Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 6, с. 368 – 374 © 2017 г. 25 сентября

Бризерные химеры в системе фазовых осцилляторов

М. И. Болотов[+1)], *Л. А. Смирнов*[×*], *Г. В. Осипов*[+], *А. С. Пиковский*[×+]

[+]*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 606950 Нижний Новгород, Россия*

[*]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия*

[×]*Institute for Physics and Astronomy, University of Potsdam, D-14476 Potsdam-Golm, Germany*

Поступила в редакцию 31 июля 2017 г.

Рассмотрены химерные состояния, состоящие из синхронных и асинхронных доменов, в среде нелинейно связанных фазовых осцилляторов. Построены стационарные неоднородные решения уравнения Отта–Антонсена для комплексного параметра порядка, соответствующие фундаментальным химерам. С помощью прямого численного моделирования показано, что при определенных условиях в результате развития неустойчивости данные структуры трансформируются в периодически изменяющиеся во времени (бризерные) химерные режимы.

DOI: 10.7868/S0370274X17180096

1. Введение. Целый ряд ключевых фундаментальных явлений, свойственных нелинейным осцилляторным средам различной природы, можно рассмотреть в рамках фазового приближения [1, 2]. К таким явлениям, в частности, относится синхронизация в разнообразных ее проявлениях [2, 3]. Переход от конкретных моделей к универсальному описанию с помощью динамических уравнений для фазовых переменных позволяет выявить общие закономерности в поведении физических, химических, биологических и социальных систем [2].

На сегодняшний день одним из привлекательных и интригующих эффектов является образование в ансамблях идентичных элементов химерных состояний, которые характеризуются сосуществованием синхронных и асинхронных групп осцилляторов. Возможность формирования таких долгоживущих нетривиальных состояний впервые была обнаружена в 2002 г. Я. Курамото и Д. Баттогтоком [4]. За прошедшие 15 лет химерные режимы были найдены численно в большом наборе пространственно распределенных моделей [5]. Кроме того, наличие данных режимов подтверждено экспериментально [5–8]. В настоящее время активно ведутся теоретические и лабораторные исследования химер. Однако до сих пор остается много открытых и нерешенных вопросов. В частности, не известны необходимые и достаточные условия для возникновения химерных структур, до конца не проведена их классификация, а также достоверно не определено, когда эти структуры являются устойчивыми, а когда переходными [5].

В данной работе изучается замкнутая в кольцо среда нелинейно связанных идентичных фазовых осцилляторов. При анализе феномена химер в этой системе мы используем подход Отта–Антонсена (ОА) [9, 10], позволяющий получать замкнутые уравнения для комплексного параметра порядка. С его помощью мы прежде всего строим “стационарные” химеры и исследуем их линейную устойчивость, а затем на основе численного моделирования в рамках исходной модели показываем, что такие структуры при определенном выборе параметров могут трансформироваться в периодически изменяющиеся во времени (бризерные) долгоживущие химерные состояния или переходить в более сложные режимы с нерегулярным поведением локального параметра порядка.

2. Модель. Рассмотрим систему нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов, обладающих собственной частотой ω и непрерывно распределенных в интервале $[0, L)$, на концах которого выполнены периодические граничные условия. Такая конфигурация эквивалентна ситуации, когда элементы одномерной осцилляторной среды расположены на кольце длиной L. Данную систему будем описывать с помощью динамической переменной $\phi(x,t)$, заданной в каждой точке $x \in [0, L)$ и подчиняющейся интегро-дифференциальному уравнению [5, 11]:

$$\partial_t \phi(x,t) = \omega + \mathrm{Im}\Big[\hat{H}(x,t)\, e^{-\mathrm{i}\phi(x,t) - \mathrm{i}\alpha\left(\hat{H}(x,t)\right)}\Big], \quad (1)$$

где действующее на осцилляторы поле

$$\hat{H}(x,t) = \int_0^L G(x-\tilde{x}) \exp\big(\mathrm{i}\phi(\tilde{x},t)\big)\, d\tilde{x} \qquad (2)$$

[1)]e-mail: maksim.bolotov@itmm.unn.ru

определяется через оператор свертки. Его ядро $G(y)$ характеризует взаимодействие внутри обсуждаемой среды и удовлетворяет требованию единичной нормировки.

