

Параметрическая неустойчивость колебаний вихревого кольца в z -периодическом бозе-конденсате и возврат к исходному состоянию

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 31 мая 2017 г.

После переработки 29 июня 2017 г.

Рассмотрена в приближении локальной индукции динамика деформаций квантового вихревого кольца в бозе-конденсате с периодической равновесной плотностью $\rho(z) = 1 - \epsilon \cos z$. Выявлены параметрические неустойчивости нормальных мод с азимутальными числами $\pm m$ при значениях интеграла энергии E вблизи величин $E_m^{(p)} = 2m\sqrt{m^2 - 1}/p$, где p – порядок резонанса. Численные эксперименты показали, что уже при $\epsilon \sim 0.03$ возможен резкий рост амплитуды неустойчивых мод с $m = 2$, $p = 1$ до значений порядка единицы, за которым после нескольких больших колебаний следует быстрый возврат к слабо возмущенному состоянию. Подобное поведение соответствует интегрируемому гамильтониану вида $H \propto \sigma(E_2^{(1)} - E)(|b_+|^2 + |b_-|^2) - \epsilon(b_+b_- + b_+^*b_-^*) + u(|b_+|^4 + |b_-|^4) + w|b_+|^2|b_-|^2$ для двух комплексных огибающих $b_{\pm}(t)$. Проведено сравнение с параметрическими неустойчивостями вихревого кольца в конденсате с плотностью $\rho(z, r) = 1 - r^2 - \alpha z^2$, которые имеют место при $\alpha \approx 8/5$ и при $\alpha \approx 16/7$.

DOI: 10.7868/S0370274X17160044

Введение. Динамика квантовых вихрей в захваченном ловушкой атомном бозе-конденсате с пространственно неоднородным равновесным профилем плотности $\rho(\mathbf{r})$ существенно отличается от их динамики в однородной системе, причем отличия эти не только количественные, но и качественные (см. обзор [1] и цитируемую там литературу). Развитие экспериментальных методик в данной области позволяет реализовывать новые и весьма разнообразные зависимости $\rho(\mathbf{r})$. Соответственно, вихри в неоднородных системах продолжают интересовать как экспериментаторов, так и теоретиков [2–16]. В общем случае эта проблема весьма сложна, поскольку вихри взаимодействуют с потенциальными возмущениями и с надконденсатными атомами. Однако, если бозе-конденсат при нуле температуры находится в режиме Томаса–Ферми (ширина кора вихря ξ много меньше характерного масштаба неоднородности и размера вихря R_*), то потенциальными степенями свободы можно пренебречь и использовать “безэластичное” гидродинамическое приближение [2–4, 7, 11, 17, 18]. Если, к тому же, конфигурация вихревой нити далека от самопересечений, то применима простая математическая модель, которая прибли-

женно описывает медленное движение квантовой нити, – уравнение локальной индукции [2–4]:

$$\mathbf{R}_t \Big|_{\text{norm}} = \frac{\Gamma\Lambda}{4\pi} (\varkappa \mathbf{b} + [\nabla \ln \rho(\mathbf{R}) \times \boldsymbol{\tau}]), \quad (1)$$

где $\mathbf{R}(\beta, t)$ – геометрическая форма нити, зависящая от произвольного продольного параметра β и от времени t , параметр $\Gamma = 2\pi\hbar/m_{\text{atom}}$ – квант циркуляции скорости, $\Lambda = \ln(R_*/\xi) \approx \text{const}$ – большой логарифм, \varkappa – локальная кривизна нити, \mathbf{b} – единичный вектор бинормали, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор. Далее для простоты формул мы будем использовать безразмерные единицы, так что $\Gamma\Lambda/4\pi = 1$, $R_* \sim 1$. Как известно, в случае $\rho = \text{const}$ уравнение локальной индукции преобразованием Хасимото [19] приводится к одномерному фокусирующему нелинейному уравнению Шредингера и поэтому динамика вихревой нити на однородном фоне является интегрируемой. Для неоднородных профилей плотности исследование этой модели находится пока еще в самом начале [13, 14, 20, 21]. Об этом говорит хотя бы тот факт, что даже простейший одномерно периодический профиль плотности

$$\rho(z) = 1 - \epsilon \cos z \quad (2)$$

до сих пор не применялся в рамках уравнения (1), а между тем он легко реализуется в оптических ловушках.

