Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 3, с. 145 – 150

Влияние атомной структуры мишени на поляризационные свойства высших гармоник в области куперовского минимума

Т. С. Саранцева[+], *М. В. Фролов*[+*1)], *Н. В. Введенский*[+]

[+]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия*

[*]*Воронежский государственный университет, 394018 Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию 13 июня 2017 г.

После переработки 29 июня 2017 г.

Предсказано существенное увеличение абсолютного значения степени циркулярной поляризации высших гармоник в области энергий куперовского минимума в сечении фоторекомбинации атомов благородных газов. Получена модельно-независимая оценка максимальных значений степени циркулярной поляризации гармоник в рассматриваемом интервале энергий.

DOI: 10.7868/S0370274X17150048

Генерация высших гармоник (ГВГ) является одним из наиболее интенсивно исследуемых процессов, индуцированных взаимодействием сверхсильного лазерного поля с атомными и молекулярными мишенями. Качественно процесс ГВГ может быть описан в рамках классической трехшаговой модели перерассеяния [1]: на первом шаге валентный электрон туннелирует из связанного состояния в континуум; на втором шаге высвободившийся электрон движется вдоль замкнутой траектории, возвращающей его к атомному остову; на третьем шаге возвратившийся электрон рекомбинирует в основное состояние атомной мишени с испусканием фотона на частоте гармоники. Так как рекомбинация определяет последний этап формирования спектра ГВГ, то выход высших гармоник и их поляризационные свойства чувствительны к структуре атомной мишени. В частности, форма спектра высших гармоник определяется особенностями сечения фоторекомбинации: куперовским минимумом для атомных [2–5] и молекулярных [6] мишений, гигантским резонансом в Xe [7, 8], резонансом на автоионизационном состоянии в ионах переходных металлов [9–11].

В случае ГВГ в эллиптически поляризованном лазерном поле излучаемые гармоники имеют поляризацию, отличную от поляризации поля накачки [12]. Поляризационные параметры гармоник (степень циркулярной поляризации и угол поворота главной оси эллипса поляризации) существенно зависят от структуры атомной мишени. В частности, для атома Ar обнаружено увеличение степени циркулярной поляризации гармоник в области куперовского минимума [13]. Этот результат был получен в предположении существенного вклада единственного магнитного подуровня, ориентированного вдоль большой оси эллипса поляризации поля накачки. Однако, как было показано в работах [14, 15], вклад начального состояния, ориентированного вдоль малой оси эллипса поляризации, оказывается существенным в случае лазерных полей с двумя пространственными компонентами. Более того, последние эксперименты по ГВГ в эллиптически поляризованном лазерном поле показывают, что учет этого состояния оказывается наиболее значимым именно в окрестности куперовского минимума [16]. Отметим, что поляризационные параметры гармоник не зависят от структуры атомной мишени, если оптически активный электрон находится в s- состоянии [13, 14, 17].

В настоящей работе исследуется общие закономерности поведения поляризационных параметров гармоник эллиптически поляризованного лазерного поля в окрестности куперовского минимума для благородных газов с внешним p-электроном.

Рассмотрим взаимодействие валентного p-электрона с эллиптически поляризованным лазерным полем с напряженностью F, частотой ω и эллиптичностью η:

$$\mathbf{F}(t) = F_0(\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\eta\sin\omega t) \equiv \frac{F_x(t)\hat{\mathbf{x}} + F_y(t)\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{1+\eta^2}}, \quad (1)$$

$$F_x(t) = F\cos(\omega t)\,, F_y(t) = \eta F\sin(\omega t),\ F_0 = F/\sqrt{1+\eta^2}.$$

Данное поле снимает вырождение по магнитному квантовому числу и перемешивает состояния с одинаковой четностью по m. В результате возникают