В качестве $G\,(y)$ выберем функцию

$$G\,(y) = \kappa\,\mathrm{ch}\left(\kappa\left(|y| - L/2\right)\right)\Big/2\,\mathrm{sh}\left(\kappa L/2\right), \qquad (3)$$

хорошо аппроксимирующую случай слабо нелокальной связи [11]. Подчеркнем, что выражение (3) при $\kappa L \to \infty$ переходит в ядро $G_{\mathrm{KB}}(y) = \frac{\kappa}{2}\exp(-\kappa|y|)$, используемое в статье [4]. Величина $\alpha\big(\hat{H}\big)$ в (1) определяет фазовый сдвиг действующей на осцилляторы силы. Чаще всего $\alpha\big(\hat{H}\big)$ считается равной постоянному значению α_0 [5]. Однако согласно работам [12–14], нелинейные эффекты сдвига фазы оказывают существенное влияние на динамику системы. Поэтому для их учета, как в [14], положим $\alpha\big(\hat{H}\big) = \alpha_0 + \alpha_1\big|\hat{H}\big|^2$.

В отличие от большинства ранее проведенных исследований нас прежде всего интересуют возможные состояния рассматриваемой одномерной осцилляторной среды в зависимости от ее длины L. Отметим также, что соотношения (1)–(3) инвариантны относительно масштабного преобразования по x, что позволяет без ограничения общности принять $\kappa = 1$.

Согласно численным расчетам в системе (1)–(3) наблюдаются достаточно сложные режимы поведения, когда наряду с группами синхронно вращающихся элементов имеется значительная часть фазовых осцилляторов, движение которых асинхронно. Такие пространственные образования называются химерами [4–8 11, 14, 15]. Для них характерно присутствие в интервале $[0, L)$ участков, где динамическая переменная $\phi\,(x,t)$ не является гладкой по x. Однако, с помощью процедуры усреднения по малой окрестности точки x можно ввести локальный параметр порядка $Z\,(x,t) = \langle e^{\mathrm{i}\phi}\rangle_{\mathrm{loc}}$, представляющий собой непрерывную комплексную функцию координаты x и времени t и удовлетворяющий неравенству $|Z\,(x,t)| \le 1$. Там, где $|Z\,(x,t)| = 1$, поведение соседних элементов среды синхронно. Если же $|Z\,(x,t)| < 1$, то фазовые осцилляторы вращаются асинхронно. В работах [9, 10] предложена редукция, позволяющая установить связь между $Z\,(x,t)$ и плотностью вероятности $\rho\,(\phi,x,t)$ распределения $\phi\,(x,t)$. Кроме того, в [9, 10] показано, что эволюция $Z\,(x,t)$ описывается уравнением ОА (см. также [11, 14, 15])

$$\partial_t Z = \mathrm{i}\omega Z + \left(e^{-\mathrm{i}\alpha(H)}H - e^{\mathrm{i}\alpha(H)}H^* Z^2\right)\Big/2, \qquad (4)$$

где через $H\,(x,t)$ обозначен аналогичный (2) интегральный оператор, примененный к $Z\,(x,t)$:

$$H\,(x,t) = \int_0^L G\,(x-\tilde{x})\,Z\,(\tilde{x},t)\,d\tilde{x}, \qquad (5)$$

а величина $\alpha\,(H)$, как и выше, определяется выражением $\alpha\,(H) = \alpha_0 + \alpha_1\,|H|^2$.

Далее, используя (3), от соотношения (5) несложно перейти к эквивалентному ему дифференциальному уравнению

$$\partial^2_{xx}H - H = -Z \qquad (6)$$

с периодическими граничными условиями $H\,(0,t) = H\,(L,t)$ и $\partial_x H\,(0,t) = \partial_x H\,(L,t)$.

3. Стационарные решения уравнений Отта–Антонсена. Проанализируем в зависимости от α_0, α_1 и L возможные стационарные (по модулю) решения задачи (4), (5) с учетом (3). Для этого представим комплексные функции $Z\,(x,t)$ и $H\,(x,t)$ в виде

$$Z\,(x,t) = z\,(x)\,e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t},\;\; H\,(x,t) = h\,(x)\,e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t}, \qquad (7)$$

где Ω играет роль параметра.

Далее для определенности обсуждается ситуация, когда $\alpha_0, \alpha_1 \in \left[0, \pi/2\right]$ и $\Omega \le 0$, что отвечает выбору работ [4, 11, 14].