Цель данной работы – заполнить указанный пробел в теории, рассмотрев движение деформированно-

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

го квантового вихревого кольца через бозе-конденсат с неоднородной плотностью (2). Путем теоретического анализа и численного моделирования колебаний формы кольца мы обнаружим здесь такие интересные явления, как параметрический резонанс и квазивозврат к слабозбужденному начальному состоянию. Насколько известно автору, ранее идея о возможности этих эффектов в рассматриваемой системе никем не выдвигалась. Кроме того, будет проведено сравнение с другими типами параметрической неустойчивости вихревого кольца, которые, как выяснилось в ходе недавних исследований, имеют место в гармонически захваченном конденсате с параболическим профилем плотности $\rho_h(z, r) = 1 - r^2 - \alpha z^2$ вблизи двух определенных значений параметра анизотропии $\alpha^{(1)} = 8/5$ и $\alpha^{(2)} = 16/7$.

Вариационная структура уравнений. Для наших целей удобно выбрать в качестве продольного параметра угол φ в цилиндрической координатной системе, а две другие координаты рассматривать как неизвестные функции $R(\varphi, t)$ и $Z(\varphi, t)$ (очевидно, 2π -периодические по φ), которые определяют геометрическую форму вихревого кольца в произвольный момент времени. Ограничимся осесимметричными профилями плотности $\rho(z, r)$. Уравнения движения для $R(\varphi, t)$ и $Z(\varphi, t)$, эквивалентные векторному уравнению (1), можно тогда записать в неканонической гамильтоновой форме:

$$\rho(Z, R)R\dot{Z} = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{\rho(Z, R)R'}{\sqrt{R^2 + R'^2 + Z'^2}} + \frac{\partial\rho(Z, R)}{\partial R} \sqrt{R^2 + R'^2 + Z'^2} + \frac{\rho(Z, R)R}{\sqrt{R^2 + R'^2 + Z'^2}}, \quad (3)$$

$$-\rho(Z, R)R\dot{R} = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{\rho(Z, R)Z'}{\sqrt{R^2 + R'^2 + Z'^2}} + \frac{\partial\rho(Z, R)}{\partial Z} \sqrt{R^2 + R'^2 + Z'^2}, \quad (4)$$

где штрихи обозначают частные производные по φ , а точки – частные производные по t . Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \int F(Z, R)\dot{Z}d\varphi - \int \rho(Z, R)\sqrt{R^2 + R'^2 + Z'^2}d\varphi, \quad (5)$$

причем для $\rho(z, r) = f(z, r^2/2)$ функция $F(Z, R)$ определяется формулой

$$F(Z, R) = \int_{U(z)}^{R^2/2} f(Z, u)du, \quad (6)$$

а $U(z)$ может быть выбрана произвольно.

В частности, для не зависящих от r профилей плотности $\rho(z)$ получаем $F = \rho(Z)R^2/2$, а для кон-

денсата в гармонической ловушке удобно взять $F = -(1 - R^2 - \alpha Z^2)^2/4 = -\rho_h^2/4$.

Параметрическая неустойчивость. Обратимся сначала к случаю $\rho = \rho(z)$, когда невозмущенному движению идеально круглого кольца вдоль оси z соответствуют решения вида $R = R_0(t)$ и $Z = Z_0(t)$, удовлетворяющие простой системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Z}_0 = 1/R_0, \quad \dot{R}_0 = -\rho'(Z_0)/\rho(Z_0). \quad (7)$$

Очевидно, что у этой системы имеется интеграл движения $R_0\rho(Z_0) = E = \text{const}$.

Рассмотрим теперь динамику малых азимутальных отклонений от идеальной формы, положив

$$R = R_0(t) + \sum_{m \geq 1} [R_m e^{im\varphi} + R_m^* e^{-im\varphi}], \quad (8)$$

$$Z = Z_0(t) + \sum_{m \geq 1} [Z_m e^{im\varphi} + Z_m^* e^{-im\varphi}], \quad (9)$$

где $R_m(t)$ и $Z_m(t)$ – малые комплексные коэффициенты Фурье. Линеаризованная система для них следует из уравнений (3), (4). С учетом соотношения $d/dt = (1/R_0)d/dZ_0$ и наличия интеграла $R_0\rho(Z_0) = E$ легко получаем

$$\frac{d}{dZ_0} Z_m = \frac{\rho(Z_0)}{E} [m^2 - 1] R_m, \quad (10)$$

$$-\frac{d}{dZ_0} R_m = \frac{\rho(Z_0)}{E} \left[m^2 + \frac{E^2}{\rho^2(Z_0)} \left(\frac{\rho'(Z_0)}{\rho(Z_0)} \right)' \right] Z_m. \quad (11)$$

