Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 1, с. 14 – 20 © 2017 г. 10 июля

Атомарный конденсат в оптической ловушке, образованной модой резонатора

Л. В. Ильичев[1)]

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 22 мая 2017 г.

После переработки 1 июня 2017 г.

Показано, что оптическая ловушка для атомарного конденсата, сформированная модой кольцевого резонатора, обладает специфическими свойствами. Они отсутствуют в ловушке, образованной свободными пучками, и обусловлены возникновением квантовых корреляций (зацепленности) между локализованными атомами и фотонной модой. В частности, имеет место эффект, близкий к известному оптомеханическому явлению “оптической пружины” (S. Martellucci et al., *Bose-Einstein Condensates and Atom Lasers*, Kluwer Acad. Publ. (2002)) и проявляющийся через возникновение эффективной добавки к межатомному взаимодействию локализованных атомов. Значением и знаком этой добавки можно управлять, варьируя частоту источника излучения, формирующего ловушку.

DOI: 10.7868/S0370274X17130033

Введение. Создание перспективных квантовых технологий на основе атомарных бозе-конденсатов нуждается в эффективных инструментах его контроля [1]. В настоящее время одним из основных инструментов контроля конденсатов являются дипольные оптические ловушки на основе фокусированных световых пучков с большой отстройкой от атомного резонанса. Такие ловушки позволяют управлять формой конденсата, разделять единый конденсат на отдельные фрагменты, контролировать их взаимодействие с внешними полями, наблюдать интерференцию фрагментов конденсата между собой.

Теория конденсатов в дипольных оптических ловушках строится в предположении консервативного оптического потенциала. Выбор такой модели обоснован малой вероятностью возбуждения атомов в нерезонансном электромагнитном поле ловушки. Важным следствием такой модели ловушки является то, что присутствие атомов не модифицирует поле ловушки и оптический потенциал считается заданным.

Малая вероятность возбуждения атомов в нерезонансном поле ловушки контролируется параметром $(\Gamma/\Delta_{\rm at})^2$, где Γ – ширина атомного резонанса, $\Delta_{\rm at}$ – отстройка частоты электромагнитного поля от частоты атомного резонанса [2]. С другой стороны, добавка к фазе электромагнитного поля ловушки из-за присутствия атомов контролируется, как известно, параметром $\Gamma/\Delta_{\rm at}$ [3]. Таким образом, в оптических ловушках можно обеспечить одновременно малую вероятность возбуждения атомов и значительную добавку к фазе электромагнитного поля ловушки. Важно, что оптический потенциал традиционных оптических ловушек практически не зависит от вариаций фаз оптических полей, вызванных присутствием атомов в ловушке.

В настоящей работе мы исследуем новый тип нерезонансных оптических ловушек, в которых эффекты вариаций фазы поля из-за присутствия атомов существенно влияют на оптический потенциал, удерживающий атомы в ловушке. Это достигается тем, что минимум оптического потенциала формируется не перетяжкой свободного пучка излучения, а бегущей модой кольцевого резонатора (рис. 1). Новые эффекты физики ультрахолодных атомов при их помещении в кольцевой оптический резонатор уже обсуждались в литературе, например, сверхизлучательное рэлеевское рассеяние [4, 5] и динамическая нестабильность атомов [6]. В работе [7] предсказывается эффект подавления спонтанного испускания коллектива атомов в кольцевом резонаторе при рассеянии двухчастотного излучения.

Новым моментом в нашей работе является рассмотрение оптической моды кольцевого резонатора как квантовой системы вместе со своим источником и механизмом необратимой потери фотонов. Собственная частота моды определяется оптической длиной резонатора и зависит от захваченных в ловушку ато-