Рассмотрим сначала однородные по x состояния, на существование которых длина L системы не оказывает влияния. Считая $z(x) = z_0$ и $h(x) = h_0$ постоянными, подставив (7) в соотношения (4), (5) и воспользовавшись нормировкой ядра $G(y)$, несложно убедиться в том, что для любых значений α_0 и α_1 от 0 до $\pi/2$ есть два решения: $|h_0| = |z_0| = 0$ с произвольным Ω и $|h_0| = |z_0| = 1$ при $\Omega = \Omega_s = -\sin(\alpha_0 + \alpha_1)$. Первый случай отвечает полностью асинхронному поведению элементов обсуждаемой среды. Во втором случае все фазовые осцилляторы вращаются синхронно с частотой $\omega + \Omega_s$. При $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$ имеется еще одно стационарное однородное решение, для которого $|h_0| = |z_0| = \sqrt{(\pi - 2\alpha_0)/2\alpha_1}$ и $\Omega = \Omega_{ps} = \left((2\alpha_0 - \pi)/2\alpha_1 - 1\right)/2$. Данное состояние называют частично синхронным [14], так как для него $0 < |z_0| < 1$.

Для поиска стационарных неоднородных состояний воспользуемся уравнениями (4) и (6). После подстановки (7) в соотношение (4) приходим к алгебраическому равенству, которое можно трактовать как квадратное уравнение относительно $z(x)$. Для того чтобы связь между $z(x)$ и $h(x)$ была однозначной, среди двух корней данного уравнения необходимо выбрать только один. Это несложно сделать, исходя из требования $|Z(x,t)| \le 1$. В итоге, $z(x)$ выражается через $h(x)$ следующим образом:

$$z(x) = -\mathrm{i}\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h(x)|^2}\right)\Big/h^*(x)\,e^{\mathrm{i}\alpha(h(x))}. \qquad (8)$$

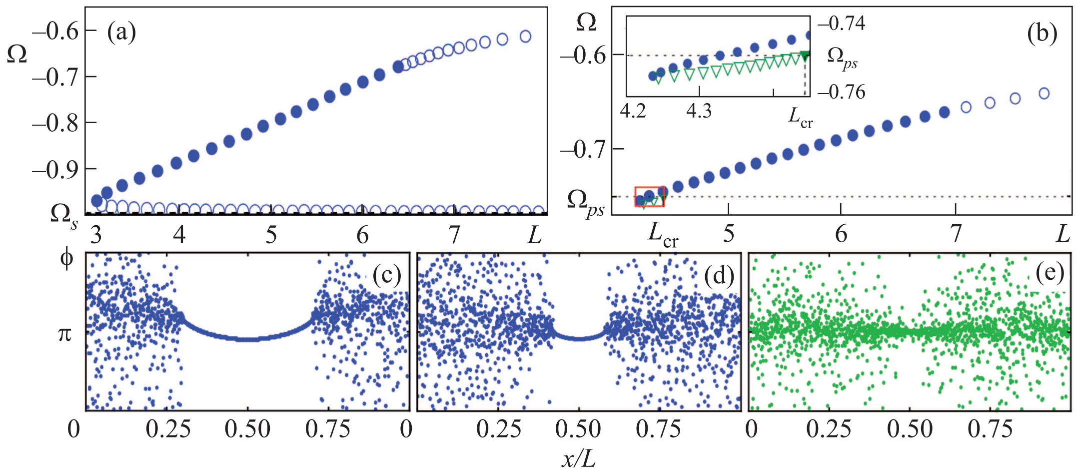

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a), (b) – Зависимости $\Omega\,(L)$ для стационарных неоднородных решений уравнения ОА при (a) $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$ и (b) $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$. Круглые маркеры отвечают однокластерным химерам, а треугольные маркеры – частично синхронным состояниям системы. Закрашенными точками отмечены устойчивые структуры, а незакрашенными – неустойчивые. (c), (d), (e) – Пространственные распределения фазовых осцилляторов, которые восстановлены по локальным параметрам порядка $z\,(x)$, рассчитанным при (c) $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$, $\Omega = -0.7$, (d) $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$, $\Omega = -0.7$ и (e) $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$, $\Omega = -0.755$. На фрагментах (c) и (d) показаны устойчивые однокластерные химеры, имеющие соответственно длины $L \approx 6.147$ и $L \approx 5.668$. Фрагмент (e) демонстрирует характерный вид неоднородного частично синхронного состояния (размер среды в данном случае равен $L \approx 4.253$)

Подставив (7) в (6) и воспользовавшись (8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для комплексного поля $h\,(x)$:

$$h'' - h = \mathrm{i}\left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h|^2}\right)\Big/ h^* e^{\mathrm{i}\alpha(h)}, \qquad (9)$$

где штрихом обозначена производная по координате x.

