Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 3, с. 166 – 172

Топология импульсного пространства, вигнеровские преобразования и киральная аномалия в решеточных моделях

М. А. Зубков[+*1)], *З. В. Хайдуков*[+]

[+]*Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова Национального исследовательского центра "Курчатовский институт", 117259 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт (государственный университет), 141701 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 26 июня 2017 г.

Обсуждаются решеточные модели, которые могут служить в качестве дискретизации квантовой теории поля с безмассовыми фермионами. Эти же модели могут описывать дираковские полуметаллы. Оказалось, для случая решеточных моделей общего вида следует переопределить аксиальный ток, с тем чтобы оставалось верным привычное выражение для киральной аномалии. Тогда в присутствии не зависящего от времени потенциала внешнего электромагнитного поля формализм вигнеровских преобразований позволяет связать дивергенцию аксиального тока с топологическим инвариантом в импульсном пространстве, определенным для системы, находящейся в равновесии, и ответственным за стабильность ферми-точки. Полученное выражение представляет аксиальную аномалию для решеточных моделей общего вида. Мы иллюстрируем его рассмотрением модели с фермионами Вильсона.

DOI: 10.7868/S0370274X17150085

1. Введение. Если дираковский фермион обладает симметрией относительно преобразования $\psi \to \to e^{i\gamma^5\alpha}\psi$ (для действительного α), то из классических уравнений движения следует, что $\partial_\mu j^{5\mu} = = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 0$. Однако в квантовой теории при наличии внешнего электрического ($\mathbf{E}$) и магнитного ($\mathbf{B}$) полей данное равенство переходит [1, 2] в $\partial_\mu j^{5\mu} = \frac{1}{2\pi^2}\mathbf{E}\mathbf{B}$. (Мы пользуемся релятивиской системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$ и кроме того, включаем электрический заряд в определение электромагнитного поля.)

Решеточная регуляризация является по сути единственным способом вычислять любые физические величины в квантовой теории поля. Кроме того, те же решеточные модели, которые используют при исследовании релятивистской квантовой теории поля, применяют также и для описания реальных материалов в физике твердого тела [3–5]. Поэтому вопросам, связанным с аксиальной аномалией в дискретном пространстве-времени, в литературе уделялось значительное внимание [6–10]. Были получены выражения для дивергенции аксиального тока как для вильсоновских [11, 12], так и для оверлэп [13] фермионов [14, 15]. В рамках физики твердого тела киральная аномалия исследовалась в полуметаллах: вейлевских [16, 17] и дираковских [17–19]. Кроме того, она обсуждалась для сверхтекучего гелия-3 [20–22]. Таким образом, представляет интерес получение выражения для дивергенции аксиального тока для решеточных моделей общего вида. Следует отметить, что важным свойством аномалии в релятивистской квантовой теории поля является независимость коэффициента перед $\mathbf{EB}$ от взаимодействия [1, 2], связанная с его неизменностью при плавном изменении физической системы (например, при плавном включении и выключении взаимодействия). Подобными неизменными величинами являются топологические инварианты в импульсном пространстве, которые могут изменяться только при топологическом фазовом переходе.

2. Аксиальный ток в решеточных моделях. Рассмотрим решеточные модели, которые дискретизуют теории поля с дираковскими фермионами или (что то же) представляют собой так называемые "tight-binding" модели дираковских полуметаллов. При этом, для того чтобы один и тот же формализм мог использоваться в исследованиях типичных решеточных дискретизаций релятивистской квантовой теории поля и моделей реальных дираковских полуметаллов, мы предполагаем, что в последних эволюция по времени дискретизована. Такая дискретизация приводит к тому, что (при нулевой температуре) импульсное пространство представляется как

1)e-mail: zubkov@itep.ru

произведение первой зоны Бриллюэна и конечного интервала частот, делая все импульсное пространство компактным.