1)e-mail: leonid@iae.nsk.su

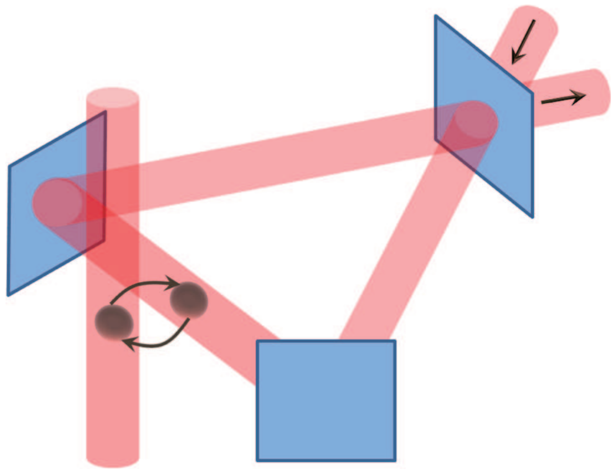

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема наблюдения эффекта. Две части бозе-конденсата находятся в области перетяжки фотонной моды резонатора и в поле бегущей волны, примерно, такой же интенсивности и конфигурации

мов. Частота излучения в резонаторе задается частотой излучения внешнего источника. Появляющаяся новая величина, отстройка Δ частоты моды резонатора и частоты излучения внешнего источника, становится дополнительным параметром контроля конденсата. Рассматриваемые в работе новые свойства атомарного конденсата, захваченного такой ловушкой, обусловлены его квантовой зацепленностью с оптической модой кольцевого резонатора.

Наиболее важным обнаруженным свойством является возможность нового перспективного метода контроля межатомного взаимодействия в конденсате. Расширение арсенала средств такого контроля весьма актуально. Простейшим вариантом является перестройка формы потенциала ловушки, меняющая плотность конденсата и, следовательно, среднее расстояние между атомами. В большей степени он применяется для модификации туннелирования между различными минимумами потенциала [8, 9]. Наиболее распространенным и универсальным средством контроля межатомного взаимодействия служит резонанс Фешбаха [10]. Главное его достоинство состоит в возможности менять с помощью постоянного магнитного поля знак длины рассеяния, определяющей межатомное взаимодействие в конденсате. Недостатком является сложность адресной модификации взаимодействия атомов, локализованных в окрестности одного из нескольких близких минимумов потенциала. Данного недостатка в определенной степени лишен предлагаемый метод. В нем не происходит реального контроля длины рассеяния, а своего рода его имитация. Данное обстоятельство роднит предсказываемый эффект с известным оптомеханическим явлением "оптической пружины" [11, 12].

Атомарный конденсат в поле квантованной резонаторной моды. Первым объектом рассмотрения служит модель конденсата *невзаимодействующих* атомов в минимуме оптического потенциала, сформированного квантованной модой резонатора. Гамильтониан атомов в представлении вторичного квантования

$$\hat{H}_{\mathrm{at}} = \int \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_{\mathbf{r}} + \hbar\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,U(\mathbf{r})\Big)\hat{\psi}(\mathbf{r})d^3r \quad (1)$$

включает в себя оператор кинетической энергии (первое слагаемое) и потенциальную энергию взаимодействия с излучением. Функция $\hbar U(\mathbf{r})$ является потенциалом ловушки при одном фотоне в моде резонатора. В общем случае потенциал пропорционален числу фотонов $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$, $\hat{a}$ ($\hat{a}^{\dagger}$) – оператор уничтожения (рождения) фотона в моде.

Атомарный ψ-оператор [13] удобно разложить по отдельным колебательным модам:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_k \phi_k(\mathbf{r})\hat{b}_k, \quad (2)$$

где $\hat{b}_k$ – оператор уничтожения атома в моде с номером k, а $\{\phi_k(\mathbf{r})\}_k$ – ортонормированная система конфигурационных функций колебательных мод. Каждая из этих функций является решением стационарного уравнения Шредингера в поле ловушки при некотором фиксированном среднем числе фотонов в моде излучения:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_{\mathbf{r}}\phi_k(\mathbf{r}) + \hbar\,\overline{n}_{\mathrm{ph}}U(\mathbf{r})\phi_k(\mathbf{r}) = E_k\phi_k(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где E_k – энергия k-го колебательного уровня. Выбор среднего числа фотонов $\overline{n}_{\mathrm{ph}}$ будет обсужден далее. На данном этапе рассмотрения отметим следующие соображения о роли этого среднего числа, связанные с переходом к фиксированной системе мод. Гамильтониан атомов можно записать в виде

$$\hat{H}_{\mathrm{at}} = \hat{H}_{\mathrm{at}}^{(0)} + \hbar\,\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\sum_{k,l} U_{kl}\hat{b}_k^{\dagger}\hat{b}_l, \quad (4)$$