Напомним, что на границах интервала $[0, L)$ должны выполняться условия периодичности $h(0) = h(L)$ и $h'(0) = h'(L)$. Используя связь (8) между $z(x)$ и $h(x)$, также несложно убедиться в том, что в областях, где $|h(x)| \geq |\Omega|$, фазовые осцилляторы вращаются синхронно, так как для них $|z\,(x)| = 1$, а на участках с $|h(x)| < |\Omega|$ наблюдается асинхронное поведение элементов среды, потому что в этом случае $|z(x)| < 1$.

В работе [11] на базе (9) предложена эффективная процедура численного расчета стационарных (по модулю) неоднородных структур (в том числе, в виде химер), существующих в пространственно-временной задаче (4), (5) с ядром (3). Идея данного метода состоит в поиске при фиксированном значении Ω замкнутых траекторий в фазовом пространстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, к которой сводится выражение (9), если комплексное поле $h(x)$ представить в виде $h(x) = r(x)\exp(\mathrm{i}\theta(x))$, где $r(x)$ и $\theta(x)$ – зависящие от x действительные величины (детали см. в [11]). Отметим, что понижение размерности удается осуществить за счет того, что функция $\theta(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. По этой же причине без ограничения общности можно положить $\theta(0) = 0$. В итоге, при заданном Ω из (9) находится решение $h(x)$, которое в точности повторяет себя через период L, определяемый выбором Ω. По формуле (8) вычисляем локальный параметр порядка $z\,(x)$, а уже по $z(x)$ с учетом (7), согласно [15, 9, 10], переходим к распределению исходной динамической переменной $\phi(x, t)$. Таким образом, для исходной модели удается построить разнообразные (химерные и нехимерные) семейства "стационарных" неоднородных структур. Каждое такое семейство характеризуется индивидуальной зависимостью $\Omega(L)$, рассчитываемой в неявном виде с помощью описанной выше процедуры.

В данной работе ограничимся анализом решений, для которых $|h\,(x)|$ имеет только два экстремума (максимум и минимум), так как в случае $\alpha_1 = 0$ именно эти решения соответствуют устойчивым по отношению к линейным возмущениям фундаментальным однокластерным химерам с одной синхронной и одной асинхронной областями [11]. На рис. 1 представлены варианты функций $\Omega\,(L)$ для двух комбинаций коэффициентов α_0 и α_1 ($\alpha_1 \neq 0$), а также показаны примеры пространственных распределений

$\phi\,(x,t=0)$, которые восстановлены по локальным параметрам порядка $z\,(x)$, найденным при трех различных Ω и отвечающим разным веткам $\Omega\,(L)$, приведенным на фрагментах (a) и (b) данного рисунка. В частности, наблюдаем, что при выбранных α_0 и α_1, когда $\alpha_1 < \pi/2 - \alpha_0$, зависимость $\Omega(L)$ подходит практически вплотную к горизонтальной прямой $\Omega = \Omega_s$, определяемой синхронным состоянием. В свою очередь, при $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$ химерная ветка $\Omega(L)$ начинается вблизи значения $\Omega = \Omega_{ps}$, связанного уже с частично синхронным однородным состоянием. Особо отметим, что в ситуации $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$ удается найти еще один класс немонотонных периодических решений $h(x)$ и $z(x)$, для которых $|h(x)| < \Omega$ и $|z(x)| < 1$ при всех $x \in [0, L)$. Для таких структур есть область, где поведение фазовых осцилляторов становится более синхронным по сравнению с другими участками среды, однако полной синхронизации движения не происходит (см. рис. 1e). Рождается данный класс решений вблизи рассматриваемых нами “стационарных” химер, а затем сливается с однородным частично синхронным состоянием (см. вставку на рис. 1b).

4. Бризерные химеры. Проанализируем устойчивость во времени рассмотренных в предыдущем разделе структур. Прежде всего, линеаризуем интегро-дифференциальные уравнения (4), (5) с ядром (3) вблизи одного из стационарных решений (7), характеризующихся параметром Ω и длиной L. Для этого представим $Z\,(x,t)$ в виде

$$Z\,(x,t) = (z\,(x) + \tilde{z}\,(x,t))\, e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t}, \qquad (10)$$

где $\tilde{z}(x,t)$ описывает периодические по x малые отклонения от профиля $z(x)$.

