Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 6, с. 375 – 380 © 2017 г. 25 сентября

Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае

Б. И. Сулейманов[1)]

Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, 450008 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 1 июня 2017 г.

После переработки 10 августа 2017 г.

Исследовано влияние малой дисперсии на самофокусировку решений уравнений нелинейной геометрической оптики в пространственно одномерном случае. В главном порядке это влияние описывается с помощью универсального специального решения нелинейного уравнения Шредингера, являющегося изомонодромным. Рассмотрены аналитические и асимптотические свойства этого универсального решения.

DOI: 10.7868/S0370274X17180102

1. Решениям пространственно одномерных уравнений нелинейной геометрической оптики (НГО)

$$\rho'_T + (\rho v)'_X = 0, \quad v'_T + v v'_X - 4\rho'_X = 0, \tag{1}$$

часто используемых для описания самых разных явлений в неустойчивых средах, присуще [1–4] разбиение их на отдельные самостягивающиеся сгустки, разделенные промежутками нулевой интенсивности $\rho = 0$. В §26, §28 и §32 монографии Жданова и Трубникова [4] содержится важный вывод о том, что в ситуации "общего положения" такие сгустки *самофокусируются* и что, по-видимому, сингулярности соответствующих решений системы НГО в окрестностях фокальных точек $T = T_f$, $X = X_f$ в главном порядке задаются автомодельным решением системы (1)

$$\rho(T,X) = (T - T_f)^{-2/3}\left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36}\right], \tag{2}$$

где $s = (X - X_f)(T - T_f)^{-2/3}$, a – постоянная, $\rho(T,X) = 0$ вне стягивающегося при $T \to T_f$ промежутка $|X - X_f| \le \sqrt{18a}(T - T_f)^{2/3}$.

Данная статья посвящена описанию влияния малой дисперсии на такие процессы самофокусировки, необходимость изучения которого, в частности, отмечена в заключительном абзаце §32 монографии [4].

2. Эталонный пример уравнения, на решениях которого будет изучаться это влияние, представляет нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$-i\varepsilon G'_T = \varepsilon^2 G''_{XX} + 2|G|^2 G \qquad (\varepsilon \ll 1). \tag{3}$$

Приближение НГО к решениям данного уравнения возникает следующим образом: подстановка

$$G = \rho^{1/2}\exp\left(\frac{i\Phi}{\varepsilon}\right) \tag{4}$$

в НУШ (3) дает систему

$$\begin{gathered}\rho'_T + 2(\rho\Phi'_X)'_X = 0,\\ \Phi'_T + (\Phi'_X)^2 - 2\rho = \varepsilon^2\frac{(\sqrt{\rho})''_{XX}}{\sqrt{\rho}},\end{gathered} \tag{5}$$

бездисперсионный предел которой ($\varepsilon = 0$)

$$\rho'_T + 2(\rho\Phi'_X)'_X = 0, \quad \Phi'_T + (\Phi'_X)^2 - 2\rho = 0 \tag{6}$$

после дифференцирования по переменной X второго из (5) уравнения сводится к системе НГО (1) с $v = 2\Phi'_X$.

Из автомодельности решения этой системы с компонентой (2) следует, что вторая его компонента имеет вид $v(T,X) = (T - T_f)^{-1/3}2s/3$. Следовательно, соответствующие самофокусирующиеся сгустки, описываемые решениями системы (6), при $T \to T_f - 0$ и $X \to X_f$ на некотором стягивающемся к точке $X = X_f$ промежутке ненулевой интенсивности, имеют асимптотики (Φ_* – постоянная)

$$\begin{gathered}\Phi(T,X) = \Phi_* + (T - T_f)^{1/3}\left[3a + \frac{s^2}{6}\right] + \ldots,\\ \rho(T,X) = (T - T_f)^{-2/3}\left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36}\right]\ldots.\end{gathered} \tag{7}$$

3. Действуя согласно методу согласования [5], с целью учета поправочного действия правой части системы (5) на самофокусировку решений (6), осуществим следующие действия.