где

$$U_{kl} = \int \phi_k^*(\mathbf{r})U(\mathbf{r})\phi_l(\mathbf{r})d^3r \quad (5)$$

– матрица параметров, отвечающих за переходы между модами, а часть, не содержащая фотонные операторы,

$$\hat{H}_{\mathrm{at}}^{(0)} = \sum_{k,l}(E_k\delta_{k,l} - \hbar\,\overline{n}_{\mathrm{ph}}U_{kl})\hat{b}_k^{\dagger}\hat{b}_l. \quad (6)$$

Комбинация последнего члена из (4) и второго слагаемого в $\hat{H}_{\rm at}^{(0)}$ описывает вклад в атомный гамильтониан флуктуаций числа фотонов в моде. Следует предположить, что чем меньше эти флуктуации в сравнении с $\overline{n}_{\rm ph}$, тем более точно можно описать систему атомов в терминах небольшого числа колебательных мод. Поскольку матрица коэффициентов (5) – эрмитова ($U_{kl} = U_{lk}^*$), сумма по модам во втором члене (4) может быть преобразована к диагональному виду

$$\sum_{k,l} U_{kl}\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l = \sum_k u_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k, \tag{7}$$

в котором новые операторы удовлетворяют стандартным бозевским соотношениям коммутации $[\hat{B}_k, \hat{B}_l^\dagger] = \delta_{k,l}$ и являются некоторым линейным унитарным преобразованием системы операторов $\{\hat{b}_k\}_k$, u_k – действительные собственные числа матрицы U.

Операторы чисел атомов в новых "больших" модах $\hat{N}_k \doteq \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k$ с точки зрения моды резонатора определяют сдвиг ее частоты. В кинетическом уравнении для статистического оператора системы атомов и фотонов

$$\frac{d}{dt}\hat{\varrho} = -\frac{\imath}{\hbar}[\hat{H}_{\rm at}^{(0)}, \hat{\varrho}] + \Lambda_{\rm ph}^{(1)}[\hat{\varrho}] \tag{8}$$

операторы $\hat{N}_k$ фигурируют в фотонном лиувиллиане

$$\Lambda_{\rm ph}^{(1)}[\hat{\varrho}] =$$

$$= -\imath\Delta[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}] - \imath\sum_k u_k[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{N}_k, \hat{\varrho}] + \Omega[\hat{a}^\dagger - \hat{a}, \hat{\varrho}] + \tag{9}$$

$$+ 2\gamma\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \gamma\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \gamma\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

Верхний индекс лиувиллиана указывает на появление или исчезновение единичного фотона в каждом акте взаимодействия моды с источником (третье слагаемое в правой части). Здесь уже исключена явная гармоническая зависимость от времени поля классического внешнего источника с амплитудой $\propto \Omega$, возбуждающего моду; Δ – расстройка частоты моды и частоты внешнего источника. Последние три слагаемых отвечают за необратимый уход фотонов из резонатора (γ – скорость этого ухода).

Взаимодействие между атомами и излучением порождает корреляции (квантовую зацепленность) между состоянием фотонной подсистемы и состоянием системы атомов. В базисе Фока $\{|\mathbf{N}\rangle\}$ ($\mathbf{N} \doteq \{N_1, N_2, \ldots\}$) по числам атомов в "больших" модах статистический оператор всей системы имеет вид

$$\hat{\varrho} = \sum_{\mathbf{N},\mathbf{N}'} \rho(\mathbf{N},\mathbf{N}')|\mathbf{N}\rangle\langle\mathbf{N}'| \otimes \hat{\varrho}_{\rm ph}(\mathbf{N},\mathbf{N}'). \tag{10}$$

Здесь фигурируют операторы $\hat{\varrho}_{\rm ph}(\mathbf{N},\mathbf{N}')$ фотонной подсистемы, в явном виде отражающие наличие упомянутых корреляций.