Для широкого класса подобных моделей выражение для статистической суммы записывается следующим образом [23]:

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp(-\int_M \frac{d^4 p}{|M|} \bar{\psi}^T(p) G^{-1}(p - A(i\partial_p) - \\ - A^5 \gamma^5 (i\partial_p))\psi(p)), \quad (1)$$

где $|M|$ – это 4-х мерный объем импульсного пространства рассматриваемой системы, $G(p)$ – двухточечная функция Грина в импульсном пространстве для системы в отсутствии внешних электромагнитного $A(x)$ и аксиального $A^5(x)$ полей ($x = (\tau, \mathbf{r})$ – координаты в Евклидовом пространстве, τ – мнимое время, а $\mathbf{r}$ – пространственные координаты). Предполагаем, что такая система однородна и поэтому $G(p)$ зависит только от одного набора Евклидовых имульсов $p = (\omega, \mathbf{p})$. $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$ – это матрица, действующая в подпространстве эффективных четырехмерных спиноров, представляющих низкоэнергетическую эффективную теорию дираковских спиноров, которая появляется в окрестности ферми-точки в рассматриваемой решеточной модели. В определении данной модели уже могут быть включены некоторые взаимодействия, однако не учитываются члены в эффективном действии, содержащие произведение более чем двух фермионных полей.

Выражение $G^{-1}(p - A(i\partial_p) - A^5\gamma^5(i\partial_p))$ понимается как разложение в ряд по степеням импульсов выражения для $G^{-1}(p)$, в которое подставлены комбинации $\mathcal{P}_i = p - A_i(i\partial_p) - A_i^5 \gamma^5 (i\partial_p)$ вместо p_i. Следует при этом указать способ упорядочения произведения входящих в это выражение операторов. Мы выбираем симметричное упорядочение, в котором каждое произведение вида $\hat{f}_{i_1...i_n}\mathcal{P}_{i_1}...\mathcal{P}_{i_n}$ (где $\hat{f}_{i_1...i_n}$ – матрицы) заменяется на сумму $\hat{f}_{i_1...i_n}\frac{1}{n!}\sum_{(i_1,...,i_n)\to(j_1,...,j_n)}\mathcal{P}_{j_1}...\mathcal{P}_{j_n}$ по всем возможным комбинациям $(j_1,...,j_n)$ индексов $i_1,...,i_n$. В частности, матрица γ^5, входящая в $\mathcal{P}$, согласно такому упорядочению, всегда оказывается справа от $\hat{f}_{i_1...i_n}$.

Аксиальный ток можно определять в принципе различными способами. Например, можно находить его как вариацию функционального интеграла по отношению к полю A_5:

$$j^{5,k}(x) = -\frac{\delta}{\delta A_k^5(x)} \log Z[A^5, A]\Big|_{A^5=0}. \quad (2)$$

Мы принимаем это определение для систем, у которых "затравочная" функция Грина $G(p)$ коммутирует или антикоммутирует с γ^5. Для таких систем выражение для аксиального тока следующее (доказательство этого утверждения см. в [24]):

$$j^{5k}(x) = \int_{\mathcal{M}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \,\mathrm{Tr}\, \gamma^5 \tilde{G}(x,p) \frac{\partial}{\partial p_k} \Big[\tilde{G}^{(0)}(x,p)\Big]^{-1}, \quad (3)$$

где $\tilde{G}^{(0)}(x,p) = G(p - A(x))$, а $\tilde{G}(x,p)$ определяется из решения уравнения Грюневольда:

$$1 = Q(x,p) \star \tilde{G}(x,p) \equiv \\ \equiv Q(x,p) e^{\frac{i}{2}(\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_x)} \tilde{G}(x,p). \quad (4)$$

Следуя [24], мы рассматриваем выражение (3) в качестве определения аксиального тока также и для моделей, в которых отсутствует точная киральная симметрия и, соответственно, матрица γ^5 не коммутирует (или антикоммутирует) с "затравочной" функцией Грина $G(p)$. Очевидно, что в наивном непрерывном пределе это определение приведет нас к привычному выражению $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$. Уравнение Грюневольда решается в порядке за порядком разложения по производным:

$$\tilde{G}(x,p) = \tilde{G}^{(0)}(x,p) + \tilde{G}^{(1)}(x,p) + ..., \quad (5)$$

и мы приходим к

$$j^{5k}(x) = T\, \frac{i}{2} \sum_{\omega_n} \sum_{i,j=1..4} \mathrm{Tr} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \gamma^5 G(\omega_n, \mathbf{p}) \times \\ \times \partial_{p_i} G^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_j} G(\omega_n, \mathbf{p}) \partial_{p_k} G^{-1}(\omega_n, \mathbf{p}) F^{ij}(x), \quad (6)$$

где $G(\omega_n, \mathbf{p}) = G(p)$ – "затравочная" функция Грина, в которой нет калибровочных потенциалов A и A^5, при этом мы также обозначаем $p_4 = \omega_n = \frac{2\pi}{N}(t + \frac{1}{2})$, $t = 0...N-1$. Здесь мы переходим от системы при нулевой температуре к системе с конечной температурой, что эффективно сводится к замене интеграла по частотам на сумму. При этом $T = 1/N$ играет роль температуры, измеренной в решеточных единицах $1/\delta\tau$ (здесь N – число шагов решеточной модели по мнимому времени, а $\delta\tau$ – это шаг решетки по временно́му направлению).