В результате получаем выражение

$$\partial_t \tilde{z} = -\left(\mathrm{i}\Omega + e^{\mathrm{i}\alpha(h)} z h^*\right)\tilde{z} + \left(e^{-\mathrm{i}\alpha(h)}\tilde{h} - e^{\mathrm{i}\alpha(h)} z^2 \tilde{h}^*\right)\Big/2 - \\ - \mathrm{i}\alpha_1\left(e^{-\mathrm{i}\alpha(h)} h + e^{\mathrm{i}\alpha(h)} z^2 h^*\right)\left(h^*\tilde{h} + h\tilde{h}^*\right)\Big/2, \quad (11)$$

в котором связь между $\tilde{h}(x,t)$ и $\tilde{z}(x,t)$ аналогична (5).

С помощью (11) несложно определить тип устойчивости стационарных однородных решений, если рассмотреть возмущения $\tilde{z}\,(x,t) \propto \exp\,(\lambda t + \mathrm{i} k_n x)$, где $k_n = 2\pi n/L$ ($n \in \mathbb{N}$), и учесть, что действие оператора свертки сводится к умножению на $\left(1 + k_n^2\right)^{-1}$. В итоге, при $\alpha_1 < \pi/2 - \alpha_0$ полностью асинхронное состояние оказывается неустойчивым, а синхронное – устойчивым; в противоположном случае оба этих однородных решения неустойчивы. Для существующего лишь при $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$ частично синхронного состояния $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, только если k_n больше некоторого критического значения $k_{\mathrm{cr}}(\alpha_0, \alpha_1)$. Следовательно, когда $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$, имеется предельная длина $L_{\mathrm{cr}}(\alpha_0, \alpha_1) = 2\pi/k_{\mathrm{cr}}(\alpha_0, \alpha_1)$, при превышении которой отсутствуют устойчивые пространственно однородные режимы поведения системы [14].

Анализ устойчивости стационарных неоднородных решений уравнения ОА (4), (5) с ядром (3) оказывается значительно сложнее, что обусловлено прежде всего специфическими особенностями профиля $z\,(x)$ для фундаментальных химер [16, 17, 11]. Опустив детали анализа, кратко остановимся на некоторых его аспектах, важных для понимания приведенных далее результатов. Перепишем соотношение (11) в виде

$$\partial_t \tilde{\mathbf{z}}\,(x,t) = \left(\hat{\mathbf{M}}\,(x) + \hat{\mathbf{K}}\,(x)\right)\tilde{\mathbf{z}}\,(x,t)\,, \qquad (12)$$

где $\tilde{\mathbf{z}}\,(x,t)$ – двухкомпонентный вектор, составленный из реальной $\tilde{z}_{\mathrm{Re}}\,(x,t)$ и мнимой $\tilde{z}_{\mathrm{Im}}\,(x,t)$ частей комплексной функции $\tilde{z}\,(x,t)$, $\hat{\mathbf{M}}\,(x)$ – мультипликативный оператор, а $\hat{\mathbf{K}}\,(x)$ – интегральный оператор, являющийся компактным для любого кусочно-гладкого ядра $G(y)$. Непосредственно сами выражения для $\hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{K}}$ не приводятся из-за их громоздкости.

Согласно (12), для установления характера поведения малых возмущений $\tilde{z}\,(x,t)$ достаточно найти собственные значения λ не зависящего от времени композитного оператора $\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}$. В силу компактности $\hat{\mathbf{K}}$ существенный спектр λ_e суммы $\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}$ совпадает с соответствующим спектром ее первого слагаемого $\hat{\mathbf{M}}$. Используя этот факт, а также связь (8) между $z\,(x)$ и $h\,(x)$, удается показать, что λ_e может быть или чисто мнимым, или отрицательным действительным числом. В частности, для химерных состояний упорядоченный набор λ_e имеет T-образную форму [16, 17, 11]. Следовательно, устойчивость исследуемых режимов движения системы фазовых осцилляторов определяется исключительно точечным спектром λ_p оператора $\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}$. Однако достоверно рассчитать λ_p только с применением прямого метода дискретизации и замены интегральных операторов на матрицы большой размерности не удается. Хотя такого рода процедуры практически не влияют на собственные значения λ_p, они нарушают свойство компактности $\hat{\mathbf{K}}$ и ощутимо искажают вид существенного спектра λ_e, что затрудняет выделение истинных λ_p [11]. Поэтому в дополнение к стандартному подходу приходится использовать ряд модификаций, подробности которых описаны в работе [11].