Общее решение уравнения (8) получить не удается. Поэтому целесообразно обратиться к ситуациям, допускающим приближенное решение. Будем считать, что фотонная подсистема является быстрой и ее эволюция адиабатически подчинена эволюции более медленной подсистемы атомарного конденсата. Это означает, что быстрый этап эволюции описывается лиувиллианом $\Lambda_{\rm ph}^{(1)}$ и завершается формированием "подчиненного" фотонного состояния. Для установления вида указанного состояния рассмотрим действие лиувиллиана. Применение его к операторным фрагментам слагаемых из суммы (10) дает

$$\Lambda_{\rm ph}^{(1)}[|\mathbf{N}\rangle\langle\mathbf{N}'| \otimes \hat{\varrho}_{\rm ph}(\mathbf{N},\mathbf{N}')] =$$

$$= |\mathbf{N}\rangle\langle\mathbf{N}'| \otimes \Lambda_{\rm ph}^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}')[\hat{\varrho}_{\rm ph}(\mathbf{N},\mathbf{N}')]. \tag{11}$$

Действие введенного в (11) супероператора $\Lambda_{\rm ph}^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}')$, который относится уже только к фотонной подсистеме, очевидным образом следует из структуры (9) заменой второго коммутатора на разность $\hat{a}^\dagger\hat{a}N_k\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}N_k'$. При определенных значениях чисел атомов в "больших" модах быстрая эволюция фотонной моды завершается глауберовским когерентным состоянием:

$$\Lambda_{\rm ph}^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N})[|\alpha(\mathbf{N})\rangle\langle\alpha(\mathbf{N})|] = 0, \tag{12}$$

где

$$\alpha(\mathbf{N}) = \frac{\Omega}{\imath(\Delta + \sum_k u_k N_k) + \gamma}. \tag{13}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении естественным выбором для операторов $\hat{\varrho}_{\rm ph}(\mathbf{N},\mathbf{N}')$ из (10) является следующий:

$$\hat{\varrho}_{\rm ph}(\mathbf{N},\mathbf{N}') = |\alpha(\mathbf{N})\rangle\langle\alpha(\mathbf{N}')|. \tag{14}$$

Эти операторы оказываются собственными для $\Lambda_{\rm ph}^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}')$:

$$\Lambda_{\rm ph}^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}')[|\alpha(\mathbf{N})\rangle\langle\alpha(\mathbf{N}')|] = \lambda^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}')|\alpha(\mathbf{N})\rangle\langle\alpha(\mathbf{N}')|, \tag{15}$$

где

$$\lambda^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}') =$$

$$= \frac{-\imath\Omega^2\sum_k u_k(N_k - N_k')}{[\gamma + \imath(\Delta + \sum_k u_k N_k)][\gamma - \imath(\Delta + \sum_k u_k N_k')]}. \tag{16}$$

Собственное значение оказывается функцией сумм $\sum_k u_k N_k$ и $\sum_k u_k N_k'$ и зануляется, как и следовало ожидать, при их равенстве.

Кинетическое уравнение, записанное для матричных элементов $\langle \mathbf{N}|\hat{\varrho}_{\rm at}|\mathbf{N}'\rangle = \rho(\mathbf{N},\mathbf{N}')\langle\alpha(\mathbf{N}')|\alpha(\mathbf{N})\rangle$ статистического оператора атомов $\hat{\varrho}_{\rm at} = {\rm Tr}_{\rm ph}\,\hat{\varrho}$, получается из (8):

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{N}|\hat{\varrho}_{\rm at}|\mathbf{N}'\rangle = -\frac{\imath}{\hbar}\sum_k E_k\langle \mathbf{N}|[\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \hat{\varrho}_{\rm at}]|\mathbf{N}'\rangle + \quad (17)$$

$$+\left(\lambda^{(1)}(\mathbf{N},\mathbf{N}') + \imath\overline{n}_{\rm ph}\sum_k u_k(N_k - N_k')\right)\langle \mathbf{N}|\hat{\varrho}_{\rm at}|\mathbf{N}'\rangle.$$

Второе слагаемое в правой части обусловлено эффектами квантовой природы резонаторной моды. Оно не только образует добавки к первому динамическому слагаемому, но и описывает необратимый процесс разрушения когерентности между состояниями с разными числами атомов в модах. Этот процесс порождается природой моды резонатора как открытой квантовой системы – фотоны, покидающие резонатор, несут информацию о частоте радиационной моды и, следовательно, о числе атомов, сдвигающих эту частоту. Наличие необратимого процесса приводит к существованию стационарного решения $\hat{\varrho}_{\rm at}^{(\rm st)}$ уравнения (17).