[1)]e-mail: bisul@mail.ru

(i) Сделаем такие замены

$$X - X_f = x\varepsilon^{\alpha}, \quad T - T_f = t\varepsilon^{3\alpha/2}, \qquad (8)$$
$$G = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\Phi_*}{\varepsilon}\right)\frac{q}{\varepsilon^{\gamma}},$$

чтобы в образе (3) – уравнении

$$-\mathrm{i}\varepsilon^{1-3\alpha/2}q_t = \varepsilon^{2-2\alpha}q_{xx} + 2\varepsilon^{-2\gamma}|q|^2 q$$

– все члены были одного порядка. Получаем, что в заменах (8) $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, и что решение уравнения (3) в окрестности точки фокуса (T_f, X_f) в главном порядке задается формулой

$$G = \frac{q(t,x)}{\varepsilon} + ..., \qquad (9)$$

где $q(t,x)$ – гладкое при всех t и x решение $q(t,x) = r(t,x)\exp(\mathrm{i}\varphi(t,x))$ фокусирущего НУШ

$$-\mathrm{i}q_t = q_{xx} + 2|q|^2 q, \qquad (10)$$

уже *независящее* от малого параметра ε. Таким образом, согласно первому из растяжений (8), ширина соответствующего сгустка в момент $T = T_f$ ненулевая, хотя и довольно малая – порядка $O(\varepsilon^2)$.

(ii) Из условия согласования с асимптотиками (7) выведем, что это глобально гладкое решение НУШ (10) при $-t + x^2 \to \infty$ вне двух ветвей кривой

$$x^2 = 18at^{4/3} \qquad (11)$$

стремится к нулю, а внутри их его амплитуда $|r(t,x)|$ и фаза $\varphi(t,x)$ в главном задаются формулами

$$\varphi = t^{1/3}\left[3a + \frac{s^2}{6}\right] + \ldots, \qquad (12)$$
$$|r| = |t|^{-1/3}\left[\frac{a}{2} - \frac{s^2}{36}\right]^{1/2} + \ldots.$$

Из универсальности НУШ (10) в условиях малой дисперсии и слабой нелинейности и изложенного выше следует, что данное специальное решение НУШ (10) также довольно универсально.

4. В окрестности точки фокуса (T_f, X_f) соотношениями (7) описывается и известный самофокусирующийся импульс Таланова [6], фактически соответствующий [1] точным решениям системы (6) вида

$$\Phi = \delta(T) + g(T)X^2, \rho = \frac{\delta_T(T)}{2} + X^2\left[\frac{g'_T(T)}{2} + 2g^2(T)\right],$$

где, как легко видеть,

$$g''_{TT} + 20gg'_T + 48g^3 = 0, \qquad \delta''_{TT} + 4g\delta'_T = 0.$$

(Вне интервала $|X| < \left[-\delta_T(T)/(g'_T(T) + 4g^2(T))\right]^{1/2}$ этот импульс тождественно равен нулю.)

Так что в случае применимости приближения НГО к решениям уравнения (3), описываемого такими самофокусирующимися импульсами Таланова, поведение приближаемых ими решений $G(T, X, \varepsilon)$ будет, понятно, также задаваться формулой (9).

Замечание 1. Вывод статьи [7] о неприменимости этого приближения НГО для решений НУШ к ситуации уравнения (3) с параметром $\varepsilon \ll 1$, напрямую не относится. (Попытка свести эту ситуацию к той же, что в [7] приводит к тому, что вместо 1 в неравенстве $N \gg 1$ из раздела **2** [7] будет стоять малый параметр.) Однако вопрос о применимости к решениям (3) данного приближения Таланова все же пока надо признать остающимся открытым.

