Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 4, с. 195 – 198 © 2017 г. 25 августа

# Пропагатор нейтрино в среде и его спиновые свойства

Д. М. Воронин[1)], А. Е. Калошин[1)]

Иркутский государственный университет, 664003 Иркутск, Россия

Поступила в редакцию 20 июня 2017 г.

После переработки 10 июля 2017 г.

Построено спектральное представление для пропагатора нейтрино в движущейся среде с постоянной плотностью. Обнаружено, что в среде существует 4-мерная ось полной поляризации, все полюса пропагатора классифицируются по значениям проекции спина на эту ось.

DOI: 10.7868/S0370274X17160019

**1. Введение.** Физика нейтрино постепенно становится инструментом исследований в разных областях: от геофизики до физики вне рамок Стандартной Модели. Если говорить о прохождении нейтрино через вещество, то наиболее яркий эффект связан с резонансным усилением осцилляций [1, 2] и проблемой дефицита солнечных нейтрино (см. обзоры [3, 4]). Для описания распространения нейтрино в среде используется либо квантовомеханический подход, либо теоретико-полевой (см., например, [5, 6]).

В данной работе мы строим спектральное представление пропагатора в движущейся среде, которое основано на задаче на собственные значения для обратного пропагатора. Оказалось, что можно написать простое аналитическое решение в самом общем случае, без каких-либо ограничений на вид взаимодействий. Спектральное представление дает максимально простой алгебраический подход для описания распространения нейтрино в движущейся среде в рамках квантовой теории поля.

**2. Пропагатор в среде и спиновые проекторы.** При рассмотрении задачи в рамках квантовой теории поля центральным объектом является пропагатор фермиона в среде, содержащий два четырехмерных вектора — импульс $p$ и скорость среды $u$, всего можно написать 8 гамма-матричных структур в разложении пропагатора при нарушении четности. Наиболее общее выражение для обратного пропагатора выглядит так:

$$\begin{aligned} S = G^{-1} = s_1 I + s_2\hat{p} + s_3\hat{u} + s_4\sigma^{\mu\nu}p_\mu u_\nu + \\ + s_5 \mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}u_\lambda p_\rho + s_6\gamma^5 + s_7\hat{p}\gamma^5 + s_8\hat{u}\gamma^5, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $s_i$ – скалярные функции, зависящие от инвариантов.

Далее решим задачу на собственные значения для обратного пропагатора общего вида. Для этого удобно использовать вместо $\gamma$-матричного другой базис с простыми мультипликативными свойствами.

Следуя работе [7], введем вектор $z^\mu$, который является линейной комбинацией векторов $p$, $u$, обладает свойствами вектора поляризации фермиона:

$$z^\mu p_\mu = 0, \quad z^2 = -1, \qquad (2)$$

имеет вид

$$z^\mu = b(p^\mu(up) - u^\mu p^2), \quad b = 1/\sqrt{p^2[(up)^2 - p^2]}. \qquad (3)$$

Используя этот вектор, построим обобщенные спиновые проекторы[2)]:

$$\Sigma^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5\hat{z}\hat{n}), \quad \Sigma^\pm\Sigma^\pm = \Sigma^\pm, \quad \Sigma^\pm\Sigma^\mp = 0, \qquad (4)$$

где $n^\mu = \dfrac{p^\mu}{W}$, $W = \sqrt{p^2}$.

Легко проверить, что $\Sigma^\pm$ коммутируют со всеми $\gamma$-матрицами в разложении обратного пропагатора (1). Если умножить $S(p,u)$ (1) на единичную матрицу:

$$S = (\Sigma^+(z) + \Sigma^-(z))S \equiv S^+ + S^-, \qquad (5)$$

то получим два ортогональных друг другу слагаемых.

Еще одно свойство $\Sigma^\pm$ состоит в том, что “под наблюдением” спинового проектора (т.е. в слагаемых $S^+, S^-$) $\gamma$-матричные структуры существенно упрощаются. А именно: $\gamma$-матрицы, содержащие скорость $u^\mu$, сводятся к набору из 4-х $\gamma$-матриц, в которых скорости нет: $I, \hat{p}, \gamma^5, \hat{p}\gamma^5$. Например, слагаемое $\hat{u}$ в (1)

[1)]e-mail: dmitry.m.voronin@gmail.com; alexander.e.kaloshin@gmail.com

[2)]Мы называем их обобщенными из-за дополнительного фактора $\hat{n}$. Но на самом деле (4) есть самый общий вид спиновых проекторов при нарушении четности и наличия смешивания – см. подробности в [8].