Результаты проведенного нами численного анализа отображены на рис. 1 с помощью маркеров разного типа. Закрашенные точки отвечают устойчи-

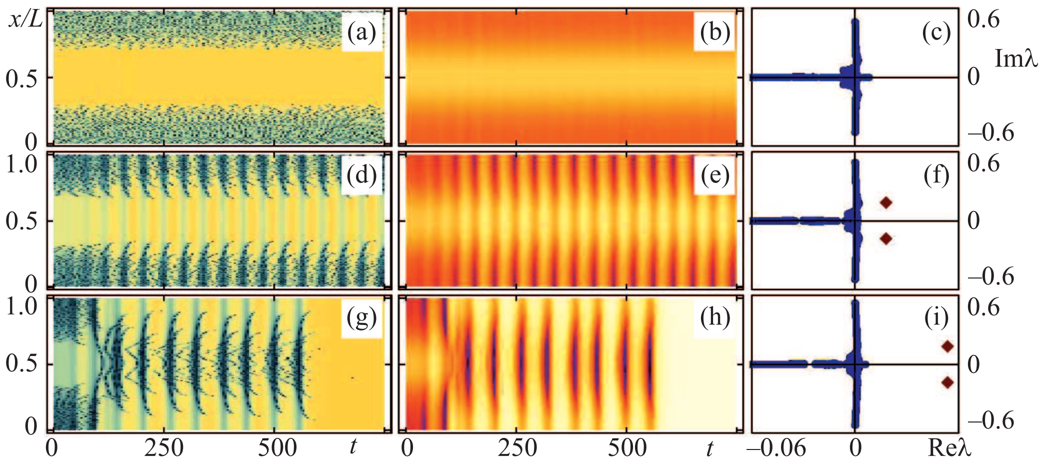

Рис. 2. (Цветной онлайн) (a), (d), (g) – Динамика пространственного распределения индивидуальных частот $\partial_t \phi\,(x,t)$ фазовых осцилляторов. Отчетливо видны области с синхронным и асинхронным движением соседних элементов среды. (b), (e), (h) – Поведение во времени абсолютной величины комплексного поля $\hat{H}\,(x,t)$. Результаты получены непосредственно с помощью прямого численного моделирования в рамках дискретного аналога исходной модели (1)–(3) при $\omega = 1$, $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$ и размерах системы: (a), (b) $L \approx 6.147$, (d), (e) $L \approx 6.668$ и (g), (h) $L \approx 7.231$. В качестве начальных условий выбиралось состояние, близкое к однокластерной химере при заданной длине L. (c), (f), (i) – Спектр λ линейных возмущений для соответствующих стационарных неоднородных решений уравнения ОА (4), (5) с ядром (3). Круглыми маркерами нанесены собственные значения, отвечающие существенной части спектра λ_e. Из-за проблем, обусловленных дискретизацией, это множество состоит не только из отрицательных действительных и чисто мнимых чисел, хотя и имеет характерную T-форму. Маркерами в виде ромбов отмечены собственные значения, принадлежащие точечному спектру λ_p, ответственному за неустойчивость; их выделение из общего набора осуществлено с помощью процедуры из работы [11]

вым стационарным неоднородным решениям, а незакрашенные – неустойчивым. Например, из рис. 1a видно, что когда размер L осцилляторной среды становится равным $L_{1a} \approx 3.127$, появляются две ветви $\Omega(L)$ однокластерных химер. Одна из них расположена почти вплотную к прямой $\Omega = \Omega_s$ и тянется вдоль нее до $L_{2a} \approx 10.418$. Все принадлежащие данной ветви решения неустойчивы. Вторая из отмеченных на рис. 1a фундаментальных химерных структур (см. рис. 1c) оказывается устойчивой в интервале от L_{1a} до $L_{3a} \approx 6.403$. Фактически при L_{1a} происходит бифуркация, аналогичная седло-узловой. Похожая картина наблюдается и в ситуации, показанной на рис. 1b. Однако в этом случае вблизи $L_{1b} \approx 4.241$ возникают неустойчивое нехимерное состояние (см. рис. 1e) и устойчивая химера (см. рис. 1d). Как отмечалось выше, первый класс решений сливается с однородным частично синхронным состоянием при длине L_{2b}, совпадающей с $L_{\mathrm{cr}} \approx 4.443$. Стационарные же химеры теряют свою устойчивость при $L_{3b} \approx \approx 6.902$.