5. Данное решение $q(t,x)$ НУШ (10) является представителем множества специальных решений интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) уравнений – аналогов так называемых специальных функций волновых катастроф [8, Гл. 6, §4]. Общая теория таких решений, изучение которой было начато Китаевым в публикации в Записках ЛОМИ [9] (независимо частный случай одного подобного решения рассматривался автором данной статьи в том же номере Записок ЛОМИ [10]), позднее получила дальнейшее развитие и уже довольно многочисленные применения [11–20].

Замечание 2. К этим же решениям обычно приводит и использование методики Дубровина [21], основанной на приближенных симметриях нелинейных уравнений с малым параметром [22].

Как и другие представители данного множества, это решение q НУШ (10) относится к классу *изомонодромных* [23]: для данного $q(t,x)$ наряду с системами линейных обыкновеных дифференциальных уравнений (ОДУ) МОЗР [24] (λ – параметр)

$$\Psi'_x = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\lambda & q \\ q^* & \lambda \end{pmatrix}\Psi, \qquad (13)$$

$$\Psi'_t = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}(2\lambda^2 - |q|^2) & 2\mathrm{i}\lambda q - q_x \\ 2\mathrm{i}\lambda q^* + q^*_x & \mathrm{i}(2\lambda^2 - |q|^2) \end{pmatrix}\Psi, \qquad (14)$$

их соответствующее совместное решение Ψ удовлетворяет также системе линейных ОДУ

$$\Psi'_\lambda = A(\lambda, t, x)\Psi, \qquad (15)$$

где матрица $A(\lambda, t, x)$ рациональна по переменной λ.

Исходя из вида переменной $s = xt^{-2/3}$ в асимптотике (12) этого решения $q(t,x)$ НУШ (10) и выводов из [9–20], естественно сопоставить $q(t,x)$ интеграл

$$I(t,x) = \int_L \lambda^m \exp \mathrm{i}(\lambda x - \lambda^2 t + \delta\lambda^{-1}) d\lambda, \qquad (16)$$

в котором δ, m – постоянные, а L – такой контур, что интегрирование по частям интеграла не дает вкладов от внеинтегральных членов. (Интеграл Фурье (16) удовлетворяет линейной части НУШ (10) $-\mathrm{i}I_t = I_{xx}$ и его асимптотика при больших значениях $|t|$ описывается [8] как раз после замены $x = st^{2/3}$.)

Далее, уже из вида подинтегральной экспоненты этого линейного аналога $q(t,x)$ с учетом гладкости $q(t,x)$ и вида систем (13), (14) согласно общей идеологии [9] (и более конкретно-применительным рассуждениям и выкладкам из [11]) вытекает, что в ОДУ (15)

$$A(\lambda, t, x) = \sum_{j=-2}^{1} A_j(t,x)\lambda^j, \qquad (17)$$

где

$$A_1 = -4\mathrm{i}t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}x & 4\mathrm{i}tq \\ 4\mathrm{i}tq^* & \mathrm{i}x \end{pmatrix},$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}t|q|^2 & \mathrm{i}xq - 2tq_x \\ \mathrm{i}xq^* + 2tq_x^* & -2\mathrm{i}t|q|^2 \end{pmatrix},$$

$$A_{-2} = [-t(q_x q^* - q_x^* q) + + \frac{\mathrm{i}}{2}(x|q|^2 + \int_0^x |q|^2(t,\zeta)d\zeta + \nu)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + + \begin{pmatrix} 0 & -tq'_t - (xq)'_x/2 \\ t(q^*)'_t + (xq^*)'_x/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствием совместности на данном изомонодромном решении $q(t,x)$ систем линейных ОДУ (13) и (15), (17) является тот факт, что, наряду с НУШ (10) $q(t,x)$ удовлетворяет и нелинейному ОДУ

$$\mathrm{i}t[q_{xxx} + 6|q|^2 q_x] + \frac{xq_{xx}}{2} + q_x + x|q|^2 q + + (\nu + \int_0^x |q|^2(t,\zeta)d\zeta)q = 0. \qquad (18)$$