1)e-mail: frolov@phys.vsu.ru

три независимых квазистационарных квазиэнергетических состояния (ККЭС), которые соответствуют следующим линейным комбинациям невозмущенных волновых функций системы [14]:

$$\varphi_{\kappa,1,q}(\mathbf{r}) = \varphi_{\kappa,1}(r) f_q(\hat{\mathbf{r}}), \quad f_0(\hat{\mathbf{r}}) = Y_{1,0}(\hat{\mathbf{r}}),$$
$$f_{1,\pm 1}(\hat{\mathbf{r}}) = [Y_{1,1}(\hat{\mathbf{r}}) \pm Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{r}})]/\sqrt{2}. \tag{2}$$

Отметим, что вклад состояния с $q = 0$ в общую амплитуду процесса ГВГ оказывается пренебрежимо малым [14]. Для описания процесса генерации гармоник для ККЭС с $q = \pm 1$ воспользуемся модифицированным методом квантовых орбит, в котором выражение для наведенного дипольного момента электрона представляется в виде суммы парциальных амплитуд, соответствующих парам замкнутых электронных траекторий (квантовых орбит). Указанные траектории определяются временами начала и окончания движения в модифицированном полем континууме. В зависимости от времени движения в континууме в каждой паре выделяют короткую и длинную траектории. На микроскопическом уровне вклады коротких и длинных орбит соизмеримы.

Отметим, что эффекты распространения могут существенно изменить относительный вклад отдельной группы траекторий в выход ГВГ [18, 19]. Оптимальные условия распространения гармоник в среде достигаются в случае синхронизации фаз между электрическим полем гармоники и соответствующей фурье-компонентой дипольного момента, индуцированного сильным лазерным полем. В работе [20] были установлены различия в условиях синхронизации фаз для парциальных амплитуд, соответствующих вкладу коротких и длинных траекторий. При выполнении условия синхронизации фаз для траекторий с минимальным временем движения наблюдается устойчивый сигнал гармоник в направлении распространения лазерного импульса с относительно большой длиной когерентности; в случае синхронизации фаз для длинных траекторий наблюдается как уменьшение длины когерентности, так и изменение направления распространения гармоники [21, 22]. Отмеченные выше особенности синхронизации фаз в газовых средах указывают на то, что наибольший вклад в генерацию гармоник (с учетом эффектов распространения), а также генерацию аттосекундных импульсов дают парциальные амплитуды, соответствующие траекториям с минимальным временем движения электрона в континууме [23, 24]. В дальнейшем в настоящей работе будет рассматриваться вклад только от коротких траекторий.

Выражение для наведенного дипольного момента электрона, находящегося в ККЭС с $q = \pm 1$, может быть записано в виде произведения трех сомножителей [14, 25]:

$$\mathbf{d}^{(1,q)} = \mathcal{T}_{1,q} \boldsymbol{\chi} \hat{\mathcal{S}}_{1,q}, \tag{3}$$

каждый из которых имеет прозрачный физический смысл в рамках трехшаговой модели перерассеяния.

Ионизационный фактор $\mathcal{T}_{1,q}$ описывает туннелирование валентного электрона из состояния с потенциалом ионизации $I_p = \kappa^2/2$ через барьер, образованный атомным потенциалом и внешним эллиптически поляризованным лазерным полем, с начальной энергией $E_i = 3.17\eta^2 u_p$, где $u_p = F^2/(4\omega^2)$ – средняя пондеромоторная энергия электрона в лазерном поле[2)]. Квадрат этого множителя пропорционален вероятности распада связанного p-состояния с "эффективной" энергией связи $E_0 = -(I_p + E_i)$ в "эффективном" постоянном электрическом поле $\tilde{F} = 0.95F$, определяемом мгновенным значением напряженности лазерного поля в момент ионизации [25]:

$$\mathcal{T}_{1,q} = \tilde{f}_q \frac{\omega}{\pi \tilde{F}} \sqrt{\frac{\Gamma_{\rm st}(\tilde{F};\varkappa_0)}{\kappa}} e^{-\eta^2 s(E)},$$
$$\Gamma_{\rm st}(\tilde{F};\varkappa_0) = 3|E_0| \mathcal{C}_1^2 \left(\frac{2\varkappa_0}{F}\right)^{2/\varkappa_0 - 1} e^{-2\varkappa_0^3/(3\tilde{F})}, \tag{4}$$
$$s(E) = -0.324\varkappa_0 \left(E_{\max} - E\right)/\tilde{F}, \quad \varkappa_0 = \sqrt{-2E_0}, \tag{5}$$