можно переписать в виде линейной комбинации $\hat{p}$ и $\hat{z}$ и воспользоваться свойством проектора:

$$\frac{1+\gamma^5\hat{z}\hat{n}}{2}\hat{u} =$$
$$= \frac{1+\gamma^5\hat{z}\hat{n}}{2}(a_1\hat{p}+a_2\hat{z}) = \Sigma^+(z)(a_1\hat{p} - \frac{a_2}{W}\hat{p}\gamma^5). \quad (6)$$

После этого упрощения удобно использовать внемассовые импульсные проекторы:

$$\Lambda^\pm = \frac{1}{2}(1\pm\hat{n}), \quad n^\mu = \frac{p^\mu}{W}, \quad (7)$$

ортогональные между собой.

Имея набор проекторов $\Lambda^\pm$ и $\Sigma^\pm$, можно построить базис, который будем использовать дальше при решении задачи на собственные значения:

$$\begin{aligned} R_1 &= \Sigma^-\Lambda^+, & R_5 &= \Sigma^+\Lambda^+, \\ R_2 &= \Sigma^-\Lambda^-, & R_6 &= \Sigma^+\Lambda^-, \\ R_3 &= \Sigma^-\Lambda^+\gamma^5, & R_7 &= \Sigma^+\Lambda^+\gamma^5, \\ R_4 &= \Sigma^-\Lambda^-\gamma^5, & R_8 &= \Sigma^+\Lambda^-\gamma^5. \end{aligned} \quad (8)$$

Мультипликативные свойства базиса (8) представлены в табл. 1, в которой элемент из столбца умножается слева на элемент из строки.

Обратный пропагатор (1) можно написать в виде разложения по этому базису

$$S(p,u) = \sum_{i=1}^{4} R_i S_i(p^2, pu) + \sum_{i=5}^{8} R_i S_i(p^2, pu), \quad (9)$$

причем две эти суммы ортогональны друг другу.

**Таблица 1.** Мультипликативные свойства элементов базиса (8)

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | $R_1$ | 0 | $R_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $R_2$ | 0 | $R_2$ | 0 | $R_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $R_3$ | 0 | $R_3$ | 0 | $R_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $R_4$ | $R_4$ | 0 | $R_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $R_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $R_5$ | 0 | $R_7$ | 0 |
| $R_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $R_6$ | 0 | $R_8$ |
| $R_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $R_7$ | 0 | $R_5$ |
| $R_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $R_8$ | 0 | $R_6$ | 0 |

Из табл. 1 следует, что в данном случае задача на нахождение собственных значений обратного пропагатора разделяется на две, решаемые отдельно для $R_1 \ldots R_4$ и для $R_5 \ldots R_8$. Каждая из этих задач имеет по два собственных значения.

**3. Спектральное представление пропагатора.** Рассмотрим задачу на собственные значения для некоторого линейного эрмитова оператора

$$\hat{A}|\Psi_i\rangle = \lambda_i|\Psi_i\rangle. \quad (10)$$

Решив эту задачу, можно представить оператор в виде спектрального разложения [9]:

$$\hat{A} = \sum \lambda_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = \sum \lambda_i \Pi_i, \quad (11)$$

которое содержит собственные значения и собственные проекторы $\Pi_i = |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$. Ортонормированность системы векторов приводит к свойству ортогональности проекторов

$$\Pi_i\Pi_k = \delta_{ik}\Pi_k. \quad (12)$$

Если оператор не является эрмитовым, то для построения спектрального разложения нужно решать две задачи на собственные значения: левую и правую.

Мы хотим построить спектральное представление для обратного пропагатора самого общего вида (1), (9), для этого нужно решить задачу на собственные значения

$$S\Pi_i = \lambda_i\Pi_i. \quad (13)$$

Заметим, что мы решаем задачу в матричном виде, т.е. сразу ищем собственные проекторы $\Pi_i$. Это можно делать, используя $\gamma$-матричный базис, избежав громоздких промежуточных формул. Что касается неэрмитовости пропагатора: достаточно решить левую задачу на собственные значения и потребовать ортогональности проекторов – см. [10].

