Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 6, с. 381 – 386

Влияние нерадиационного затухания кубитов в общий канал на транспорт микроволновых фотонов

Я. С. Гринберг[1], *А. Н. Султанов*

Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 23 июня 2017 г.

После переработки 7 августа 2017 г.

Рассмотрено влияние нерадиационного затухания кубитов на микроволновой транспорт фотонов, распространяющихся в одномерной микрополосковой линии. Для случая двух кубитов в рамках формализма неэрмитового гамильтониана получены выражения для коэффициентов прохождения и отражения микроволнового сигнала, явным образом учитывающие влияние непрямого взаимодействия между кубитами, обусловленного нерадиационным затуханием в общий канал распада. Показано, что учет этого взаимодействия приводит к результатам, которые существенно отличаются от уже известных.

DOI: 10.7868/S0370274X17180114

Введение. Когерентное взаимодействие твердотельных кубитов с микроволновыми модами копланарного волновода является объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований (см. обзоры [1, 2] и имеющиеся там ссылки). В отличие от реальных атомов в оптическом резонаторе, искусственные атомы обладают существенными нерадиационными каналами затухания, когда энергия возбужденного состояния кубита излучается не в волновод, а передается другим степеням свободы, не связанным с излучением. Правильный расчет микроволнового транспорта при учете нерадиационного затухания кубитов является важным с точки зрения процедур записи и считывания информации при управлении кубитами с помощью микроволнового поля. Обычно считается, что релаксация кубитов происходит независимо друг от друга: каждый кубит связан со своим собственным термостатом, которые между собой некоррелированы; это соответствует формальной замене частоты возбуждения кубита Ω на $\Omega - i\gamma$, где γ – скорость распада возбужденного состояния кубита в нерадиационный канал [3–6]. Для одного кубита это не вызывает возражений. Однако уже для двух кубитов наличие общего канала распада приводит к тому, что затухание каждого из них не является независимым [7]. При этом выражения для коэффициентов отражения и прохождения существенно модифицируются так, что простая замена $\Omega \to \Omega - i\gamma$ более не является правильной. В частности, в работе [8] указывается, что такая замена является недостаточной для правильного описания степени запутанности между кубитами.

В более общем аспекте влияние общего термостата на свойства декогеренции и релаксации кубитных систем исследовалось в работах [9, 10] применительно к сверхпроводниковым кубитам и в работах [11, 12] применительно к квантовым точкам. Коррелированное взаимодействие кубитов со специальным образом приготовленным общим термостатом можно также использовать для создания устойчивых запутанных состояний в многокубитных системах [13, 14].

В настоящей работе рассмотрен микроволновый фотонный транспорт через открытый волновод, в котором на расстоянии d друг от друга помещены два кубита, каждый из которых характеризуется скоростью спонтанного излучения в волновод Γ_1, Γ_2, скоростью нерадиационного затухания в локальные каналы распада κ_1, κ_2, и скоростью нерадиационного затухания в общий канал распада γ_1, γ_2. Наличие общего канала распада приводит к появлению недиагональных элементов в гамильтоновой матрице, что существенным образом влияет на транспортные характеристики микроволновых фотонов. Расчет транспортных коэффициентов проводится в формализме эффективного неэрмитового гамильтониана, который имеет достаточно широкую область применимости при исследовании различного рода открытых квантовых систем (см. обзорные статьи [15, 16] и имеющиеся там многочисленные примеры и ссылки). Этот формализм в применении к фотонному транспорту через одномерную цепочку двухуровневых систем подробно описан в [17], поэтому здесь мы ограничимся только его кратким изложением.

[1] e-mail: greenbergy@risp.ru

Постановка задачи. Исходный гамильтониан. Гамильтониан системы двух кубитов, взаимодействующих с фотонным полем одномерного волновода, запишем в следующем виде[2)]

$$H = \sum_{i=1,2} \frac{1}{2}\Omega_i \left(1 + \sigma_Z^{(i)}\right) + \sum_k \omega_k a_k^+ a_k + \\ + J\left(\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + \sigma_+^{(2)}\sigma_-^{(1)}\right) + \\ + \sum_k \sum_{i=1,2} \lambda_i \left(a_k^+ e^{-\mathrm{i}kx_i} + a_k e^{\mathrm{i}kx_i}\right)\sigma_x^{(i)} + H_\gamma, \qquad (1)$$

где Ω_i $(i = 1, 2)$ – частота возбуждения кубита, ω_k – моды волноводного тракта, J – константа прямого обменного взаимодействия между кубитами, λ_i – константа взаимодействия i-го кубита, расположенного в точке x_i с фотонным полем, a_k^+, a_k – операторы рождения и уничтожения фотонов, $\sigma_\alpha^{(i)}$ – спиновые матрицы Паули, где верхний индекс относится к номеру кубита.

Далее начало отсчета выберем в точке, находящейся на одинаковом расстоянии от двух кубитов, так что $x_1 = -d/2$, $x_2 = d/2$.

Четвертый член в (1) отвечает за спонтанное излучение кубитов в волновод, а величина H_γ, которую мы здесь не будем конкретизировать, отвечает за нерадиационный распад возбужденного состояния кубита.

Вычисление эффективного неэрмитового гамильтониана. В соответствии с методом эффективного неэрмитового гамильтониана все гильбертово пространство разбивается на два взаимно ортогональных подпространства: внутреннее Q и внешнее P. Подпространство Q описывает замкнутую систему стационарных состояний $|n\rangle$, не взаимодействующую с внешним окружением, а подпространство P содержит, кроме состояний замкнутой системы, также состояния из континуума, в который распадается система Q вследствие ее взаимодействия с системой P. При этом система Q становится нестабильной: дискретные энергии приобретают отрицательные мнимые добавки, что и означает распад системы Q.