где $\mathcal{C}_1$ – безразмерный асимптотический коэффициент [26], $E = N\omega - I_p$ – энергия электрона в момент возврата к атомному остову, N – номер гармоники, $E_{\max}$ – максимальная энергия, набираемая электроном к моменту рекомбинации с учетом квантовых поправок:

$$E_{\max} = E_{\max}^{(\rm cl)} + 0.324 I_p, \quad E_{\max}^{(\rm cl)} = 3.17 u_p. \tag{6}$$

Величины $\tilde{f}_q$ представляют собой форм-факторы начальных состояний и равны $\tilde{f}_- = \varkappa_0$ и $\tilde{f}_+ = i\eta\sqrt{2E_{\max}^{(\rm cl)}}$ соответственно [14].

Фактор распространения $\boldsymbol{\chi}$ представляет собой двумерную вектор-строку $\boldsymbol{\chi} = (\chi_x, \chi_y)$, компоненты которой пропорциональны проекциям импульса электрона в момент возврата, соответственно на большую и малую оси эллипса поляризации поля накачки:

$$\boldsymbol{\chi} = \mathcal{D}\mathbf{K}, \quad K_x \approx \sqrt{2E}, \tag{7}$$
$$K_y \approx \frac{i\varkappa_0}{\gamma}\left[k_0 + (ik_1\frac{\kappa}{\varkappa_0} + k_2)\omega\sqrt{\frac{E_{\max} - E}{\delta}}\right], \tag{8}$$
$$k_0 = 0.324, \quad k_1 = 0.822, \quad k_2 = 0.134,$$

[2)] В статье используются атомные единицы.

где

$$\mathcal{D} = \frac{\exp[i\phi_0 + 4.4iE - 2i(E_{\max} - E)^{3/2}/(3\delta^{1/2})]}{\sqrt{8\pi E}\,[\delta(E_{\max} - E)]^{1/4}\,\Delta t^{3/2}}, \quad (9)$$

$$\gamma = \kappa\omega/F, \quad \delta = 0.536F^2, \quad \omega\Delta t = 4.086, \quad (10)$$

а общая фаза ϕ_0 может быть выражена через классическое действие частицы [14, 25].

Последний множитель в выражении (3) – матрица размером 2×2, элементы которой пропорциональны дипольным радиальным матричным элементам $D_{l,l'}$ перехода из связанного состояния с орбитальным моментом l в состояние непрерывного спектра с орбитальным моментом l' [14]:

$$\hat{\mathcal{S}}_{1,+1} = \begin{pmatrix} 0 & D_{1,0} - D_{1,2} \\ 3D_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\mathcal{S}}_{1,-1} = \begin{pmatrix} D_{1,0} + 2D_{1,2} & 0 \\ 0 & 3D_{1,2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Отметим, что комбинации радиальных матричных элементов, входящие в матрицы $\hat{\mathcal{S}}_{1,\pm1}$, определяют сечение фоторекомбинации электрона ($\sigma(E,\alpha)$) с импульсом $\mathbf{p}$ с испусканием линейно поляризованного фотона с частотой Ω, вектор поляризации которого образует угол α с импульсом налетающего электрона:

$$\sigma(E, \alpha = 0^\circ) = \frac{\Omega^3}{24\pi^2 pc^3}\left|D_{1,0} + 2D_{1,2}\right|^2, \quad (12)$$
$$\sigma(E, \alpha = 90^\circ) = \frac{\Omega^3}{24\pi^2 pc^3}\left|D_{1,0} - D_{1,2}\right|^2. \quad (13)$$

Интенсивность и поляризационные свойства гармоник определяются фурье-компонентами наведенного дипольного момента для каждого ККЭС. В случае многоэлектронной атомной системы с полностью заполненной электронной оболочкой (благородные газы) амплитуда ГВГ выражается в виде суммы парциальных амплитуд, соответствующих различным значениям q [27]. Тогда, пренебрегая вкладом состояния с $q = 0$, амплитуда генерации гармоники с заданной поляризацией принимает вид

$$\mathcal{A}_N = (\mathbf{e}_h^* \cdot \mathbf{d}), \quad (14)$$
$$\mathbf{d} = \sum_{q=\pm1} \mathbf{d}^{(1,q)}, \quad (15)$$