3. Дивергенция аксиального тока. Прежде всего заметим, что выражение схожее с (6), возникает в разложении по производным решения уравнения Грюневольда вне рамок линейного отклика аксиального тока на внешнее электромагнитное поле. При этом в отличие от случая линейного отклика мы должны ограничиться только внешними полями с потенциалом, не зависящим явно от времени. Только для таких внешних полей мы можем составить гамильтониан системы и использовать термодинамический ансамбль Гиббса. В общем случае зависящих от времени внешних потенциалов в нашем формализме функциональных интегралов мы должны были бы воспользоваться кинетическим подходом и техникой Келдыша. Подобное рассмотрение выходит за рамки настоящей работы. Таким образом, здесь и далее $A(x)$ не зависит от мнимого времени τ и зависит только от пространственных координат. В этом случае имеем разложение $j^{5k}(x) = j^{(0)5k}(x) + j^{(1)5k}(x) + ...$, где следующие члены содержат степени производных внешнего поля выше первой, в то время как

$$j^{(0)5k}(x) = T \sum_{\omega_n} \mathrm{Tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \gamma^5 G(p - A(x)) \times \times \partial_{p_k} G^{-1}(p - A(x)) \quad (7)$$

и $j^{(1)5k}(x) = \frac{i}{4\pi^2} M_3^{ijk} F_{ij}$, где

$$M_3^{ijk} = T \frac{1}{4} \sum_{\omega_n} \mathrm{Tr} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\pi} \gamma^5 G(p - A(x)) \times \times \partial_{p_i} G^{-1}(p - A(x)) \partial_{p_j} G(p - A(x)) \times \times \partial_{p_k} G^{-1}(p - A(x)) - (i \leftrightarrow j). \quad (8)$$

При вычислении дивергенции аксиального тока мы будем удерживать только производные от первых двух членов в разложении. Следующие члены подавлены по сравнению с первыми двумя степенями отношения $\frac{F_{ij}}{\mu^2}$, где μ – характерная для данной системы шкала энергий. Для системы безмассовых невзаимодействующих фермионов в качестве шкалы выступает ультрафиолетовое обрезание эффективной низкоэнергетической теории и, следовательно, оставшиеся члены просто исчезают в непрерывном пределе. Вопрос о возможной роли этих следующих членов в моделях с взаимодействием также выходит за рамки настоящей работы. Дивергенция первого слагаемого в разложении по производным дает

$$\partial j^{(0)5}(x) = -T \sum_{\omega_n} \sum_{k,l=1,\dots,4} \mathrm{Tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \gamma^5 \times \times \partial_{p_l} \Big(G(p - A(x)) \partial_{p_k} G^{-1}(p - A(x)) \Big) \partial_{x^k} A_l(x). \quad (9)$$

Мы исходим из того, что введение конечной температуры полностью устраняет полюса функции Грина в евклидовом импульсном пространстве. Мы видим, что в результате в сумме по l в данном выражении остаются только члены с $l = 4$, поскольку члены с $l = 1, 2, 3$ являются интегралами по зоне Бриллюэна от полной производной и таким образом равны нулю. Что касается члена с $l = 4$, в пределе нулевых температур мы сводим его к интегралу по одномерному объекту $C_k(p_i, p_j)$, определенному для любых p_i, p_j $(i \neq j \neq k)$ и состоящему из двух бесконечно близких друг к другу прямых линий, идущих в направлении оси p_k, соответствующих значениям $p_4 = p_4^{(0)} \pm \epsilon$, где $p_4^{(0)}$ – координата ферми-точки, а ϵ – малая величина. (В случае наличия нескольких ферми-точек, C_k состоит из нескольких пар таких прямых линий.) В результате получаем

$$\partial j^{(0)5}(x) = - \sum_{k=1,\dots,3} \int \frac{\epsilon^{ijk} dp_i \wedge dp_j}{2(2\pi)^4} \mathrm{Tr} \gamma^5 \times \times \int_{C_k(p_i,p_j)} dp_k G(p - A(x)) \partial_{p_k} G^{-1}(p - A(x)) \partial_{x^k} A_4(x), \quad (10)$$