Аналогично, из совместности систем линейных ОДУ (14) и (15) следует, что $q(t,x)$ удовлетворяет также нелинейному ОДУ по независимой переменной t. При этом $\det A_{-2} = \mathrm{const}$. Исходя из асимптотик (12), находим, что в нашем случае

$$\det A_{-2} = \frac{a^3}{2}. \qquad (19)$$

6. Аналогии с поведением совместных решений линейных частей ОДУ (18) и НУШ (10) позволяют прийти к выводу о том, что при $-t \gg 1$ в области провала интенсивности $|q|^2$, которая расположена в областях $|x| > (18a)^{1/2}|t|^{2/3}$, асимптотика $q(t,x)$ должна иметь вид

$$\frac{1}{t^{1/2}} \sum_{j=1}^{3} \beta_j \frac{|f_j(s)|^{3/2} \exp(\mathrm{i}H_j(t,s))}{|f_j(s)^3 - d|^{1/2}} + \ldots. \qquad (20)$$

Здесь

$$H_j = t^{1/3}\left(sf_j(s) - f_j(s)^2 + \frac{d}{f_j(s)}\right) + \gamma_j \ln t + \alpha_j(s),$$

β_j, γ_j – постоянные, а функции $f_j(s)$ ($f_1(s) < f_2(s) < f_3(s)$) как и в асимптотиках некоторых линейных аналогов $q(t,x)$ вида (16), вычисляемых согласно методу стационарной фазы [8], определяются из кубического уравнения $s - 2f_j(s) - d/f_j^2(s) = 0$.

Потребовав теперь, чтобы асимптотики (20) теряли пригодность на полукубической параболе (11), с необходимостью получаем, что в двух последних выделенных формулах $d = (2a)^{3/2}$. В свою очередь, из этого факта вытекает, что в (17) и (18)

$$\nu = 0. \qquad (21)$$

При $t = 0$ из ОДУ (18) и равенства (21) следует справедливость равенства $q'_x(0,0) = 0$ и четность по x функции $q(0,x)$. Рассматривая теперь последнюю в качестве начального данного при $t = 0$ задачи Коши для НУШ (10), приходим к выводу о четности нашего решения $q(t,x)$ по переменной x и при всех t.

По этой причине при $x = 0$ условием совместности уравнений метода изомонодромных деформаций (ИДМ) (14) и (15), (17) является удовлетворение функцией $q(t,0)$ нелинейному ОДУ

$$tq''_{tt} + \frac{3q'_t}{2} = 2\mathrm{i}t|q|^2 q'_t + \mathrm{i}|q|^2 q. \qquad (22)$$

Все гладкие решения $q(t,0) = r(t,0)\exp(\mathrm{i}\varphi(t,0))$ этого ОДУ таковы, что $r(t,0)$ и $\varphi'_t(t,0)$ четны по t. Следовательно, и при всех x функции $r(t,x)$, $\varphi'_t(t,x)$ для данного совместного решения $q(t,x) = r(t,x)\exp(\mathrm{i}\varphi(t,x))$ НУШ (10) и ОДУ (18) *четны* по переменной t. (Из справедливости НУШ (10) при $t = 0$ выводим, что $\varphi'_x(0,x)r^2(0,x) = \mathrm{const}$. Из этого же соотношения, из (21) и из ОДУ (18) следует, что $\varphi(0,x) = \varphi_0 = \mathrm{const}$. Далее, без ограничения общности, будем считать, что $\varphi_0 = 0$.)

Значит, вне малой окрестности точки фокуса (T_f, X_f) после критического момента $T = T_f$ при некоторых конечных значениях $|X-X_f|^2+|T-T_f|^2$ соответствующие решения уравнения с малой дисперсией (3) вновь описываются квазиклассическим приближением (4), определяемым решениями системы (6). В данной области эти решения (6) некоторое время будут описывать расфокусирующиеся сгустки, асимптотика которых на сужающемся при $T\to T_f+0$ промежутке ненулевой амплитуды также описывается формулами (7). Далее, естественно, ожидать, что по истечении некоторого времени эти сгустки вновь начнут сужаться и самофокусироваться. (Правда, в принципе, у соответствующих решений системы НГО за точками фокуса возможны [1–4] и другие особенности – см. также [25, 26] и ссылки в последней из этих работ.)