где $\mathbf{e}_h$ – вектор поляризации поля гармоники. Выражения для интенсивности ($\mathcal{I}_N$), степени циркулярной поляризации (ξ_N) и угла поворота главной оси эллипса поляризации поля гармоники (θ_N) определяют как [28]:

$$\mathcal{I}_N = \frac{(N\omega)^4}{2\pi c^3}|\mathbf{d}|^2, \quad (16)$$
$$\xi_N = \frac{2\mathrm{Im}[d_x^* d_y]}{|d_x|^2 + |d_y|^2}, \quad (17)$$
$$\tan 2\theta_N = \frac{2\mathrm{Re}[d_x^* d_y]}{|d_x|^2 - |d_y|^2}, \quad (18)$$

Следует отметить, что данные выражения справедливы только в случае полностью заполненной внешней электронной оболочки. В остальных случаях необходимо провести усреднение конечных выражений для интенсивности и поляризационных свойств гармоник по возможным электронным конфигурациям и по пространственной ориентации оси квантования. Например, если в атомной системе имеется единственный валентный электрон, подобное усреднение приведет к исчезновению в (16)–(18) слагаемых, описывающих интерференцию между состояниями с различными q [29, 30].

В качестве атомной модели нами выбран одноэлектронный модельный потенциал

$$U(r) = \frac{1 + a_1 e^{-a_2 r} + a_3 r e^{-a_4 r} + a_5 e^{-a_6 r}}{r}, \quad (19)$$

предложенный в работе [31] для описания атомов благородных газов. Коэффициенты a_i выбраны таким образом, чтобы обеспечить совпадение энергии связи с энергией основного состояния атома Ar,

$$a_1 = 16.04,\ a_2 = 2.01,\ a_3 = -25.54,$$
$$a_4 = 4.525,\ a_5 = 0.96,\ a_6 = 0.443.$$

Следует отметить, что положение куперовского минимума в указанном одноэлектронном потенциале смещено в область меньших энергий по сравнению с экспериментальным значением.

Вычислив величины дипольных матричных элементов $D_{1,l'}(E)$ в заданном потенциале и воспользовавшись универсальными выражениями для ионизационного (4) и пропагационного (7) факторов, нами были рассчитаны спектры высших гармоник и их поляризационные свойства в области высокоэнергетичного плато в эллиптически поляризованном поле с интенсивностью $I = 4 \cdot 10^{14}$ Вт/см^2 и длиной волны $\lambda = 800$ нм для двух значений эллиптичности $\eta = 0.1$ и $\eta = 0.2$. Результаты расчетов представлены на рис. 1. Видно, что для гармоник, энергия которых близка к значению 40 эВ, наблюдается резкий провал в спектре ГВГ. Этот провал связан с куперовским минимумом, наблюдаемым в сечении фотоионизации/фоторекомбинации во внешнюю атомную оболочку [32]. Поляризационные свойства гармоник также имеют характерные особенности в указанной