где интеграл $\int \frac{\epsilon^{ijk} dp_i \wedge dp_j}{2(2\pi)^4}$ берется по всем значениям p_i, p_j. Однако, в силу того, что интеграл по $C_k(p_i, p_j)$ отличен от нуля только вблизи от положения ферми-точки, мы можем ограничиться в интеграле по p_i, p_j полосой бесконечно малой площади, что сводит все выражение к бесконечно малой величине. Таким образом, (7) не вносит никакого вклада в киральную аномалию.

Аналогичное рассмотрение второго члена в разложении приводит к $\partial j^5(x) = \frac{i}{4\pi^2} F_{ij} \partial_{x^k} M_3^{ijk} + \frac{i}{4\pi^2} M_3^{ijk} \partial_{x^k} F_{ij}$. В пределе нулевой температуры в первом члене выражение сводится к интегралу по поверхности Σ, состоящей из двух бесконечно близких гиперплоскостей, перпендикулярных оси p_4 так, что ферми-точка находится между ними: $\partial j^5 = \frac{i}{4\pi^2} N_3^{ijk} F_{ij} \partial_{x^k} A_4 + \frac{i}{4\pi^2} M_3^{ijk} \partial_{x^k} F_{ij}$, где под N_3^{ijk} понимается выражение:

$$N_3^{ijk} = \frac{1}{4} \mathrm{Tr} \times \times \int_\Sigma \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \gamma^5 G(p - A(x)) \partial_{p_i} G^{-1}(p - A(x)) \times \times \partial_{p_j} G(p - A(x)) \partial_{p_k} G^{-1}(p - A(x)) - (i \leftrightarrow j). \quad (11)$$

При этом ясно, что $\partial_{x^l} M_3^{ijk} = N_3^{ijk} \partial_{x^l} A_4$. Данное выражение подсказывает, какое ограничение следует наложить на решеточную модель с тем, чтобы она была способна воспроизвести стандартное выражение для киральной аномалии. А именно, *мы можем потребовать, чтобы*

$$M_3^{ijk} = -M_3^{ikj}. \quad (12)$$

Мы рассматриваем случай, когда функция Грина $G(p)$ в малой окрестности ферми-точки коммутирует или антикоммутирует с γ^5 и при этом выполняются условия (12). Тогда в оставшемся выражении мы можем сначала в Σ оставить участки, бесконечно близкие к ферми-точке. Так мы придем к выводу, что $N_3^{ijk} = -N_3^{ikj}$. Далее, член в аксиальной аномалии, вызванный компонентами N_3^{4jk}, имеет вид $-\frac{i}{4\pi^2}N_3^{4jk}\partial_{x^j}A_4\partial_{x^k}A_4 = 0$. Таким образом, в киральной аномалии остается только член с $i,j,k = 1,2,3$. Его мы можем преобразовать посредством деформации Σ в бесконечно малую замкнутую поверхность сферической формы, окружающую ферми-точку. (При наличии поля $A(x)$ положение Σ зависит от x.) Результирующее выражение будет являться топологическим инвариантом, ответственным за стабильность данной ферми-точки относительно любых плавных изменений системы, оставляющих равным нулю коммутатор (антикоммутатор) γ^5 и $G(p)$ в этой окрестности. Таким образом, получаем $N_3^{ijk} = N_3\epsilon^{ijk}$, где

$$N_3 = \frac{1}{2\times 3!\times(2\pi)^2}\int_\Sigma \mathrm{Tr}\gamma^5 G(p-A(x))\times \tag{13}$$
$$\times dG^{-1}(p-A(x))\wedge dG(p-A(x))\wedge dG^{-1}(p-A(x)).$$

В силу того, что $iA_4(x) = A_0(x)$ – это не что иное, как скалярный потенциал внешнего электрического поля, находим окончательно:

$$\partial j^5(x) = \frac{N_3}{2\pi^2}\mathbf{E}(x)\mathbf{B}(x), \tag{14}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – внешние электрическое и магнитное поля, которые сами по себе могут зависеть от координат.