Здесь удобно ввести вместо Z_0 новую независимую переменную согласно соотношению $\rho(Z_0)dZ_0 = d\mu$. Тогда линеаризованная система выглядит наиболее просто:

$$\frac{dZ_m}{d\mu} = \frac{1}{E} [m^2 - 1] R_m, \quad (12)$$

$$-\frac{dR_m}{d\mu} = \frac{1}{E} \left[m^2 + \frac{E^2}{f(\mu)} \frac{d^2 f(\mu)}{d\mu^2} \right] Z_m, \quad (13)$$

где введена функция $f(\mu) = \rho(Z_0(\mu))$. В нашем случае эта зависимость 2π -периодическая, так что после приведения к одному дифференциальному уравнению второго порядка мы получаем уравнение типа Хилла,

$$\frac{d^2 Z_m}{d\mu^2} + \left[\frac{m^2(m^2 - 1)}{E^2} + (m^2 - 1) \frac{f''(\mu)}{f(\mu)} \right] Z_m = 0, \quad (14)$$

которое широко известно как основная математическая модель, описывающая параметрический резонанс в линейных системах. Отсюда немедленно следуют условия параметрического резонанса порядка

$p = 1, 2, \dots$ в виде $E \approx E_m^{(p)} = 2m\sqrt{m^2 - 1}/p$. В данной работе мы сосредоточимся в основном на случае $m = 2, p = 1$. Заметим, что при небольших значениях глубины модуляции плотности $\epsilon \ll 1$ мы имеем приближенно $f''(\mu)/f(\mu) \approx \epsilon \cos \mu$, т.е. уравнение Хилла принимает вид уравнения Матье. При этом глубина модуляции неоднородного коэффициента в уравнении (14) оказывается равной 12ϵ . Пространственный инкремент неустойчивости при точном резонансе, как нетрудно показать, дается формулой $\gamma^{(z)} \approx (3/2)\epsilon$, что соответствует росту амплитуды эллиптической моды кольца за один период модуляции плотности в $\exp(3\pi\epsilon)$ раз. Даже при относительно малых $\epsilon \sim 0.03$ имеем, таким образом, весьма резкий рост возмущений.

Численное моделирование. Чтобы исследовать нелинейную стадию развития параметрической неустойчивости, решения эволюционной системы (3)–(4) при $\rho = 1 - \epsilon \cos z$ с различными начальными условиями находили численно псевдоспектральным методом с использованием процедуры Рунге–Кутты 4-го порядка для продвижения по времени. Поскольку из линейного анализа возмущений при малых ϵ следует, что вблизи параметрического резонанса зависимости $R_2(Z_0)$ и $Z_2(Z_0)$ имеют осциллирующий характер с периодом около 4π , а их линейные комбинации $[R_2 - i(2/\sqrt{3})Z_2]$ и $[R_2^* - i(2/\sqrt{3})Z_2^*]$ в основном пропорциональны $\exp(-iZ_0/2)$ (если отвлечься от старших гармоник), то для понимания динамики системы удобно следить за поведением “медленных” комплекснозначных функций

$$A_c = +2[\text{Re}(R_2) - i(2/\sqrt{3})\text{Re}(Z_2)] \exp(iZ_0/2), \quad (15)$$

$$A_s = -2[\text{Im}(R_2) - i(2/\sqrt{3})\text{Im}(Z_2)] \exp(iZ_0/2). \quad (16)$$

Отметим, что A_c и A_s являются комплексными огибающими амплитуд стоячих мод $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$ соответственно, тогда как $A_{\pm} = (A_c \mp iA_s)/2$ соответствуют разложению эллиптических возмущений вихревого кольца по бегущим модам $\exp(\pm 2i\varphi)$.

Два типичных численных примера динамики возмущений представлены на рис. 1. Первое, что бросается там в глаза – это периодические синхронные возвраты системы к слабо возбужденному состоянию, чередующиеся с сильно деформированными конфигурациями кольца, причем последние отличаются между собой угловой ориентацией в плоскости (x, y) . Поэтому, на самом деле периодичны не каждая огибающая по отдельности, а их комбинация $\sqrt{|A_c|^2 + |A_s|^2}$, не зависящая от отсчета угла. Только при увеличении параметра ϵ до значений $\epsilon \sim 0.1$ регулярное поведение портится (на рисунках не показано).