7. Так как $q(0,x)=r(0,x)\exp(\mathrm{i}\varphi_0)$, то в силу четности $q(0,x)$, вида ОДУ (18) и равенств (19), (21) получаем, что $r(0,x)$ при $x\to 0$ раскладывается в ряд

$$r(0,x)=(2a^3)^{1/2}-(2a^3)^{3/2}\frac{4x^2}{3}+\ldots. \qquad (23)$$

Поэтому интенсивности рассматриваемых решений (3) в фокальных точках (T_f,X_f) и пределы $R(T_f)=(2a)^{3/2}$ при $T\to T_f$ интегралов $R(T)=\int\rho(T,X)dX$ от интенсивностей соответствующих сгустков с асимптотиками (2) связаны соотношением $|G(T_f,X_f,\varepsilon)|^2=R^2(T_f)/(4\varepsilon^2)$.

Решение $r(0,x)$ ОДУ (18) посредством замен

$$y=2^{3/2}(2a^3)^{1/4}x^{1/2},\quad r(0,x)=-2(2a^3)^{1/2}\frac{w'_y}{y}$$

выражается через четное по переменной y решение $w(y)$ частного случая третьего уравнения Пенлеве $w''_{yy}+w'_y/y+\sin w=0$, удовлетворяющее условию $w(0)=\pi/2$. Из известной [27] (Теорема 14.6) асимптотики $w(y)$ при $y\to\infty$ находим, что при $x\gg 1$

$$r(0,x)\approx\frac{h}{x^{3/4}}\sin\left(2(2a)^{3/4}x^{1/2}+b\ln x+c\right), \qquad (24)$$

где $h=(2a)^{3/8}\sqrt{\ln 2/\pi}$, $b=-\ln 2/(4\pi)$,

$$c=\frac{\pi}{4}+\arg\Gamma\left(\frac{\mathrm{i}\ln 2}{2\pi}\right)-7\frac{(\ln 2)^2}{4\pi}-\frac{\ln 2\ln(2a^3)}{8\pi}.$$

С учетом соотношения (19) из этой асимптотики следует, что при $t=0$ и $x\to\infty$

$$\int_0^x|q|^2(0,\zeta)d\zeta=(2a^3)^{1/2}-\frac{h^2}{x^{1/2}}+O(x^{-1}).$$

Правая часть (24) задает главный член асимптотики при $x\to\infty$ описываемого изомонодромного решения НУШ и при любом фиксированном t.

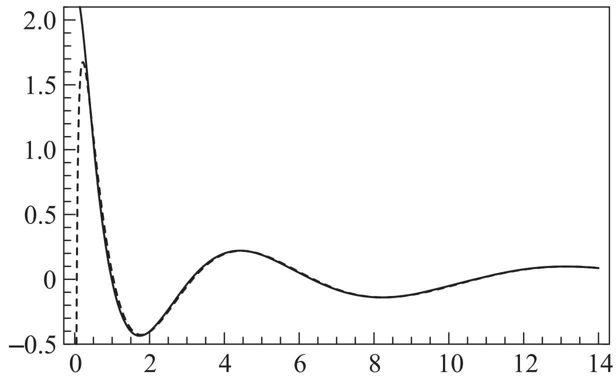

Рис. 1. Графики $r(0,x)$ (сплошная линия) и правой части асимптотики (24) (штриховая линия) при $2a^3=5$