Следует отметить, что в (13) N_3 выглядит зависящим от $A(x)$. Однако при условии, что γ^5 коммутирует (антикоммутирует) с $G(p)$ в окрестности ферми-точки, весь эффект изменения поля $A(x)$ сводится к изменению положения ферми-точки и окружающей ее поверхности Σ. Значит, мы можем в (13) выбрать $A(x) = 0$.

Аналогичным образом, стартуя с (6), можно получить следующее выражение для эффекта кирального разделения (Chiral Separation Effect), которое верно для любой решеточной модели с ферми-точками, такими, что матрица γ^5 в малой окрестности ферми-точки коммутирует или антикоммутирует с $G(p)$:

$$j^{5k} = -\frac{N_3}{4\pi^2}\epsilon^{ijk0}\mu F_{ij}, \tag{15}$$

где μ – это химический потенциал.

Выражения, обсуждавшиеся в [24] для Вильсоновских и оверлэп фермионов, являются частными случаями этой общей формулы.

4. Вильсоновские фермионы. В качестве иллюстрации рассмотрим модель фермионов Вильсона-Дирака [25], которая играет важную роль в численных симуляциях в квантовой хромодинамике, а также позволяет качественно описывать ряд систем физики твердого тела. В этой модели "затравочная" функция Грина задается как

$$G^{-1}(p) = \sum_{i=1,\ldots,4}\sin(p_i)\gamma^i + i\sum_{i=1,\ldots,4}(2\sin^2(p_i/2)+m), \tag{16}$$

где γ^i – матрицы Дирака.

Далее мы подразумеваем, что гамма-матрицы Дирака заданы в евклидовом киральном представлении:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ -i\sigma^i & 0\end{pmatrix}, \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{17}$$

где σ^i, $i = 1,2,3$ – матрицы Паули.

Чтобы иметь дело с безмассовыми фермионами, мы требуем: параметр m в (16) должен обращаться в нуль.

С целью дать альтернативный вывод выражения для киральной аномалии вместо выведенного выше общего выражения (14) (с N_3, данным в (13)), мы приводим непосредственное вычисление дивергенции аксиального тока для Вильсоновских фермионов. Начнем с того, что вычислим линейный отклик аксиального тока на внешнее электромагнитное поле. Для этого подставим в (3) пропагатор (16)

$$\begin{aligned} j^{5k} = \frac{iT}{2}\sum_{\omega_n}\sum_{i,j=1,\ldots,4}\mathrm{Tr}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\times \\ \times\gamma^5\frac{\sum_{l=1,\ldots,4}\sin(p_l)\gamma^l - m(p)i}{g(\omega_n,\tilde{p})}\times \\ \times\partial_i\left(\sum_{t=1,\ldots,4}\sin(p_t)\gamma^t + m(p)i\right)\times \\ \times\partial_j\left(\frac{\sum\limits_{q=1,\ldots,4}\sin(p_q)\gamma^q - m(p)i}{g(\omega_n,\tilde{p})}\right)\times \\ \times\partial_k\left(\sum_{f=1,\ldots,4}\sin(p_f)\gamma^f + m(p)i\right)F_{ij}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $g(\omega_n,\tilde{p}) = \sum\limits_{i=1,\ldots,4}\sin^2(p_i) + (\sum\limits_{i=1,\ldots,4}2\sin^2(p_i/2))^2$. Из-за того, что под следом в (18) стоит γ^5, отличными от нуля будут только те члены, в которых помимо γ^5 стоит произведение четырех различных гамма-матриц. С учетом соотношения $\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l) = 4\epsilon^{ijkl}$ аксиальный ток принимает вид

$$j^{5k} = \frac{iT}{2}\sum_{\omega_n}\sum_{i,j=1..4}\mathrm{Tr}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\gamma^5\sum_{l=1,...,4}\sin(p_l)\gamma^l \times$$
$$\times\frac{\sum_{t=1,...,4}\cos(p_t)\gamma^t\delta_i^t}{g(\omega_n,\tilde{p})}\Bigg(\frac{\sum_{q=1,...,4}\cos(p_q)\gamma^q\delta_j^q}{g(\omega_n,\tilde{p})} +$$
$$+\sum_{q=1,...,4}\sin(p_q)\gamma^q\partial_j\frac{1}{g(\omega_n,\tilde{p})}\Bigg)\sum_{f=1,...,4}\cos(p_f)\gamma^f\delta_k^f F_{ij}. \quad (19)$$