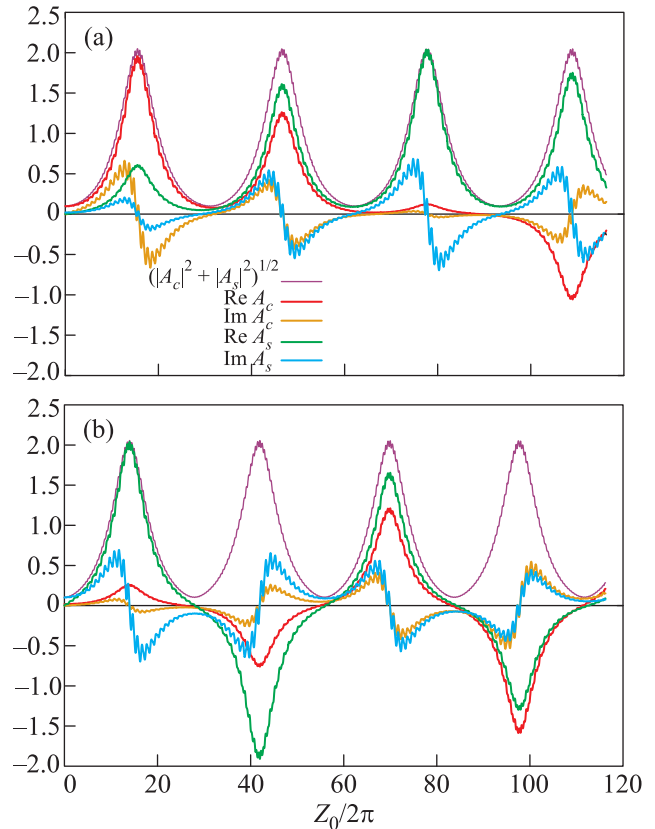


Рис. 1. (Цветной онлайн) Два примера развития параметрической неустойчивости вихревого кольца и его возврата к слабовозбужденному состоянию при $\epsilon = 0.03$. Остаточные осцилляции на кривых вызваны присутствием старших гармоник, что типично для параметрически неустойчивых колебаний. Начальные условия в случае (a): $R(0) = 4\sqrt{3} + 0.10 \cos(2\varphi)$, $Z(0) = -0.02(\sqrt{3}/2) \sin(2\varphi)$, что соответствует $A_c(0) = 0.10$, $A_s(0) = 0.02i$; в случае (b): $R(0) = 4\sqrt{3} + 0.02 \cos(2\varphi)$, $Z(0) = -0.10(\sqrt{3}/2) \sin(2\varphi)$, что соответствует $A_c(0) = 0.02$, $A_s(0) = 0.10i$

Такая возвратная динамика типична для автономных интегрируемых систем с небольшим числом степеней свободы. Поэтому имеет смысл вывести упрощенную модель, позволяющую на полуклассическом уровне воспроизвести наблюдаемые в численном эксперименте зависимости.

Объяснение явления возврата. Чтобы теоретически объяснить возвратную динамику возмущений, введем новые канонически сопряженные переменные

$$S = \frac{R^2}{2} \rho^2(Z) = S_0 + \sum_{m \geq 1} [S_m e^{im\varphi} + S_m^* e^{-im\varphi}], \quad (17)$$

$$\chi = \int_0^Z \frac{dz}{\rho(z)} = \chi_0 + \sum_{m \geq 1} [\chi_m e^{im\varphi} + \chi_m^* e^{-im\varphi}], \quad (18)$$

и разложим по малым возмущениям соответствующий гамильтониан кольца

$$H = \int \sqrt{2S + g^4(\chi)\chi'^2 + g^2(\chi)\left(\frac{\sqrt{2S}}{g(\chi)}\right)^2} d\varphi, \quad (19)$$

причем $g(\chi(z)) = \rho(z)$ [при малых ϵ имеем $g(\chi) = 1 - \epsilon \cos(\chi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$]. При этом получим $H/(2\pi) = H^{\{0\}} + \sum_{m \geq 1} H_m^{\{2\}} + H^{\{3\}} + H^{\{4\}} + \dots$, где $H^{\{0\}} = \sqrt{2S_0}$,

$$H_m^{\{2\}} = -\frac{|S_m|^2}{\sqrt{(2S_0)^3}} + \frac{m^2}{\sqrt{2S_0}} \left[g_0^4 |\chi_m|^2 + \frac{|S_m|^2}{2S_0} - \frac{g_0'}{g_0} (S_m \chi_m^* + S_m^* \chi_m) + \frac{2S_0 g_0'^2}{g_0^2} |\chi_m|^2 \right], \quad (20)$$

а $g_0 = g(\chi_0)$.