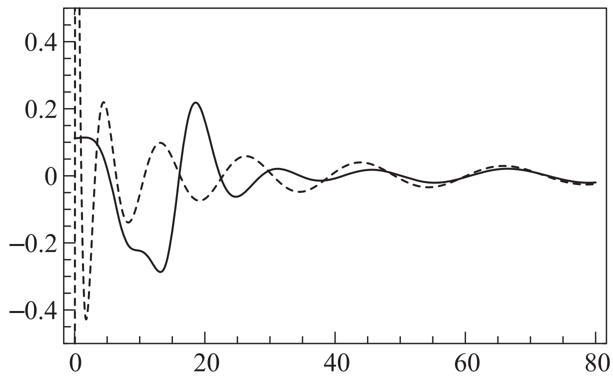

Рис. 2. Графики $r(t,x)\cos(\varphi(t,x))$ (сплошная линия) и правой части асимптотики (24) (штриховая линия) при $2a^3=5$ и $t=12$

Так что $\int_{-\infty}^{\infty}|q|^2(t,x)dx=2(2a^3)^{1/2}$. Исходя из вида этого главного члена нетрудно явно выписать и правую часть асимптотики (20). В частности, в (20)

$$\beta_1=\beta_2=\sqrt{\frac{\ln 2}{2\pi}},\quad \beta_3=0,\quad \gamma_1=-\gamma_2=\frac{\ln 2}{6\pi}.$$

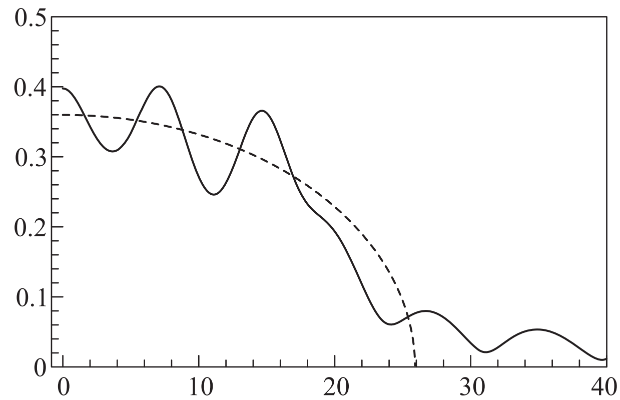

Рис. 3. Графики $r(t,x)$ (сплошная линия) и главного члена второй из асимптотик (12) (штриховая линия) при $2a^3=5$ и $t=12$

8. При $x = 0$ из четности по x нашего изомонодромного решения $q(x,t)$ следует, что пара совместных на решениях ОДУ (22) линейных уравнений ИДМ (14) и (15), (17), сводится к паре уравнений ИДМ из классической работы [28], условием совместности которой является удовлетворение функцией

$$\xi(t) = \frac{8t}{a^3}\left[t\varphi_t'(t,0)r^2(t,0) + \frac{\mathrm{i}}{2}(tr^2(t,0))_t'\right]$$

следующему случаю третьего уравнения Пенлеве:

$$\xi_{tt}'' = \frac{(\xi_t')^2}{\xi} - \frac{\xi_t'}{t} - \frac{a^3\xi^2}{4t^2} + \frac{2\mathrm{i}}{t} + \frac{16}{\xi}. \qquad (25)$$

Из соотношения (23) и четности функций $r(t,0)$, $\varphi_t(t,0)$, можно, воспользовавшись результатами статьи [29], в явном виде выписать асимптотику $\xi(t)$ для больших значений $-t$. А из последней уже вытекает заключение о том, что при $|x| < (18a)^{1/2}|t|^{2/3}$ на фоне приближения НГО, задаваемых правыми частями (12), происходят малоамплитудные колебания с двумя фазами вида

$$t^{1/3}3h_j(s)\sqrt{h_j^2(s) - 2a + s^2/9} + \mu_j \ln t,$$

где μ_j – постоянные, а

$$h_j^2(s) = 3a - \frac{s^2}{24} \pm \frac{s}{2}\sqrt{a + s^2/144}.$$

9. Характер этих колебаний и характер колебаний в асимптотике (20) качественно соответствуют выводам работ [17, 18], в которых описано влияние малой дисперсии на процессы провального самообострения импульсов приближения НГО.