Рассмотрим выражение, к которому приводит второй член, стоящий в скобках:

$$N_2 = 2iT \times$$
$$\times\sum_{\omega_n}\sum_{l,t,q,f,i,j=1,...,4}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\epsilon^{ltqf}\frac{\cos(p_t)\cos(p_f)\delta_i^t}{g(\omega_n,\tilde{p})}\times$$
$$\times\frac{(\sin(p_q)\sin(p_l)+\sin(p_q)\sin(p_l))}{2}\times$$
$$\times\partial_j\left(\frac{1}{g(\omega_n,\tilde{p})}\right)\delta_k^f F_{ij}. \quad (20)$$

После выполнения суммирования оно обращается в нуль. Таким образом, линейный отклик аксиального тока на внешнее поле задается выражением:

$$j^{5k} = 2iT\sum_{\omega_n}\sum_{l,i,j=1,...,4}\epsilon^{lijk}F_{ij}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}M_{lijk}, \quad (21)$$

где $M_{lijk} = \frac{\sin(p_l)\cos(p_i)\cos(p_j)\cos(p_k)}{(g(\omega,\tilde{p}))^2}$.

Согласно результатам предыдущего раздела, чтобы получить выражение для киральной аномалии, нам необходимо просто подставить вместо p_i комбинацию $p_i - A_i(x)$ и продифференцировать затем по x. Обозначим $\pi_i(x) = p_i - A_i(x)$, $i = 1,...,4$. При этом $iA_4(x) = A_0(x)$, где A_0 – нулевая компонента (скалярный потенциал) внешнего электромагнитного поля. Напомним, что согласно принятому нами соглашению $A_i(x)$ не зависит от времени, а только от пространственных координат. Выражение для дивергенции аксиального тока приобретает вид

$$\partial j^5(x) = -2iT\,F_{ij}(x)\partial_{x^k}A_m(x)\times$$
$$\times\sum_{\omega_n}\sum_{l,i,j,k,m=1..4}\epsilon^{lijk}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\partial_{p_m}\Big\{\frac{\sin(\pi_l(x))\cos(\pi_i(x))\cos(\pi_j(x))\cos(\pi_k(x))}{[g(\pi_4(x),\tilde{\pi}(x))]^2}\Big\}. \quad (22)$$

Ясно, что в интеграле по $\mathbf{p}$ мы всегда сможем сделать сдвиг переменной интегрирования, пользуясь периодическими граничными условиями $p_i \to p_i - A_i(x)$, $i = 1,...,3$. Более того, при $m = 1,2,3$ в силу тех же периодических граничных условий этот интеграл равен нулю. Перейдем в оставшемся выражении к пределу $N \to \infty$, соответствующему нулевой температуре: $T\sum_{\omega_n} \to \int_{\omega\neq 0}\frac{d\omega}{2\pi}$, где $\omega \neq 0$ символически означает то, что мацубаровская частота не обращается в нуль. Теперь мы можем "снять" производную в выражении (22) и в итоге:

$$\partial j^5 = -2i\times$$
$$\times\sum_{l,i,j,k=1,...,4}\epsilon^{lijk}F_{ij}\,\partial_{x^k}A_4\,(Q_{lijk}(-0) - Q_{lijk}(+0)), \quad (23)$$

где под Q_{lijk} мы понимаем выражение, в котором проведено интегрирование по 4-ой компоненте импульса, а именно: $Q_{lijk}(\omega) = \int\frac{dp_1dp_2dp_3}{(2\pi)^4}M_{lijk}$. В Q_{lijk} будут встречаться интегралы двух типов:

$$I^1_{4ijk}(\omega) = \int\frac{dp_1dp_2dp_3}{(2\pi)^4}\frac{\sin(\omega)\cos(p_i)\cos(p_j)\cos(p_k)}{(g(\omega,\tilde{p}))^2},$$
$$I^2_{i4jk}(\omega) = \int\frac{dp_1dp_2dp_3}{(2\pi)^4}\frac{\sin(p_i)\cos(\omega)\cos(p_j)\cos(p_k)}{(g(\omega,\tilde{p}))^2}. \quad (24)$$

Рассмотрим первый из них. В силу того, что интеграл отличен от нуля только при $p_i \sim \omega$ и $\omega \to 0$, мы можем воспользоваться разложением вблизи нуля и получить при $\omega \to 0$:

$$Q_{4ijk}(\omega) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^4}\frac{\omega}{(\omega^2+p^2+(\omega^2+p^2)^2)^2}. \quad (25)$$

При $\omega \neq 0$ перепишем (25):

$$Q_{4ijk}(\omega) =$$
$$= \mathrm{sign}(\omega)\int_0^\infty\frac{4\pi\tau^2d\tau}{(2\pi)^4(1+\tau^2+\omega^2(1+\tau^2)^2)^2}, \quad (26)$$

здесь $\tau = \frac{p}{\omega}$.