Выделим в $H_m^{\{2\}}$ члены нулевого порядка по ϵ и стандартным образом построим по ним нормальные комплексные переменные

$$a_m = \frac{\sqrt{m^2 - 1}(2S_0)^{-3/4} S_m - im(2S_0)^{-1/4} \chi_m}{\sqrt{2\omega_m}}, \quad (21)$$

$$a_{-m} = \frac{\sqrt{m^2 - 1}(2S_0)^{-3/4} S_m^* - im(2S_0)^{-1/4} \chi_m^*}{\sqrt{2\omega_m}}, \quad (22)$$

где частота колебаний в однородной системе

$$\omega_m = \frac{m\sqrt{m^2 - 1}}{2S_0}. \quad (23)$$

Переменная χ_0 при этом слегка перенормируется, но мы оставим прежнее обозначение.

Важно, что при $\epsilon = 0$ система является интегрируемой. Поэтому существуют такие перенормированные нормальные переменные $b_m = a_m + \mathcal{O}\{a^2\}$, что трехволновое взаимодействие исключается, а члены четвертого порядка имеют вид $\tilde{H}^{\{4\}} = (1/2) \sum_{k,n} W_{kn} |b_k|^2 |b_n|^2$.

Рассмотрим возбуждения мод с резонансным m при $p = 1$ и введем медленные огибающие для соответствующих нормальных переменных:

$$b_m = b_+ \exp(-i\chi_0/2), \quad b_{-m} = b_- \exp(-i\chi_0/2). \quad (24)$$

Усредним затем $\tilde{H}_m^{\{2\}}$ по осцилляциям плотности с точностью до первого порядка по ϵ . Нетривиальное усреднение требуется при этом для членов, пропорциональных $-4\epsilon \cos(\chi_0) |\chi_m|^2$, а также $-\epsilon \sin(\chi_0) (S_m \chi_m^* + S_m^* \chi_m)$. В результате замены (24) и последующего усреднения лагранжиан принимает следующий вид:

$$L \approx S_0 \dot{\chi}_0 + ib_+ b_+^* + ib_- b_-^* + \frac{\dot{\chi}_0}{2} (|b_+|^2 + |b_-|^2) - \sqrt{2S_0} - \frac{m\sqrt{m^2 - 1}}{2S_0} (|b_+|^2 + |b_-|^2) + \epsilon \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{4m} (b_+ b_- + b_+^* b_-^*) - T(|b_+|^4 + |b_-|^4) - W|b_+|^2 |b_-|^2. \quad (25)$$

Важно, что здесь мы имеем интегрируемую гамильтонову систему с тремя степенями свободы. Очевидными интегралами движения, помимо самого гамильтониана, являются

$$S_0 + \frac{1}{2} (|b_+|^2 + |b_-|^2) = I = \text{const}, \quad (26)$$

$$|b_+|^2 - |b_-|^2 = D = \text{const}. \quad (27)$$

Интеграл D соответствует сохранению углового момента относительно оси z . Исключая S_0 , получаем эффективный гамильтониан возмущений:

$$\tilde{H} = \frac{m\sqrt{m^2 - 1} (|b_+|^2 + |b_-|^2)}{(2I - |b_+|^2 - |b_-|^2)} + \sqrt{2I - |b_+|^2 - |b_-|^2} - \epsilon \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{4m} (b_+ b_- + b_+^* b_-^*) + T(|b_+|^4 + |b_-|^4) + W|b_+|^2 |b_-|^2, \quad (28)$$

который с учетом (27) сводится к

$$\tilde{H}(N, \Phi) = \frac{m\sqrt{m^2 - 1} N}{(2I - N)} + \sqrt{2I - N} - \epsilon \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{4m} \sqrt{N^2 - D^2} \cos(2\Phi) + (T/2)(N^2 + D^2) + (W/4)(N^2 - D^2) \quad (29)$$

в терминах канонически сопряженных переменных $N = |b_+|^2 + |b_-|^2$ и $\Phi = [\arg(b_+) + \arg(b_-)]/2$. Явление возврата при этом соответствует квазизамкнутым фазовым траекториям в комплексной плоскости переменной $C = \sqrt{(|A_+|^2 + |A_-|^2)/2} (A_+ A_-) / |A_+ A_-|$, как показано на рис. 2. Разумеется, реальная фазовая траектория только в среднем соответствует упрощенной модели.