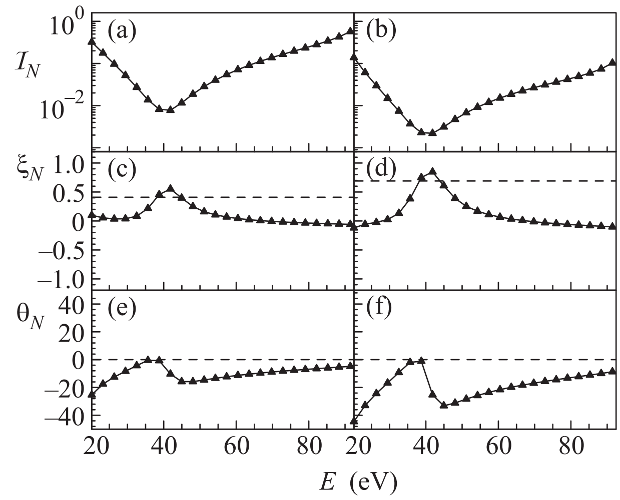

Рис. 1. Зависимость интенсивности гармоник $\mathcal{I}_N$ (a, b), степени циркулярной поляризации поля гармоники (c, d) и угла поворота главной оси эллипса поляризации поля гармоники (e, f) от энергии $E = N\omega - I_p$ в эллиптически поляризованном лазерном поле с интенсивностью $I = 4\cdot 10^{14}$ Вт/см^2, длиной волны $\lambda = 800$ нм и эллиптичностью $\eta = 0.1$ (a, c, e) и $\eta = 0.2$ (b, d, f). Потенциал ионизации $I_p = 15.774$ эВ. Пунктирными линиями указаны значения для ξ_C и θ_C, рассчитанные в соответствии с (20), (21)

области энергий. В частности, степень циркулярной поляризации поля гармоник имеет локальный максимум, значение которого существенно превосходит степень циркулярной поляризации поля накачки, а угол поворота осей θ_N в окрестности куперовского минимума близок к нулю.

Для объяснения подобного поведения поляризационных свойств гармоник следует отметить, что возникновение куперовского минимума связано с обращением в ноль значения дипольного матричного элемента $D_{1,2}$ [32], приводящее к тому, что вклад в полную амплитуду процесса ГВГ дают только компоненты $d_x^{1,-1} = \mathcal{T}_{1,-1}\chi_x(D_{1,0} + 2D_{1,2})$ и $d_y^{1,+1} = \mathcal{T}_{1,+1}\chi_x(D_{1,0} - D_{1,2})$. Квадраты указанных компонент пропорциональны дифференциальным сечениям фоторекомбинации для углов $\alpha = 0°$ и $\alpha = 90°$ [см. (12), (13)], отношение которых в области куперовского минимума имеет максимум [16]. В окрестности куперовского минимума $|D_{1,2}| \ll |D_{1,0}|$, поэтому относительная фаза между компонентами дипольного момента определяется соответствующими ионизационными факторами $\mathcal{T}_{1,q}$ и близка к $\pi/2$. Из выражения (17) следует, что степень циркулярной поляризации будет максимальной, если компоненты дипольного момента близки по абсолютному значению и сдвинуты по фазе на $\pi/2$, что и реализуется в области куперовского минимума.

В случае начального p-состояния поляризационные свойства гармоник зависят от выбора атомной модели. Однако в области куперовского минимума возможно получить универсальную оценку степени циркулярной поляризации и угла поворота главной оси эллипса поляризации гармоники. Действительно, пренебрегая матричными элементами $D_{1,2}$ в определении матриц $\hat{\mathcal{S}}_{1,q}$ (11), выражения для степени циркулярной поляризации поля гармоники и угла поворота главной оси эллипса поляризации можно записать через форм-факторы начальных состояний:

$$\xi_C = \frac{2\mathrm{Im}[\tilde{f}_-^* \tilde{f}_+]}{|\tilde{f}_-|^2 + |\tilde{f}_+|^2} = \eta\varkappa_0 \frac{\sqrt{2E_{\max}^{(\mathrm{cl})}}}{I_p + 2\eta^2 E_{\max}^{(\mathrm{cl})}}, \qquad (20)$$

$$\tan 2\theta_C = \frac{2\mathrm{Re}[\tilde{f}_-^* \tilde{f}_+]}{|\tilde{f}_-|^2 - |\tilde{f}_+|^2} = 0. \qquad (21)$$

Значения степени циркулярной поляризации и угла поворота главной оси эллипса поляризации поля гармоники, вычисленные в соответствии с (20) и (21), отмечены на рис. 1 пунктирными линиями. Для выбранных параметров лазерного поля значения степени циркулярной поляризации равны $\xi_C = 0.41$ для $\eta = 0.1$ и $\xi_C = 0.69$ для $\eta = 0.2$. Видно, что максимальные значения ξ_N незначительно превосходят указанные оценочные значения. Таким образом, модельно-независимая оценка (20) достаточно точно определяет пиковое значение степени циркулярной поляризации в области куперовского минимума для *произвольного* атомного потенциала.