Интеграл (26) можно вычислить точно: $Q_{4ijk}(\pm 0) = \pm\frac{1}{16\pi^2}$. Нам нет необходимости считать второй интеграл в (24), поскольку он является четной функцией по отношению к ω, и поэтому сокращается в (23). Таким образом, мы приходим к (14) с $N_3 = 1$.

5. Заключение. В настоящей работе рассмотрены решеточные модели с безмассовыми фермионами (или что то же – модели физики твердого тела с ферми-точками, соответствующими индуцированным дираковским фермионам), которые в отсутствии внешних полей удовлетворяют условию (12): $M_3^{ijk} = -M_3^{ikj}$ тривиальным образом в том случае, если γ^5 коммутирует или антикоммутирует с $G(p)$. Соответственно, для аналитической $G(p)$ тензор $M_3^{i\{jk\}} = M_3^{ijk} + M_3^{ikj}$ может быть представлен как интеграл от произведения (анти)коммутатора γ^5 с $G(p)$ и некоторой ограниченной функции. Нами рассмотрена ситуация, когда функция Грина $G(p)$ в малой окрестности ферми-точки (анти)коммутирует с γ^5, и таким образом в $M_3^{i\{jk\}}$ может внести вклад только область импульсов, далеких от положения ферми-точки. В непрерывном пределе $|A(x)| \ll 1$ в решеточных единицах, и для вычисления $M_3^{i\{jk\}}$ можно положить $A(x) = 0$. Таким образом, если мы хотим, чтобы заданная решеточная модель являлась регуляризацией изотропной квантовой теории поля, необходимо, чтобы $M_3^{i\{jk\}} = 0$, поскольку в системе нет выделенного направления, а $M_3^{i\{jk\}}$ входит в выражение для наблюдаемого тока j^5.

Для моделей, удовлетворяющих (12), получено общее выражение для киральной аномалии в пределе нулевых температур. Аналогично теории квантовых жидкостей [22], согласно выражению (14), киральная аномалия пропорциональна величине N_3, представленной в (13), являющейся топологическим инвариантом в импульсном пространстве относительно таких деформаций физических систем, которые не нарушают коммутации (антикоммутации) матрицы γ^5 с функцией Грина в малой окрестности ферми-точки. Если допустимые вариации интересующих нас физических систем удовлетворяют этому свойству, то ответственная за это симметрия микроскопической теории защищает ферми-точку от исчезновения.

У нас нет основания полагать, что в реальных, недавно обнаруженных дираковских полуметаллах (например CD_3As_2 и Na_3Bi [3–5]), тензор M_3^{ijk}, определенный в (8), является полностью антисимметричным. В (8) величина G – это матрицы $N \times N$ с $N > 4$ и $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1) \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единичная $(N-4)\times(N-4)$ матрица, определенная на подпространстве, которое игнорируется при рассмотрении низкоэнергетической эффективной полевой теории индуцированных дираковских спиноров. В этом случае мы имеем

$$\partial j^5(x) = \frac{N_3}{2\pi^2}\mathbf{E}(x)\mathbf{B}(x) + \frac{i}{4\pi^2}\, M_3^{ijk}\partial_{x^k}F_{ij}. \qquad (27)$$

Следует помнить, что $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ для $j, j = 1,2,3,4$, а также, A_i не зависит от x^4 и $A_4 = -iA_0$. При этом A_i для $i = 0,1,2,3$ – это физический электромагнитный 4-потенциал в пространстве Минковского (не зависящий от времени). У таких систем, а равно и решеточных систем более общего вида, выражение (14) для дивергенции аксиального тока остается применимо, если переопределить аксиальный ток следующим образом:

$$j^{5k}(x) \to j^{5k}(x) - \frac{i(M_3^{ijk} + M_3^{ikj})}{8\pi^2}F_{ij}(x). \qquad (28)$$

Данное переопределение соответствует вычитанию из аксиального тока некоторой величины, в которую вносят вклад особенности модели вдали от ферми-точки.