Необходимо отметить, что применимость гамильтониана (28) ограничена близкими к резонансу значениями параметра I . Положив $2I = 4m^2(m^2 - 1) + \delta$ и ограничившись разложением до четвертого порядка по b_{\pm} , получим упрощенный модельный гамильтониан, квадратичная часть которого соответствует неустойчивости вблизи резонанса:

$$H \propto \sigma(E_2^{(1)} - E) (|b_+|^2 + |b_-|^2) - \epsilon (b_+ b_- + b_+^* b_-^*) + u(|b_+|^4 + |b_-|^4) + w|b_+|^2 |b_-|^2.$$

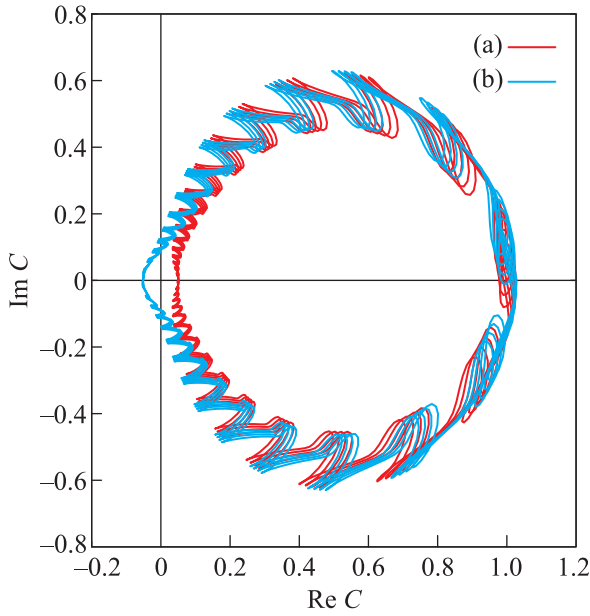


Рис. 2. (Цветной онлайн) Квазизамкнутые фазовые траектории в плоскости C , соответствующие двум численным экспериментам, показанным на рис. 1

Сравнение с вихревым кольцом в гармонической ловушке. Коль скоро речь у нас идет о параметрических неустойчивостях квантового вихревого кольца, имеет смысл для полноты картины сравнить вышеописанный механизм неустойчивости с ситуацией, когда конденсат ограничен в пространстве, а финитное движение идеально круглого кольца описывается двумя периодическими функциями $R_0(t)$ и $Z_0(t)$. Конкретно рассмотрим профиль плотности $\rho_h(z, r) = 1 - r^2 - \alpha z^2$, характерный для гармонически захваченных бозе-конденсатов в режиме Томаса–Ферми. Фазовая траектория идеального кольца охватывает при этом точку $R_* = 1/\sqrt{3}$, $Z_* = 0$, а квадраты собственных частот малых колебаний даются выражением, впервые полученным в [14]:

$$\omega_m^2 = 9(m^2 - 3)(m^2 - \alpha). \quad (30)$$

Отсюда следует, что в диапазоне $1 < \alpha < 4$ все моды линейно устойчивы. В нашем подходе этот результат легко воспроизводится введением канонических переменных $Q = 1 - R^2 - \alpha Z^2$ и $P = QZ/2$. Гамильтониан идеального кольца $\rho(Z_0, R_0)R_0$ тогда определяется довольно элегантно выражением

$$\mathcal{H}_0 = \sqrt{Q_0^2 - 4\alpha P_0^2 - Q_0^3}, \quad (31)$$

а неподвижная точка есть $Q_* = 2/3$, $P_* = 0$.

