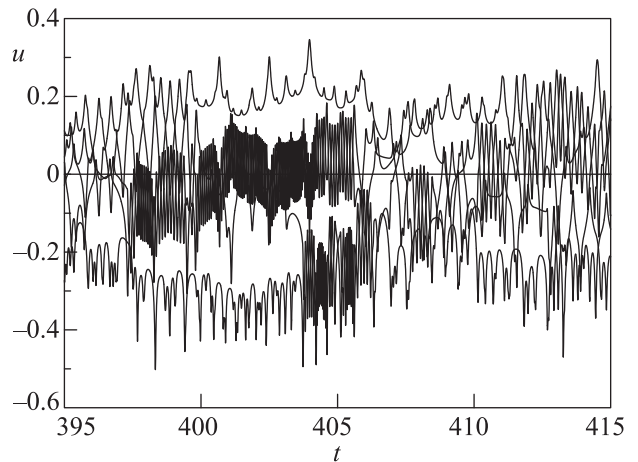


Рис. 4. Хаотическая динамика 5-ти вихрей при  $Q_0 = 0$

тонкий слой вблизи некоторой искривленной поверхности в трехмерном пространстве [15–17]. В частности, были экспериментально реализованы оболочки эллипсоидальной формы [18]. Интересным обобщением вышеприведенной теории является описание динамики квантовых вихрей в подобных системах, если понимать переменные  $u$  и  $v$  как конформные координаты на кривой поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{S}(u, v)$ . Нетрудно убедиться в том, что уравнения движения (13) и (14) для  $u_n$  и  $v_n$  сохраняют свою структуру, равно как и гамильтониан (22) [с возможным ограничением  $Q_\infty = 0$  – в зависимости от типа поверхности]. Существенная разница состоит в том, что функция  $J(\mathbf{u})$  теперь не является квадратом модуля аналитической функции  $z'(w)$ , а представляет собой достаточно произвольный конформный фактор. Другими словами, метрика на поверхности есть

$$(d\mathbf{S})^2 = J(\mathbf{u})(du^2 + dv^2). \quad (25)$$

Рассмотрим в качестве примера единичную сферу, стереографическая проекция которой на плоскость определяется формулой

$$z + c = \tan(\Theta/2)e^{i\Phi}, \quad (26)$$

где  $\Theta$  – полярный угол на сфере,  $\Phi$  – азимутальный угол,  $c$  – произвольная комплексная константа. При этом конформный фактор в переменных  $\mathbf{x}$  есть

$$J(\mathbf{x}) = 4/(1 + |x + iy + c|^2)^2. \quad (27)$$

Заметим попутно, что именно такой множитель должен быть добавлен в левые части уравнений (1), если для описания динамики вихрей на сфере выбраны переменные  $x$  и  $y$ . Соответственно, с использованием  $J(\mathbf{x})$  должны быть регуляризованы логарифмически расходящиеся члены в гамильтониане.

Конформный фактор в переменных  $\mathbf{u}$  равен произведению  $J(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \cdot |z'(w)|^2$ , что в нашем случае дает

$$J(\mathbf{u}) = \frac{4A^2 e^{-2u}}{\{|Ae^{-w} + B|^2 + |c(Ae^{-w} + B) + 1|^2\}^2}. \quad (28)$$

Поскольку в бесконечность это выражение нигде не обращается, то все вихри на сфере при конечных  $u$  являются подвижными и поэтому в гамильтониане (22) должно быть  $Q_\infty = 0$ .

Формула (28) сильно упрощается при  $B = 0$ ,  $c = 0$ , т.е. при наличии осевой симметрии:  $J(\mathbf{u}) = 1/\cosh^2(u - u_{\text{eq}})$ , причем  $u = u_{\text{eq}}$  соответствует экватору. Как и в плоском случае, осевая симметрия подразумевает сохранение углового момента.

Интересно отметить, что даже в случае  $u_{\text{eq}} = 0$ , когда профиль двумерной плотности симметричен относительно экваториальной плоскости, гамильтониан нечетного числа вихрей все равно не обладает симметрией по отношению к замене  $u_n \rightarrow -u_n$ , поскольку целочисленные кванты циркуляции скорости вокруг полюсов не могут быть равными из-за условия  $Q_{\text{North}} + Q_{\text{South}} + \sum_n \sigma_n = 0$ .

**Заключение.** Таким образом, в данной работе предложена новая, относительно простая, математически удобная и довольно “богатая” модель, которая позволяет далеко продвинуться в понимании механики вихрей в пространственно неоднородных двумерных системах. Приведен ряд содержательных численных примеров. Меняя параметры модели, можно будет исследовать еще многие другие ситуации, приближенно соответствующие различным реальным экспериментам. В частности, за рамками данной статьи остались нелинейные колебания многих вихрей вблизи стационарных конфигураций, а также динамика противоположно ориентированных вихрей.

По всей видимости, многие качественные свойства найденной здесь модельной функции Грина имеют место и для более широкого класса зависимостей  $\rho(u)$ , когда в уравнении (18)  $\alpha^2 \neq \text{const}$ . Этот вопрос нуждается в отдельном исследовании.

1. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000).

2. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, J. Phys.: Condens. Matter **13**, R135 (2001).
3. J. R. Anglin, Phys. Rev. A **65**, 063611 (2002).
4. D. E. Sheehy and L. Radzihovsky, Phys. Rev. A **70**, 063620 (2004).
5. A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
6. B. Y. Rubinstein and L. M. Pismen, Physica D **78**, 1 (1994).
7. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **64**, 036305 (2001).
8. В. П. Рубан, ЖЭТФ **151**, 1 (2017); arXiv:1612.00165 [cond-mat.quant-gas].
9. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. A **66**, 053606 (2002).
10. S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **95**, 143201 (2005).
11. H. Fu and E. Zaremba, Phys. Rev. A **73**, 013614 (2006).
12. C. Ryu, M. F. Andersen, P. Cladé, V. Natarajan, K. Helmerson, and W. D. Phillips, Phys. Rev. Lett. **99**, 260401 (2007).
13. A. Ramanathan, K. C. Wright, S. R. Muniz, M. Zelan, W. T. Hill, III, C. J. Lobb, K. Helmerson, W. D. Phillips, and G. K. Campbell, Phys. Rev. Lett. **106**, 130401 (2011).
14. S. Moulder, S. Beattie, R. P. Smith, N. Tammuz, and Z. Hadzibabic, Phys. Rev. A **86**, 013629 (2012).
15. O. Zobay and B. M. Garraway, Phys. Rev. Lett. **86**, 1195 (2001).
16. O. Zobay and B. M. Garraway, Phys. Rev. A **69**, 023605 (2004).
17. T. Fernholz, R. Gerritsma, P. Krüger, and R. J. C. Spreeuw, Phys. Rev. A **75**, 063406 (2007).
18. B. E. Sherlock, M. Gildemeister, E. Owen, E. Nugent, and C. J. Foot, Phys. Rev. A **83**, 043408 (2011).
19. D. G. Dritschel and S. Boatto, Proc. R. Soc. A **471**, 20140890 (2015).
20. P. K. Newton, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 137 (2010).
21. R. B. Nelson and N. R. McDonald, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 157 (2010).
22. Y. Kimura, Proc. R. Soc. A **455**, 245 (1999).
23. A. Surana and D. Crowdy, J. Comput. Phys. **277**, 6058 (2008).
24. A. M. Turner, V. Vitelli, and D. R. Nelson, Rev. Mod. Phys. **82**, 1301 (2010).