Использованный нами формализм связан с рассмотрением физических систем в термодинамическом равновесии, что предполагает то, что полный гамильтониан не должен зависеть явно от времени; это приводит к необходимости рассматривать только внешнее электромагнитное поле с потенциалом, не зависящим от времени. Конечные температуры устраняют инфракрасную расходимость в интеграле по 4-импульсу, поскольку устраняют полюс в функции Грина. В общем случае зависящих от времени внешних потенциалов в нашем формализме функциональных интегралов мы должны были бы воспользоваться кинетическим подходом и техникой Келдыша. Предположительно данный подход должен привести к тому же выражению для киральной аномалии в решеточных моделях. Однако развитие этого формализма выходит за рамки настоящей работы.

Выражения (27), (28) могут иметь существенные последствия для решеточных теорий. А именно, привычное выражение для дивергенции аксиального тока возникает только если модель удовлетворяет условию (12). Данное условие следует накладывать на решеточную регуляризацию релятивистской квантовой теории поля. В свою очередь, в реальных материалах – дираковских полуметаллах, которые, как ожидалось, должны симулировать релятивистскую квантовую теорию поля [26], киральная аномалия реализуется, вопреки ожиданиям, не вполне обычным образом.

Настоящая работа поддержана грантом РНФ # 16-12-10059. М.А.З. признателен Ариэльскому университету (Израиль) за гостеприимство во время завершающей стадии работы над настоящей статьей.

1. А.Ю Морозов, УФН **150**, 337 (1986).
2. М.А. Шифман, УФН **157**, 561 (1989).
3. Z.K. Liu, B. Zhou, Y. Zhang, Z.J. Wang, H.M. Weng, D. Prabhakaran, S.-K. Mo, Z.X. Shen, Z. Fang, X. Dai, Z. Hussain, and Y.L. Chen, Science **343**, 864 (2014) [arXiv:1310.0391].
4. M. Neupane, S.Y. Xu, R. Sankar, N. Alidoust, G. Bian, Ch. Liu, I. Belopolski, T.-R. Chang, H.-T. Jeng, H. Lin, A. Bansil, F. Chou, and M.Z. Hasan, Nature Commun. **05**, 3786 (2014) [arXiv:1309.7892].
5. S. Borisenko, Q. Gibson, D. Evtushinsky, V. Zabolotnyy, B. Büchner, and R.J. Cava, Phys. Rev. Lett. **113**, 027603 (2014) [arXiv:1309.7978].
6. E. Seiler and I.O. Stamatescu, Phys. Rev. D **25**, 2177 (1982).
7. N. Kawamoto and K. Shigemoto, Phys. Lett. B **120**, 183 (1983).

8. K. Fujikawa, Z. Phys. C **25**, 179 (1984).
9. T. Reisz and H. J. Rothe, Phys. Lett. B **455**, 246 (1999).
10. J. Ambjorn, J. Greensite, and C. Peterson, Nuclear Phys. B **221**, 381 (1983).
11. H. J. Rothe and N. Sadooghi, Phys. Rev. D **58**, 074502 (1998).
12. L. H. Karsten and J. Smit, Nucl. Phys. B **183**, 103 (1981).
13. H. Neuberger, Phys. Lett. B **417**(1–2), 141 (1998).
14. M. Luscher, Phys. Lett. B **428**, 342 (1998).
15. P. Hasenfratz, V. Laliena, and F. Niedermeyer, Phys. Lett. B **427**, 125 (1998).
16. A. A. Burkov, J. Phys. Condens. Matter **27**, 113201 (2015).
17. P. Goswami, J. H. Pixley, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **92**, 075205 (2015).
18. M. N. Chernodub and M. Zubkov, Phys. Rev. B **95**, 115410 (2017).
19. M. A. Zubkov, Annals Phys. **360**, 655 (2015).
20. A. V. Balatskii, G. E. Volovik, and V. A. Konyshev, ZhETF **90**, 2038 (1986).
21. G. E. Volovik, Phys. Rep. **351**, 195 (2001).
22. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
23. M. A. Zubkov, Annals Phys. **373**, 298 (2016).
24. Z. V. Khaidukov and M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **95**(7), 074502 (2017) [arXiv:1701.03368 [hep-lat]].
25. K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
26. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. B **130**, 389 (1983).