Исследуем малые отклонения кольца от равновесия, для чего перепишем гамильтониан локальной

индукции $(2\pi)^{-1} \int \rho(Z, R) \sqrt{(R^2 + R'^2 + Z'^2)} d\varphi$ в новых переменных и разложим его по степеням малых функций $q = Q(\varphi, t) - 2/3$ и $p = P(\varphi, t)$. Получим, что

$$\mathcal{H}^{\{2\}} = \sum_m \left[\frac{\sqrt{3}}{4} (m^2 - 3) |q_m|^2 + 3\sqrt{3} (m^2 - \alpha) |p_m|^2 \right], \quad (32)$$

$$\mathcal{H}^{\{3\}} = -\frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{3\sqrt{3}}{4} q^3 + \frac{9\sqrt{3}}{2} (\alpha - 1) p^2 q'' \right] d\varphi. \quad (33)$$

Слагаемое $\mathcal{H}^{\{2\}}$ дает формулу (30). В нормальных комплексных переменных, определяемых как

$$a_m = \frac{(\sqrt{3}|m^2 - 3|/2)^{\frac{1}{2}} q_m + i(6\sqrt{3}|m^2 - \alpha|)^{\frac{1}{2}} p_m}{\sqrt{2|\omega_m|}}, \quad (34)$$

квадратичный гамильтониан $\mathcal{H}^{\{2\}} = \sum_m \omega_m |a_m|^2$. Весьма важно при этом, что две первые частоты ω_0 и ω_1 имеют отрицательный знак, тогда как при $|m| \geq 2$ все ω_m положительны (на что авторы работы [14] не обратили внимания, поскольку не использовали гамильтонов метод). Поэтому при определенных значениях параметра анизотропии α возникают нелинейные резонансы между некоторыми модами, приводящие к параметрическим неустойчивостям. Например, при условии $\omega_0 \approx 2\omega_1$, имеющем место вблизи $\alpha^{(1)} = 8/5$, происходят нелинейные резонансные процессы, описываемые взаимодействием вида $V^{(1)}(a_0^* a_1 a_{-1} + a_0 a_1^* a_{-1}^*)$, а при $\alpha \approx \alpha^{(2)} = 16/7$, когда $\omega_0 \approx -2\omega_2$, резонансными оказываются процессы, соответствующие взаимодействию $V^{(2)}(a_0 a_2 a_{-2} + a_0^* a_2^* a_{-2}^*)$. В обеих ситуациях слабонелинейная динамика приблизительно описывается интегрируемыми гамильтонианами стандартного вида:

$$\mathcal{H}^{(1)} = (\delta^{(1)} - 2\Omega^{(1)}) |a_0|^2 - \Omega^{(1)} (|a_1|^2 + |a_{-1}|^2) + V^{(1)}(a_0^* a_1 a_{-1} + a_0 a_1^* a_{-1}^*), \quad (35)$$

$$\mathcal{H}^{(2)} = (\delta^{(2)} - 2\Omega^{(2)}) |a_0|^2 + \Omega^{(2)} (|a_2|^2 + |a_{-2}|^2) + V^{(2)}(a_0 a_2 a_{-2} + a_0^* a_2^* a_{-2}^*), \quad (36)$$

где $\delta^{(1)}$ и $\delta^{(2)}$ — малые параметры рассогласования частот, а коэффициенты $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ могут быть вычислены путем переписывания $\mathcal{H}^{\{3\}}$ в терминах a_m . В первом случае имеются дополнительные интегралы движения $|a_0|^2 + |a_1|^2 = s_+$ и $|a_0|^2 + |a_{-1}|^2 = s_-$, так что система остается в слабонелинейном режиме и происходит периодический квазивозврат кольца к почти осесимметричному исходному состоянию, как показано на рис. 3а. Во втором случае дополнительные законы сохранения имеют вид $|a_0|^2 - |a_2|^2 = d_+$