В последнее слагаемое правой части (17) в явном виде входит среднее число фотонов $\overline{n}_{\rm ph}$. Для стационарного решения $\hat{\varrho}_{\rm at}^{(\rm st)}$ имеет место соотношение

$$\overline{n}_{\rm ph} = \sum_{\mathbf{N},\mathbf{N}'}\langle \mathbf{N}|\hat{\varrho}_{\rm at}^{(\rm st)}|\mathbf{N}'\rangle\alpha(\mathbf{N}')^*\alpha(\mathbf{N}). \quad (18)$$

Поскольку от выбора $\overline{n}_{\rm ph}$ зависят колебательные моды и, следовательно, элементы матрицы U, (18) есть в действительности сложное уравнение на среднее число фотонов. При небольших отклонениях $\hat{\varrho}_{\rm at}$ от $\hat{\varrho}_{\rm at}^{(\rm st)}$ решение уравнения (18) можно использовать как параметр в кинетическом уравнении.

Модель одной атомарной моды. Рассмотрим простейший вариант изложенной выше теории – случай одной колебательной моды атомов. Эта модель интересна в контексте потенциала ловушки с несколькими минимумами, один из которых сформирован модой резонатора. Основной интерес представляет процесс туннелирования атомов между различными минимумами потенциала. В этом случае адекватной оказывается модель конденсата с единственной модой (локализации) в каждом минимуме. Наличие в потенциале ловушки особого минимума, сформированного резонаторной модой, позволит контролировать процесс туннелирования между ним и другими минимумами через расстройку частот Δ.

Единственная колебательная мода характеризуется числом атомов N и параметром u. В пределе $uN, uN' \ll |\gamma + \imath\Delta|$ имеем из (16):

$$\lambda^{(1)}(N,N') \simeq$$

$$\simeq \frac{-\imath\Omega^2 u(N-N')}{\Delta^2+\gamma^2}\left(1 - \frac{u\Delta(N+N')}{\Delta^2+\gamma^2} - \frac{\imath u\gamma(N-N')}{\Delta^2+\gamma^2}\right). \quad (19)$$

Преобразуя слагаемые из правой части к операторной форме, мы получаем следующее квантовое кинетическое уравнение для состояния атомарной подсистемы:

$$\frac{d}{dt}\hat{\varrho}_{\rm at} = -\imath[\hat{H}_{\rm at}, \hat{\varrho}_{\rm at}] + 2\nu\hat{N}\hat{\varrho}_{\rm at}\hat{N} - \nu\hat{N}^2\hat{\varrho}_{\rm at} - \nu\hat{\varrho}_{\rm at}\hat{N}^2, \quad (20)$$

где $\hat{H}_{\rm at}$ – гамильтониан атомов:

$$\hat{H}_{\rm at} = \left(E + \frac{\Omega^2 u}{\Delta^2+\gamma^2} - \overline{n}_{\rm ph}u + \delta\xi\right)\hat{N} + \delta\xi\hat{N}(\hat{N}-1), \quad (21)$$

$$\delta\xi = -\Omega^2u^2\Delta/(\Delta^2+\gamma^2)^2. \quad (22)$$

Правая часть (21) записана так, чтобы продемонстрировать динамический эффект квантовой природы радиационной моды в виде некоторого эффективного межатомного взаимодействия. Параметр $\delta\xi$ этого взаимодействия меняет знак вместе с отстройкой Δ. Следует отметить некоторую вынужденную непоследовательность в нашем рассмотрении: мы исходили из модели идеального конденсата и получили эффективное межатомное взаимодействие, которое далее при обсуждении будет сравниваться с параметрами реального взаимодействия. Включение этого взаимодействия в исходную модель существенно усложнило бы ее анализ. Используемый подход представляется все же оправданным результатом оценки величины эффективного взаимодействия – оно отнюдь не теряется на фоне реального взаимодействия. Это позволяет надеяться на достаточную адекватность подхода с изначально идеальным конденсатом.