Асимптотика $q(t,x)$ в окрестности правой из кривых (11) описывается (также подобно тому как в [17, 18]) в терминах комплексных решений ОДУ $\omega_{zz}'' + (|\omega|^2 + z)\omega = 0$ по переменной $z = (s - 3\sqrt{2a})t^{2/9}$, которые стремятся к нулю при $z \to \infty$, и для которых при $z \to -\infty$ $|\omega(z)| \approx \sqrt{-z/2}$. Формулой $f = (\ln\omega)_z'$ эти его решения задают [30] комплексные сингулярные решения второго уравнения Пенлеве $f_{zz}'' = 2f^3 + 2zf + \kappa$, где $\kappa = \omega_z\omega^* - \omega_z^*\omega - 1$.

Замечание 3. Аналогичным образом, вероятно (см. абзац после формулы (4.18) в статье [31]), подобная переходная область может быть описана и в пространственно многомерных случаях.

10. Автор выражает глубокую благодарность А.М. Камчатнову, по настоятельному совету которого, собственно, и было проведено исследование, являющееся предметом данной статьи. Он также признателен Д.П. Новикову за указание на то, что при $x = 0$ и $q_x(t,0) = 0$ уравнения (14), (15), (17) сводятся к паре уравнений ИДМ для третьего уравнения Пенлеве (25) из [28], и А.В. Китаеву за консультации по поводу свойств соответствующего решения $\xi(t)$ этого уравнения (в особенности, за замечание о симметрии $\xi(t)$ по переменной t). Весьма полезными при написании данной статьи были обсуждения части ее результатов с Е.А. Кузнецовым и А.В. Михайловым. Численные эксперименты, результаты которых представлены на рис. 1–3, были проведены с помощью В.Ю. Новокшенова и О.А. Султанова.

1. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ **58**, 2012 (1970).
2. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, *Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере*, Наука, М. (1973).
3. А. Б. Шварцбург, *Геометрическая оптика в нелинейной теории волн*, Наука, М. (1976).
4. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, М. (1991).
5. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М. (1989).
6. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **2**, 218 (1965).
7. E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov, and I. A. Shimokhin, Physica D **87**, 201 (1995).
8. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М. (1987).
9. А. В. Китаев, Записки ЛОМИ **187**, 53 (1991).
10. Б. И. Сулейманов, Записки ЛОМИ **187**, 110 (1991).
11. Б. И. Сулейманов, Мат. заметки **52**, 182 (1992).
12. Б. И. Сулейманов, И. Т. Хабибуллин, ТМФ **97**, 213 (1993).
13. Б. И. Сулейманов, Письма в ЖЭТФ **58**, 606 (1993).
14. Б. И. Сулейманов, ЖЭТФ **104**, 1089 (1994).
15. V. R. Kudashev, arXiv preprint putt-soll 9404002. (1994)-arxiv.org.
16. A. V. Kitaev, J. Math. Phys. **35**, 2934 (1994).
17. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, Письма в ЖЭТФ **62**, 358 (1995).
18. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, ТМФ **118**, 413 (1999).
19. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, ПММ **65**, 456 (2001).
20. Р. Н. Гарифуллин, Б. И. Сулейманов, ЖЭТФ **137**, 149 (2010).
21. B. Dubrovin, Commun. in Math. Phys. **267**, 117 (2006).
22. В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, ПМТФ **2**, 40 (1989).
23. А. Р. Итс, Известия АН СССР **49**, 530 (1985).
24. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971).
25. B. Dubrovin, T. Grava, and C. Klein, J. Nonlinear Sc. **19**, 57 (2009).

26. M. Bertola and A. Tovbis, Coom. Pure and Appl. Math. **66**, 678 (2013).
27. А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск (2005).
28. R. Garnier, Ann. Sci. Ecole Norm. **29**(4), 1 (1912).
29. A. V. Kitaev and A. H. Vartanian, Inverse Problems **20**, 1165 (2004).
30. M. Jimbo and T. Miwa, Physica D **2**, 407 (1981).
31. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).