Отметим также, что величина ξ_C определяется отношением начальной энергии электрона и потенциала ионизации; это позволяет записать выражение (20) в удобной для анализа форме с использованием безразмерного параметра $\tilde{\eta} = \eta/\gamma$, равного отношению эллиптичности лазерного поля к параметру Келдыша $\gamma = \kappa\omega/F$ [33]:

$$\xi_C = 2\tilde{\eta}\frac{k_m\sqrt{1+\tilde{\eta}^2 k_m^2}}{1+2\tilde{\eta}^2 k_m^2}, \qquad (22)$$

$$k_m = \sqrt{E_{\max}^{(\mathrm{cl})}/(2u_p)} \approx 1.26.$$

Рассмотрим предельные случаи $\tilde{\eta} \gg 1$ и $\tilde{\eta} \ll 1$. В первом случае, соответствующем $\gamma \ll \eta$, значение $\xi_C \approx 1$ и не зависит от $\tilde{\eta}$. Однако в указанном режиме генерация гармоник существенно подавлена ввиду того, что энергия электрона в момент ионизации должна многократно превосходить потенциал ионизации [25].

Во втором случае, соответствующем $\gamma \gg \eta$, величина ξ_C прямо пропорциональна параметру $\tilde{\eta}$:

$$\xi_C \approx 2k_m\tilde{\eta}. \tag{23}$$

На рис. 2 представлена зависимость величины ξ_C от $\tilde{\eta}$. Для $\tilde{\eta} \sim 1$ значение функции близко к единице

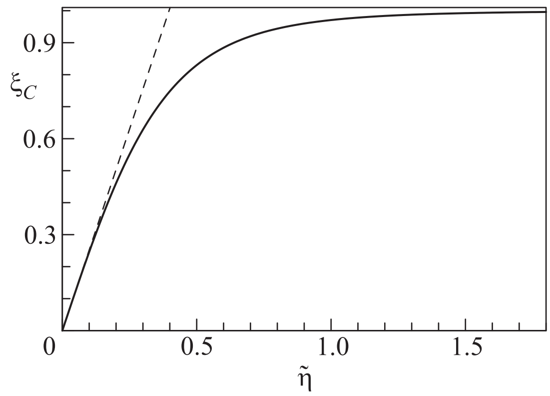

Рис. 2. Зависимость степени циркулярной поляризации ξ_C от величины $\tilde{\eta}$ (сплошная линия). Пунктирной линией показано асимптотическое поведение ξ_C при малых $\tilde{\eta}$ в соответствии с (23).

(для $\tilde{\eta} = 1$, $\xi_C = 0.97$). При уменьшении значения аргумента до $\tilde{\eta} = 0.35$ значение пиковой степени циркулярной поляризации падают до величины $\xi_C = 0.69$. При меньших значениях аргумента поведение функции с хорошей точностью описывается линейным законом (23). Таким образом, генерация гармоник со степенью циркулярной поляризации близкой к 1 происходит в области куперовского минимума, если параметр Келдыша менее чем в три раза превосходит величину эллиптичности лазерного поля.

В настоящей работе исследованы поляризационные свойства гармоник в области энергий куперовского минимума в сечении фоторекомбинации атомов благородных газов. Используя аналитическую модель ГВГ [14, 25] предсказано значительное увеличение степени циркулярной поляризации поля гармоник в указанной области энергий. Несмотря на то, что поляризационные свойства гармоник для случая начального p-состояния чувствительны к выбору атомной модели, в области куперовского минимума благородных газов получена простая модельно-независимая оценка максимального значения степени циркулярной поляризации гармоник. Описанная особенность поведения поляризационных свойств вторичного излучения позволяет использовать гармоники, энергия которых лежит в области куперовского минимума, для получения сверхкоротких лазерных импульсов с поляризацией, близкой к циркулярной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант# 15-12-10033).