Трехчленная структура Линблада в (20) описывает разрушение когерентности между состояниями с разными числами атомов в яме и, следовательно, фазовых соотношений между фрагментами конденсата, локализованными в данном минимуме потенциала и в других минимумах. Ранее уже кратко отмечалась природа этого механизма декогеренции. В его основе лежит квантовая зацепленность между атомами и фотонами. Поскольку фотонная подсистема обменивается информацией с окружением через канал необратимой потери квантов, существует потенциальная возможность спектральных измерений испущенного излучения. Спектральный сдвиг зависит от числа атомов в пучке, поэтому имеет место естественный процесс измерения числа атомов в яме потенциала резонаторной моды, получивший отражение в (20) в виде дефазировки. Скорость дефазировки

$$\nu = \Omega^2 u^2 \gamma/(\Delta^2+\gamma^2)^2.$$

Определенный эффект дефазировки сопровождает любой сценарий оптического зондирования атомарных ансамблей в отдельных минимумах потенциала ловушки [14].

Изложенный подход может быть обобщен на случай иной природы механизма возбуждения фотонной моды, отличный от рассмотренного выше, когда в отсутствие атомов в резонаторе формируется обычное когерентное состояние. Соответствующий фотонный лиувиллиан $\Lambda_{\rm ph}$ отличается от (9) видом третьего слагаемого в правой части (взаимодействие атомов с фотонами описывается неизменным вторым слагаемым). Основная сложность при этом обобщении связана с необходимостью вычисления операторов $\hat{\varrho}_{\rm ph}(N,N')$ при $N \neq N'$, собственных для супероператоров $\Lambda_{\rm ph}(N,N')[\bullet]$ и соответствующих собственных значений. Однако оказывается, что в случае малых поправок, вносимых атомами в динамику фотонной моды, достаточно вычислить только $\hat{\varrho}_{\rm ph}(N,N)$. Для удобства введем обозначения $x \doteq u(N+N')/2$ и $y \doteq u(N-N')/2$. Условие на собственные значения в новых обозначениях:

$$\Lambda_{\rm ph}(x,y)[\hat{\varrho}_{\rm ph}(x,y)] = \lambda(x,y)\hat{\varrho}_{\rm ph}(x,y). \qquad (23)$$

По условию собственное значение обращается в нуль при $N=N'$, т.е. $\lambda(x,0)=0$. Для определения поправки к взаимодействию атомов в яме 2 необходимо вычислить

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\lambda(x,y)\mid_{x=y=0}. \qquad (24)$$

Следует учесть вид зависимости $\Lambda_{\rm ph}(x,y)$ от x и y:

$$\Lambda_{\rm ph}(x,y)[\hat{\varrho}] = \Lambda_{\rm ph}(0,0)[\hat{\varrho}] - \imath(x+y)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} + \imath(x-y)\hat{\varrho}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}. \qquad (25)$$

Дифференцируя (23) по x и y в точке $x=y=0$ с учетом (25) и вычисляя след, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\lambda(x,y)\mid_{x=y=0}=$$

$$= {\rm Tr}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Lambda_{\rm ph}(0,y)\right)_{y=0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{\varrho}_{\rm ph}(x,0)\right]_{x=0} = \qquad (26)$$

$$= -2\imath{\rm Tr}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\varrho}_{\rm ph}(x,0)\mid_{x=0}.$$

Применим полученное общее выражение для случая динамики с парным рождением или уничтожением фотонов. Соответствующий супероператор $\Lambda^{(2)}_{\rm ph}[\bullet]$ отличается от $\Lambda^{(1)}_{\rm ph}[\bullet]$ заменой слагаемого $\Omega[\hat{a}^\dagger-\hat{a},\bullet]$ в правой части (9) на $\Omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger-\hat{a}\hat{a},\bullet]/2$. Следует заметить, что нелинейная среда, в которой рождаются или исчезают пары фотонов квантованной моды (т.е. происходит параметрическая генерация), должна в такой модели находиться внутри резонатора. Например, она может выполнять роль входного зеркала. Стационарное состояние фотонной моды при определенном числе атомов в резонаторе есть решение уравнения, аналогичного (12):

$$\Lambda^{(2)}_{\rm ph}(N,N)[\hat{\varrho}^{(2)}_{\rm ph}(N,N)] = 0. \qquad (27)$$

Решением уравнения (27) оказывается тепловое распределение полевого осциллятора моды, деформированное некоторым каноническим преобразованием (оператором сжатия [15, 16]):

$$\hat{\varrho}^{(2)}_{\rm ph} = (1-q)\hat{S}(\theta,\varphi)q^{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{S}^\dagger(\theta,\varphi). \qquad (28)$$