Проведенное нами непосредственно в рамках дискретного аналога модели (1)–(3) прямое численное моделирование (на единицу длины вдоль x приходилось по 1000 точек) подтверждает, что, как только размер L осцилляторной среды превышает зависящее от коэффициентов α_0 и α_1 критическое значение L_*, найденные с помощью редукции ОА химерные распределения действительно утрачивают свою устойчивость. В частности, L_* при $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$ совпадает с L_{3a}, а при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$ равно L_{3b}. Рис. 2 и 3 демонстрируют процесс разрушения "стационарных" химер при $L > L_*(\alpha_0, \alpha_1)$ соответственно для каждого из данных наборов α_0, α_1. Согласно детальным расчетам в ограниченном диапазоне $L_*(\alpha_0, \alpha_1) < L < L_{**}(\alpha_0, \alpha_1)$ этот процесс происходит по одному и тому же сценарию для различных комбинаций α_0, α_1. В результате развития неустойчивости система фазовых осцилляторов переходит в режим, который характеризуется периодическим изменением во времени пространственной структуры (в том числе интегральной величины $\hat{H}(x,t)$) и одновременным наличием областей с синхронным и асинхронным поведением элементов среды (см. рис. 2d, e и рис. 3d, e). Обнаруженные нами осциллирующие (бризерные) химерные состояния существуют в течение длительного временного интервала (на протяжении 4000 единиц) и не распадаются при добавлении малых отклонений. Схема возникновения такого рода динамики во многом похожа на бифурка-

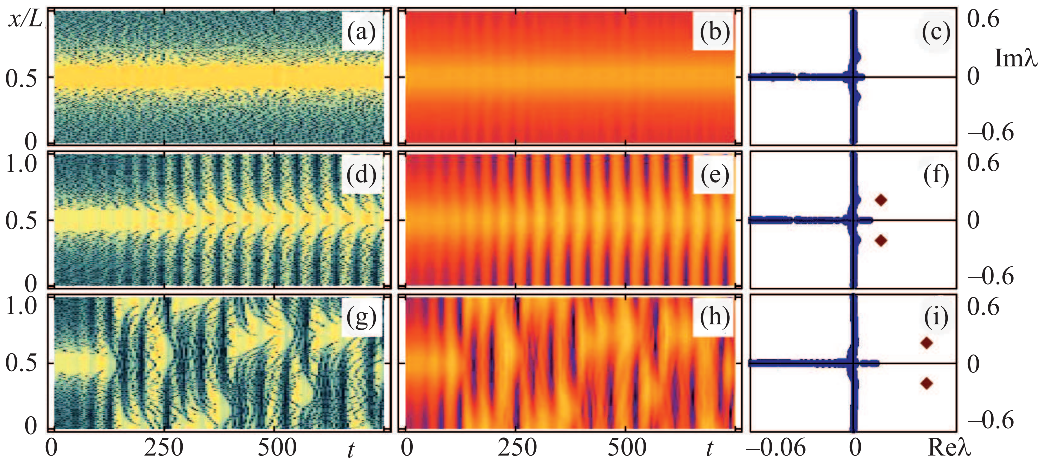

Рис. 3. (Цветной онлайн) То же, что и на рис. 2, но при $\omega=1$, $\alpha_0=0.4\pi$, $\alpha_1=0.2\pi$ и значениях длины среды: (a), (b), (c) $L\approx6.899$, (d), (e), (f) $L\approx7.2905$ и (g), (h), (i) $L\approx7.767$

цию Андронова–Хопфа (АХ) в сосредоточенных моделях, когда при изменении управляющих параметров из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл, а само оно становится неустойчивым. Однако в нашей ситуации не наблюдается типичный непрерывный переход пары собственных чисел из левой комплексной полуплоскости в правую, а скорее ответственные за неустойчивость точки изолированного спектра λ_p линейных возмущений "стационарных" химер выделяются из мнимой оси (см. рис. 2c, f, i и рис. 3c, f, i).

Увеличение размера L в пределах от $L_*(\alpha_0,\alpha_1)$ до $L_{**}(\alpha_0,\alpha_1)$ приводит к тому, что у формирующегося в итоге осциллирующего химерного режима возрастает период колебаний. Начиная с $L_{**}(\alpha_0,\alpha_1)$ ($L_{**} = L_{4a} \approx 7.012$ при $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$, $L_{**} = L_{4b} \approx 7.767$ при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$), "стационарные" химеры перестают трансформироваться в бризерные. При $\alpha_1 < \pi/2 - \alpha_0$ и $L > L_{**}(\alpha_0,\alpha_1)$ в процессе разрушения фундаментальных химер сначала наблюдаются структурные осцилляции, а затем происходит синхронизация всех элементов среды (см. рис. 2g, h), что вполне ожидаемо, потому что однородное синхронное распределение в этом случае устойчиво. Когда же $\alpha_1>\pi/2-\alpha_0$ и $L > L_{**}(\alpha_0,\alpha_1)$, все исследованные нами выше состояния оказываются неустойчивыми. Прямое численное моделирование показывает, что в данной ситуации система переходит в сложные пространственно-временные режимы, когда синхронные и асинхронные области эволюционируют во времени нерегулярным образом (см. рис. 3g, h).