1. P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett. **71**, 1994 (1993).
2. S. Minemoto, T. Umegaki, Y. Oguchi, T. Morishita, A.-T. Le, S. Watanabe, and H. Sakai, Phys. Rev. A **78**, 061402 (2008).
3. H. J. Wörner, H. Niikura, J. B. Bertrand, P. B. Corkum, and D. M. Villeneuve, Phys. Rev. Lett. **102**, 103901 (2009).
4. A. D. Shiner, B. E. Schmidt, C. Trallero-Herrero, P. B. Corkum, J.-C. Kieffer, F. Légaré, and D. M. Villeneuve, J. Phys. B **45**, 074010 (2012).
5. J. Higuet, H. Ruf, N. Thiré, R. Cireasa, E. Constant, E. Cormier, D. Descamps, E. Mével, S. Petit, B. Pons, Y. Mairesse, and B. Fabre, Phys. Rev. A **83**, 053401 (2011).
6. J. B. Bertrand, H. J. Wörner, P. Hockett, D. M. Villeneuve, and P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett. **109**, 143001 (2012).
7. M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, M. Y. Emelin, MY. Ryabikin, and A. F. Starace, Phys. Rev. Lett. **102**, 243901 (2009).
8. A. D. Shiner, B. E. Schmidt, C. Trallero-Herrero, H. J. Wörner, S. Patchkovskii, P. B. Corkum, J. Kieffer, F. Légaré, and D. M. Villeneuve, Nature Phys. **7**, 464 (2011).
9. Р. А. Ганеев, Успехи физических наук **179**, 65 (2009).
10. V. Strelkov, Phys. Rev. Lett. **104**, 123901 (2010).
11. M. V. Frolov, N. L. Manakov, and A. F. Starace, Phys. Rev. A **82**, 023424 (2010).
12. Н. Л. Манаков, ЖЭТФ **110**, 1244 (1996).
13. V. V. Strelkov, M. A. Khokhlova, A. A. Gonoskov, I. A. Gonoskov, and M. Y. Ryabikin, Phys. Rev. A **86**, 013404 (2012).
14. M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, and A. F. Starace, Phys. Rev. A **86**, 063406 (2012).
15. T. S. Sarantseva, M. V. Frolov, N. L. Manakov, M. Y. Ivanov, and A. F. Starace, J. Phys. B **46**, 231001 (2013).
16. M. V. Frolov, T. S. Sarantseva, N. L. Manakov, K. D. Fulfer, B. P. Wilson, J. Troß, X. Ren, E. D. Poliakoff, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii, A. F. Starace, and C. A. Trallero-Herrero, Phys. Rev. A **93**, 031403 (2016).
17. V. V. Strelkov, A. A. Gonoskov, I. A. Gonoskov, and M. Y. Ryabikin, Phys. Rev. Lett. **107**, 043902 (2011).
18. M. B. Gaarde, J. L. Tate, and K. J. Schafer, J. Phys. B **41**, 132001 (2008).
19. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).

20. P. Antoine, A. L'Huillier, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **77**, 1234 (1996).
21. P. Salières, A. L'Huillier, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **74**, 3776 (1995).
22. P. Balcou, P. Sali‘eres, A. L'Huillier, and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **55**, 3204 (1997).
23. P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger et al., Science **292**, 1689 (2001).
24. Y. Mairesse, A. de Bohan, L. J. Frasinski et al., Science **302**, 1540 (2003).
25. T. S. Sarantseva, A. A. Silaev, and N. L. Manakov, J. Phys. B **50**, 074002 (2017).
26. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Параметры атомов и атомных ионов*, Энергоатомиздат, М. (1986).
27. D. B. Milošević, Phys. Rev. A **92**, 043827 (2015).
28. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, М. (1983).
29. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, М. (2006).
30. M. V. Frolov, A. V. Flegel, N. L. Manakov, and A. F. Starace, Phys. Rev. A **75**, 063407 (2007).
31. X. M. Tong and C. D. Lin, J. Phys. B **38**, 2593 (2005).
32. У. Фано, Дж. Купер, *Спектральные распределения сил осцилляторов в атомах*, Наука, М. (1972).
33. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).