Решив данную задачу, мы получим спектральное представление для обратного пропагатора в движущейся среде:

$$S(p,u) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \Pi_i. \quad (14)$$

Если собственные проекторы образуют полную ортогональную систему, то пропагатор получается обращением выражения (14):

$$G(p,u) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\lambda_i}\Pi_i. \quad (15)$$

Использование базиса (8) существенно упрощает решение задачи на собственные значения. Собственный проектор тоже можно искать в виде разложения по этому базису, причем ортогональность спиновых проекторов (см. табл. 1) приводит к более простым задачам с участием первой и второй четверок в (9). Выше было отмечено, что "под наблюдением" спинового проектора все гамма-матрицы в (1) превращаются в набор $I, \hat{p}, \gamma^5, \hat{p}\gamma^5$. Поэтому, например, задача на собственные значения для первой четверки

$$\left(\sum_{k=1}^{4} R_k S_k\right)\left(\sum_{i=1}^{4} R_i A_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{4} R_i A_i\right) \quad (16)$$

сводится к еще более простой: задаче на собственные значения для одетого вакуумного пропагатора при нарушении четности [10]. Наличие среды проявляется в появлении спинового проектора и в скалярных коэффициентах разложения. Кроме того, происходит удвоение числа собственных значений, для которых возникают два квадратных уравнения.

Повторив алгебраические действия из [10], можно выписать ответ для задачи на собственные значения в самом общем случае. Собственные проекторы и собственные значения обратного пропагатора выглядят так:

$$\Pi_1 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big((S_2-\lambda_1)R_1+(S_1-\lambda_1)R_2-S_3R_3-S_4R_4\Big),$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\Big((S_2-\lambda_2)R_1+(S_1-\lambda_2)R_2-S_3R_3-S_4R_4\Big),$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3}\Big((S_6-\lambda_3)R_5+(S_5-\lambda_3)R_6-S_7R_7-S_8R_8\Big),$$

$$\Pi_4 = \frac{1}{\lambda_3-\lambda_4}\Big((S_6-\lambda_4)R_5+(S_5-\lambda_4)R_6-S_7R_7-S_8R_8\Big), \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{S_1+S_2}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{S_1-S_2}{2}\Big)^2 + S_3S_4}, \\ \lambda_{3,4} &= \frac{S_5+S_6}{2} \pm \sqrt{\Big(\frac{S_5-S_6}{2}\Big)^2 + S_7S_8}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $S_i$ – коэффициенты разложения обратного пропагатора в базисе (9).

Получившиеся проекторы имеют следующие свойства: (i) $S\Pi_k = \lambda_k\Pi_k$,

(ii) $\Pi_i\Pi_j = \delta_{ij}\Pi_j$,

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{4}\Pi_i = 1$.

*Пропагатор в рамках Стандартной Модели.* Обратный пропагатор фермиона в Стандартной Модели в среде выглядит как

$$S = \hat{p} - m + \alpha\hat{u}(1-\gamma^5), \tag{19}$$

где $u$ – 4-вектор скорости среды, $p$ – 4-вектор импульса частицы, $\alpha$ – параметр, зависящий от плотностей электронов, протонов и нейтронов в среде.

Выпишем коэффициенты разложения в двух базисах: $\gamma$-матричном (1) и $R$-базисе (9):

$$\begin{aligned}
s_1 &= -m, & A_1 &= -m + W(1+K^+), \\
s_2 &= 1, & A_2 &= -m - W(1+K^+), \\
s_3 &= \alpha, & A_3 &= -WK^+, \\
s_4 &= 0, & A_4 &= WK^+, \\
s_5 &= 0, & A_5 &= -m - W(1+K^-), \\
s_6 &= 0, & A_6 &= -m + W(1+K^-), \\
s_7 &= 0, & A_7 &= WK^-, \\
s_8 &= -\alpha, & A_8 &= -WK^-.
\end{aligned} \tag{20}$$

В (20) введены обозначения: $K^\pm = \dfrac{\alpha}{W^2}\Big((pu) \pm \sqrt{(up)^2 - W^2}\Big)$, $W = \sqrt{p^2}$.

Решения задачи на собственные значения (13) в этом случае имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -m \pm W\sqrt{1+2K^+}, \tag{21}$$

$$\lambda_{3,4} = -m \pm W\sqrt{1+2K^-}, \tag{22}$$

$$\Pi_{1,2} = \frac{1}{2}\Sigma^-\left[1 \pm \hat{n}\ \frac{1+K^+-\gamma^5K^+}{\sqrt{1+2K^+}}\right], \tag{23}$$

$$\Pi_{3,4} = \frac{1}{2}\Sigma^+\left[1 \pm \hat{n}\ \frac{1+K^--\gamma^5K^-}{\sqrt{1+2K^-}}\right]. \tag{24}$$