Здесь и далее для краткости опущено обозначение зависимости от N. Вычисление параметров канонического преобразования при его действии на фотонный оператор

$$\hat{S}^\dagger(\theta,\varphi)\,\hat{a}\hat{S}(\theta,\varphi) = \cosh\theta\,\hat{a} + e^{\imath\varphi}\sinh\theta\,\hat{a}^\dagger$$

дает

$$q = \tanh^2\theta,$$
$$\cosh 2\theta = \sqrt{(\gamma^2+\Delta^2)/(\gamma^2+\Delta^2-\Omega^2)}, \qquad (29)$$
$$\exp(\imath\varphi) = \sqrt{(\gamma-\imath\Delta)/(\gamma+\imath\Delta)}.$$

В последнем выражении следует брать ветвь квадратного корня, обращающуюся в 1 при малых значениях Δ. В конечное выражение из (26) следует подставить $\partial\hat{\varrho}^{(2)}_{\rm ph}/\partial\Delta$. Результат вычисления поправки к параметру межатомного взаимодействия

$$\delta\xi = -\frac{\Omega^2u^2\Delta}{(\gamma^2+\Delta^2-\Omega^2)^2}. \qquad (30)$$

Отличие от соответствующего выражения из (21) заключается в наличии (при достаточно большом значении Ω) области, где решение теряет смысл из-за отсутствия стационарного состояния фотонной моды[2)]. Последний вывод следует из второй строки (29).

[2)] Состояние (28) описывает эффект параметрической генерации, контролируемой диссипацией. Последняя отодвигает порог неустойчивости – стационарное состояние существует при $|\Omega| < \sqrt{\gamma^2+\Delta^2}$. Мода в состоянии (28) демонстрирует квадратурное сжатие: для квадратуры $\hat{X}(\psi) = (\hat{a}\exp(-\imath\psi) + \hat{a}^\dagger\exp(\imath\psi))/2$ минимум по ψ квадрата дисперсии $\langle(\triangle X)^2\rangle = 0.25\sqrt{\gamma^2+\Delta^2}(\sqrt{\gamma^2+\Delta^2}+|\Omega|)^{-1}$ (0.25 соответствует когерентному состоянию).

|**Обсуждение.** Предложенный механизм локальной оптической модификации параметра, ответственного за межатомное взаимодействие, не меняет длины рассеяния атомов. По этой причине естественно говорить об имитации контроля такого взаимодействия. Сопутствующим явлением и неизбежной платой оказывается появление процесса, разрушающего фазовые корреляции между атомарными модами. Данный процесс модифицирует эффект межямного туннелирования и может в ряде случаев оказаться нежелательным явлением. Поэтому предложенный механизм контроля межатомного взаимодействия не следует считать универсальным.

Докажем прямое родство эффективного изменения межатомного взаимодействия и явления "оптической пружины" в оптомеханике [11, 12]. Как известно, базовая оптомеханическая модель исследует взаимодействие колебаний подвижного зеркала резонатора и фотонной моды через зависимость основной частоты моды от изменяющейся длины резонатора. Соответствующее слагаемое в гамильтониане в случае относительно небольшого изменения длины резонатора при движении зеркала $G\hat{Q}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$. Здесь G – константа размерности $\text{см}^{-1}\text{c}^{-1}$, $\hat{Q}$ – оператор координаты зеркала. Этот оператор фигурирует вместо числа атомов в минимуме потенциала из нашей модели. Поправка в уравнение для координатной матрицы плотности $\langle Q|\hat{\varrho}_m|Q'\rangle$ подвижного зеркала (в пределе адиабатического подчинения быстрой фотонной эволюции медленной механической системе) приобретает, по аналогии со вторым членом из круглых скобок (19), слагаемое $\propto \Delta(Q^2 - Q'^2)$. Это эквивалентно эффективному изменению жесткости подвески подвижного зеркала – "оптической пружине". В действительности не происходит каких-либо изменений упругих свойств подвески. В равной мере предложенный в настоящей работе эффект не связан с реальным изменением природы межатомного взаимодействия.