5. Заключение. Таким образом, в системе непрерывно распределенных на кольце, нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов с нелинейной задержкой найдены не наблюдавшиеся ранее осциллирующие (бризерные) химеры.

Отметим, что в статьях [18, 19] уже указывалось на возможность существования модулированных химерных режимов, но не в сплошной среде, а в дискретных популяциях. В [18] изучалась конфигурация из двух взаимодействующих между собой групп глобально связанных фазовых осцилляторов. В свою очередь, в [19] обсуждалось обобщение этой конфигурации на случай трех таких популяций. Используя подход ОА, авторам работ [18, 19] удалось перейти от исходной проблемы к задаче исследования поведения во времени соответственно двух или трех параметров порядка, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями низкого порядка. Анализ показал, что отвечающие химерам состояния равновесия у данных уравнений могут претерпевать бифуркацию АХ и трансформироваться в устойчивые предельные циклы, которые были сопоставлены специфическим режимам с периодически изменяющейся степенью синхронизации осцилляторов одной из групп.

Найденные нами бризерные химеры дают положительный ответ на поставленный в [18] вопрос об их наличии в системе идентичных фазовых осцилляторов, распределенных на кольце. Подчеркнем также, что похожий эффект был обнаружен в работе [15]. Однако в ней для формирования осцилляций у химерных состояний искусственно вводилась неоднородная задержка $\alpha = \alpha\,(x)$, а также использовалось другое ядро $G\,(y)$ и предполагалось, что элементы среды имеют случайный разброс по собственным частотам. В [15] отличная от постоянного значения зависимость $\alpha = \alpha(x)$ удовлетворяла условиям периодичности на границах рассматриваемого пространственного интервала. Подобным свойством обладает и используемая нами нелинейная функция $\alpha(h)$. По-видимому, данное обстоятельство играет ключевую роль в формировании бризерных химер.

Численные расчеты проведены на суперкомпьютере "Лобачевский" ННГУ. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект # 17-12-01534 (раздел 4), а также при поддержке German-Russian Interdisciplinary Science Center, грант M-2017a-4 (раздел 3).

1. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer, Berlin (1984).
2. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
3. G. V. Osipov, J. Kurths, and Ch. Zhou, *Synchronization in Oscillatory Networks*, Springer, Berlin, Heidelberg (2007).
4. Y. Kuramoto and D. Battogtokh, Nonlinear Phenom. Complex Syst. **5**, 380 (2002).
5. M. J. Panaggio and D. M. Abrams, Nonlinearity **28**, R67 (2015).
6. M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter, Nature Phys. **8**, 662 (2012).
7. S. Nkomo, M. R. Tinsley, and K. Showalter, Phys. Rev. Lett. **110**, 244102 (2013).
8. E. A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourrière, and O. Hallatschek, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **110**, 10563 (2013).
9. E. Ott and T. M. Antonsen, Chaos **18**, 037113 (2008).
10. E. Ott and T. M. Antonsen, Chaos **19**, 023117 (2009).
11. L. A. Smirnov, G. V. Osipov, and A. Pikovsky, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 08LT01 (2017).
12. M. Rosenblum and A. Pikovsky, Phys. Rev. Lett. **98**, 064101 (2007).
13. A. Pikovsky and M. Rosenblum, Phys. Rev. Lett. **101**, 264103 (2008).
14. G. Bordyugov, A. Pikovsky, and M. Rosenblum, Phys. Rev. E **82**, 035205 (2010).
15. C. R. Laing, Physica D: Nonlinear Phenomena **238**, 1569 (2009).
16. M. Wolfrum, O. E. Omel'chenko, S. Yanchuk, and Y. L. Maistrenko, Chaos **21**, 013112 (2011).
17. O. E. Omel'chenko, Nonlinearity **26**, 2469 (2013).
18. D. M. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, and D. A. Wiley, Phys. Rev. Lett. **101**, 084103 (2008).
19. E. A. Martens, Phys. Rev. E **82**, 016216 (2010).