*Случай покоящейся среды.* Рассмотрим частный случай пропагатора (19), а именно ситуацию, когда среда покоится ($\mathbf{u}=0, u_0=1$). В этом случае вектор поляризации $z^\mu$ (3) будет таким:

$$z^\mu = \frac{1}{W}\left(|\mathbf{p}|,\ \frac{\mathbf{p}p^0}{|\mathbf{p}|}\right), \tag{25}$$

что соответствует спиральному состоянию фермиона, но вне массовой поверхности, поскольку $W \neq m$. Спиновые проекторы (4) становятся проекторами на направление импульса

$$\Sigma^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \boldsymbol{\Sigma}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\gamma^5. \tag{26}$$

После этого можно пользоваться приведенными выше формулами для собственных значений и собственных проекторов, в которых факторы $K^\pm$ упрощаются следующим образом

$$K^\pm = \frac{\alpha}{W^2}\Big(p^0 \pm |\mathbf{p}|\Big). \tag{27}$$

Тем самым, в случае покоящейся среды воспроизводится хорошо известный факт [11, 12], что определенным законом дисперсии в среде обладают нейтрино с определенной спиральностью.

**4. Заключение.** Мы построили спектральное представление пропагатора (15), (17), (18) нейтрино в движущейся среде. В этом виде, основанном на задаче на собственные значения, пропагатор представлен в виде суммы полюсов со своим $\gamma$-матричным проектором и каждое слагаемое связано с определенным законом дисперсии в среде. Точнее, связь энергии и импульса возникает в результате обращения в нуль одного из собственных значений $\lambda_i = 0$ в (15). Решения задачи на собственные значения получены для пропагатора самого общего вида (1). Особую роль в решении играют найденные нами обобщенные спиновые проекторы (4) на фиксированную ось (3), которые существенно упрощают алгебраические вычисления.

В случае движущейся среды определенным законом дисперсии обладают состояния с определенной проекцией спина на ось (3). В частном случае покоящейся среды, операторы $\Sigma^{\pm}$ являются проекторами на состояния с определенной спиральностью, что соответствует ранее известным результатам [11, 12]. Заметим, что для движущейся среды нулевой коммутатор $[S, \Sigma^{\pm}] = 0$ не приводит к сохранению проекции спина на эту ось, так как проекторы $\Sigma^{\pm}$ не коммутируют с гамильтонианом.

Мы рассмотрели случай движущейся неполяризованной среды. Учет поляризации приводит к простой замене $u^{\mu}$ на комбинацию векторов скорости и поляризации среды [13], техника вычисления не изменяется.

Построенное спектральное представление пропагатора представляется наиболее простой и удобной алгебраической конструкцией для описания эффектов смешивания и осцилляций нейтрино в среде. Заметим, что наличие спиновых проекторов существенно упрощает эту задачу, алгебраическая конструкция будет повторять задачу смешивания в вакууме [8]. Возможные приложения развитого подхода связаны с астрофизическими задачами, в частности, когда нейтрино распространяется через оболочку сверхновой (см., например, обзор [14]). Исследование спиновых свойств с учетом обнаруженной внемассовой оси полной поляризации заслуживает отдельного рассмотрения.

Мы благодарны В.А. Наумову за полезное обсуждение.


1. L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17**, 2369 (1978).
2. S. Mikheev and A. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913 (1985).
3. S. M. Bilenky, C. Giunti, and W. Grimus, Prog. Part. Nucl. Phys. **43**, 86 (1999).
4. А. В. Дербин, УФН **184**, 555 (2014).
5. M. Dvornikov, in *Neutrinos: Properties, Sources and Detection*, Nova Science Publishers, N.Y. (2011).
6. E. Kh. Akhmedov and J. Kopp, JHEP **008**, 1004 (2010).
7. А. Е. Калошин, И. В. Потапова, Известия ВУЗов. Физика **53**, 89 (2010).
8. A. E. Kaloshin and V. P. Lomov, Int. J. Mod. Phys. A **31**, 1650031 (2016).
9. А. Мессиа, *Квантовая механика*, т. 1, Наука, М. (1978).
10. A. E. Kaloshin and V. P. Lomov, Eur. Phys. J. C **72**, 2094 (2012).
11. A. Studenikin and A. Ternov, Phys. Lett. B **608**, 107 (2005).
12. A. Grigoriev, A. Studenikin, and A. Ternov, Phys. Atom. Nucl. **72**, 718 (2009).
13. A. E. Lobanov and A. I. Studenikin, Phys. Lett. B **515** 94 (2001).
14. V. N. Zirakashvili and V. S. Ptuskin, Astropart. Phys. **78**, 28 (2016).