Оценим изменение энергии межатомного взаимодействия атомов ^{87}Rb, вызванное $\delta\xi$ (уравнение (22)) [17]. Пусть оптическая ловушка создана излучением с $\lambda = 0.96$ мкм и имеет радиус перетяжки 10 мкм. Кольцевой резонатор (длина 10 см) образован входным зеркалом с пропусканием $\tau = 0.01$ (по интенсивности) и двумя плотными зеркалами. Скорость ухода фотонов из такого резонатора составляет $\gamma = 3\cdot 10^7\,\text{c}^{-1}$, а оптический потенциал атома при одном фотоне в резонаторе равен $u = -0.1\,\text{c}^{-1}$. Параметр Ω удобно выразить через число n_{ph} фотонов в резонаторе (при этой оценке мы фактически приравниваем нулю разность второго и третьего членов в линейной по N части гамильтониана (21)):

$$\Omega^2 = n_{\text{ph}}(\Delta^2 + \gamma^2). \tag{31}$$

Пусть интенсивность входного излучения подобрана так, что в резонаторе находятся $n_{\text{ph}} = 10^8$ фотонов. Атомы ^{87}Rb в поле такой оптической ловушки имеют радиальную и аксиальную частоты колебаний 2.6 кГц и 47 Гц соответственно. Если бозе-конденсат содержит 10^6 атомов ^{87}Rb, то энергия межатомного взаимодействия без учета эффектов "атомарной оптической пружины" (так мы именуем появление эффективной добавки к межатомному взаимодействию) составляет $8\cdot 10^4\,\text{c}^{-1}$ на один атом, согласно модели Томаса–Ферми. Учет эффектов "атомарной оптической пружины" изменяет ξ согласно уравнению (22). При оптимальной отстройке частоты излучения от частоты резонатора, $\Delta = +\gamma(-\gamma)$, эффект "атомарной оптической пружины" уменьшает (увеличивает) энергию межатомного взаимодействия на $\simeq 20\,\%$. Скорость дефазировки конденсата оказывается при этих параметрах равной $\nu \simeq 0.02\,\text{c}^{-1}$.

Автор признателен П.Л. Чаповскому за обсуждение различных аспектов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант #15-02-05754) и Совета Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант NSh-6898.2016.2).

1. S. Martellucci, A.N. Chester, A. Aspect, and M. Inguscio, *Bose-Einstein Condensates and Atom Lasers*, Kluwer Acad. Publ. (2002).
2. R. Grimm, M. Weidemuller, and Y. Ovchinnikov, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).
3. S.G. Rautian and A.M. Shalagin, *Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy*, Elsevier Sci., Amsterdam (1991).
4. S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann, and P.W. Courteille, Phys. Rev. Lett. **98**, 053603 (2007).
5. S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann, and P.W. Courteille, Phys. Rev. A **75**, 063620 (2007).
6. D. Schmidt, H. Tomczyk, S. Slama, and C. Zimmermann, Phys. Rev. A **112**, 115302 (2014).
7. M.M. Cola, D. Bigerni, and N. Piovella, Phys. Rev. A **79**, 053622 (2009).
8. F.Kh. Abdullaev and R.A. Kraenkel, Phys. Rev. A **62**, 023613 (2000).
9. M. Holthaus, Phys. Rev. A **64**, 011601(R) (2001).
10. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
11. В.Б. Брагинский, А.Б. Манукин, ЖЭТФ **52**, 986 (1967) [Sov. Phys. JETP **25**, 653 (1967)].
12. M. Aspelmeyer, T.J. Kippenberg, and F. Marquardt, Rev. Mod. Phys. **86**, 1391 (2014).

13. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, ч. 2*, Наука, М. (1978) [E. M. Lifshidz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics, Part 2*, Pergamon Press, Ltd (1980)].
14. Л. В. Ильичев, П. Л. Чаповский, Письма в ЖЭТФ **102**(1), 18 (2015).
15. С. Я. Килин, *Квантовая оптика: поля и их детектирование*, Эдиториал, УРСС (2003).
16. A. I. Lvovsky, *Squeezed light*, arXiv: 1401.4118 [quant-ph] (2014).
17. Л. В. Ильичев, П. Л. Чаповский, Квантовая электроника **47**(5), 463 (2017).