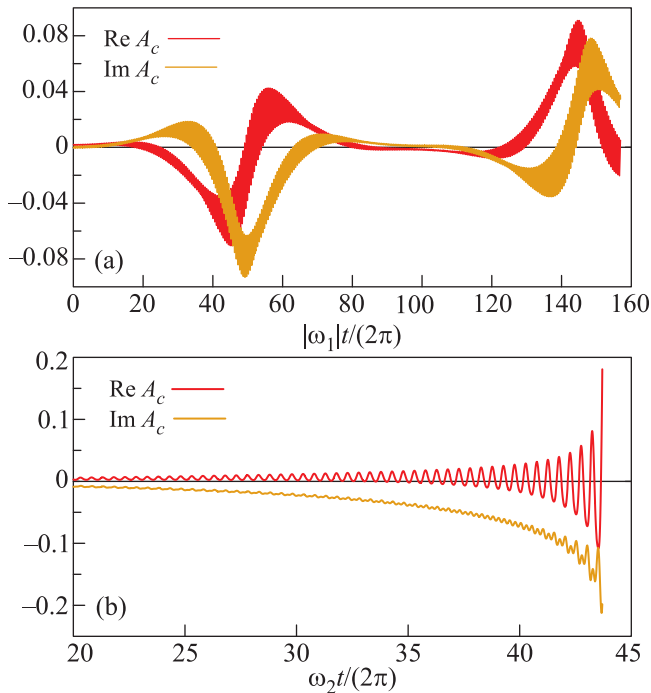


Рис. 3. (Цветной онлайн) Два типа нелинейной стадии параметрической неустойчивости вихревого кольца в конденсате с плотностью $\rho = 1 - r^2 - \alpha z^2$, наблюдаемые в численных экспериментах. Показаны соответствующим образом определенные огибающие неустойчивых мод. Осцилляции кривых обусловлены старшими гармониками. (a) $\alpha = 8/5$, $R(0) = 0.88/\sqrt{3} + 0.002 \cos(\varphi)$, $Z(0) = 0$. (b) $\alpha = 16/7$, $R(0) = 0.95/\sqrt{3} + 0.002 \cos(2\varphi)$, $Z(0) = 0$

и $|a_0|^2 - |a_{-2}|^2 = d_-$, а параметрическая неустойчивость при $d_+ > 0$, $d_- > 0$ носит взрывной характер, как следует из рис. 3б. Фактически, как показывает численное моделирование системы (3)–(4) при $\rho = 1 - r^2 - \alpha z^2$, на конечной стадии взрывной неустойчивости достигается настолько сильная деформация вихревого кольца, что некоторые его участки вплотную приближаются к поверхности Томаса–Ферми – эффективной границе конденсата, где гидродинамическое безэластичное приближение заведомо неприемлемо.

Заключение. Таким образом, в данной работе впервые предсказаны параметрические неустойчивости колебаний квантового вихревого кольца в пространственно периодическом бозе-конденсате при определенных размерах кольца, а также в конденсате, захваченном гармонической анизотропной ловушкой, – при определенных значениях параметра

анизотропии. Во всех случаях численно промоделированы нелинейные стадии неустойчивости. Обнаруженному при этом явлению квазивозврата дано теоретическое объяснение. Такого рода нетривиальное поведение вихревого кольца заслуживает дальнейших исследований в рамках более точных моделей. В частности, весьма желательно воспроизвести параметрическую неустойчивость при не слишком больших Λ непосредственно в численном решении трехмерного уравнения Гросса–Питаевского с периодическим внешним потенциалом, а также и с анизотропным гармоническим потенциалом. После этого могла бы наступить очередь реальных экспериментов.

1. A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
2. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **62**, 063617 (2000).
3. A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, R135 (2001).
4. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **64**, 036305 (2001).
5. A. Aftalion and T. Riviere, *Phys. Rev. A* **64**, 043611 (2001).
6. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, *Phys. Rev. A* **64**, 053611 (2001).
7. J. R. Anglin, *Phys. Rev. A* **65**, 063611 (2002).
8. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200403 (2002).
9. A. Aftalion and I. Danaila, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).
10. A. Aftalion and I. Danaila, *Phys. Rev. A* **69**, 033608 (2004).
11. D. E. Sheehy and L. Radzihovsky, *Phys. Rev. A* **70**, 063620 (2004).
12. I. Danaila, *Phys. Rev. A* **72**, 013605 (2005).
13. A. Fetter, *Phys. Rev. A* **69**, 043617 (2004).
14. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, *Phys. Rev. A* **74**, 041603 (2006).
15. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. X* **7**, 021031 (2017).
16. R. N. Bisset, S. Serafini, E. Iseni, M. Barbiero, T. Bienaime, G. Lamporesi, G. Ferrari, and F. Dalfovo, arXiv:1705.09102.
17. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 449 (2017).
18. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **151**, 1092 (2017).
19. H. Hasimoto, *J. Fluid Mech.* **51**, 477 (1972).
20. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 878 (2016).
21. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 875 (2016).