В нашем случае подпространство Q состоит из двух векторов, отвечающих состояниям, в которых один из двух кубитов находится в возбужденном состоянии $|e\rangle$, а другой в основном состоянии $|g\rangle$: $|1\rangle = |e_1 g_2\rangle$, $|2\rangle = |g_1 e_2\rangle$. Подпространство P содержит вектора, в которых оба кубита находятся в основном состоянии и один фотон имеется либо в волноводе, либо в нерадиационном канале распада. Динамику всей системы, описываемой гамильтонианом (1), можно спроектировать на эволюцию системы Q посредством эффективного неэрмитового гамильтониана, матричные элементы которого в базисе состояний системы Q запишем следующим образом [17]:

$$\langle m| H_{\mathrm{eff}} |n\rangle = \langle m| H |n\rangle - \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{c=1}^{3} A_m^c A_n^c + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{A_m(q)A_n^*(q)}{k - q + \mathrm{i}\varepsilon}, \qquad (2)$$

где состояния $|m\rangle, |n\rangle$ принадлежат набору $|1\rangle, |2\rangle$, k – волновой вектор фотона, рассеиваемого в волноводе.

Суммирование в (2) идет по трем каналам распада, два из которых $(c = 1, 2)$ являются локальными, а третий канал $(c = 3)$ – общим. Мнимая добавка $\mathrm{i}\epsilon$ позволяет избежать сингулярности в интеграле и обеспечивает расходящиеся волны при рассеянии. Амплитуды $A_m(q)$ представляют собой матричные элементы радиационного перехода между состояниями подпространств Q и P, в которых имеется один фотон в волноводе. Амплитуды A_m^c описывают затухание возбужденного состояния m-го кубита в нерадиационный канал распада. Первые два канала распада – локальные, поэтому отличными от нуля будут только амплитуды A_1^1, A_2^2, а $A_1^2 = A_2^1 = 0$. Третий канал распада является общим, для которого величины A_1^3, A_2^3 отличны от нуля.

Непосредственное вычисление амплитуд $A_m(q)$ и интеграла в (2) приводит к следующему результату [17]:

$$A_m(q) = \sqrt{\Gamma_m} e^{\mathrm{i}qx_m}, \qquad (3)$$

где Γ_m – скорость спонтанного излучения m-го кубита в волновод:

$$\Gamma_m = \frac{L\lambda_m^2}{\hbar^2 v_g}, \qquad (4)$$

L – длина волновода, v_g – групповая скорость фотонов в волноводе,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{A_m(q)A_n^*(q)}{k - q + \mathrm{i}\varepsilon} = -\mathrm{i}\sqrt{\Gamma_n\Gamma_m} e^{ik|d_{mn}|}, \qquad (5)$$

где $d_{mn} = x_m - x_n$, k – волновой вектор, связанный с частотой рассеиваемого фотона, $k = \omega/v_g$.

Амплитуды A_m^c будем считать постоянными, не зависящими от энергии рассеиваемого фотона: $A_1^1 = \sqrt{\kappa_1}$, $A_2^2 = \sqrt{\kappa_2}$, $A_1^3 = \sqrt{\gamma_1}$, $A_2^3 = \sqrt{\gamma_2}$. Кроме того,

[2)] Здесь и далее $\hbar = 1$, так что все энергетические величины в (1) выражены в частотных единицах.

считаем, что амплитуды A_1^3, A_2^3 не зависят от расстояния между кубитами, что соответствует марковскому приближению: взаимодействие между кубитами в канале распада происходит без запаздывания. Иными словами, мы считаем, что расстояние между кубитами много меньше длины волны взаимодействия между ними в общем канале распада.

В базисе состояний $|1\rangle, |2\rangle$ матрица эффективного гамильтониана имеет вид

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \Omega_1 - \mathrm{i}\widetilde{\Gamma}_1 & \Lambda \\ \Lambda & \Omega_2 - \mathrm{i}\widetilde{\Gamma}_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\Lambda = J - \mathrm{i}\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{\mathrm{i}kd} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\gamma_1\gamma_2},$$
$$\widetilde{\Gamma}_i = \Gamma_i + \frac{1}{2}\kappa_i + \frac{1}{2}\gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Положение резонансов в комплексной плоскости определяется из уравнения $\det(\widetilde{\omega} - H_{\text{eff}}) = 0$. В результате получим

$$\widetilde{\omega}_{\pm} = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) - \mathrm{i}\frac{1}{2}(\widetilde{\Gamma}_1 + \widetilde{\Gamma}_2) \pm$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\Omega_1 - \Omega_2 + \mathrm{i}[\widetilde{\Gamma}_2 - \widetilde{\Gamma}_1]\right)^2 + 4\Lambda^2}. \quad (8)$$

Недиагональные элементы в матрице (6) помимо прямого взаимодействия J описывают непрямое взаимодействие $\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{\mathrm{i}kd}$, обусловленное спонтанным излучением возбужденных кубитов, а также взаимодействие $\sqrt{\gamma_1\gamma_2}/2$, обусловленное нерадиационными каналами распада. При этом вклад спонтанного излучения зависит от частоты рассеиваемого фотона ω $(k = \omega/v_g)$, а это приводит к тому, что положение резонансов (8) в комплексной плоскости зависит от частоты рассеиваемого фотона, что является проявлением эффекта запаздывания. Таким образом, в рассматриваемом формализме немарковские эффекты учитываются автоматически. Поэтому положение резонансов на реальной оси частот определяется, в общем случае, нелинейным уравнением $\omega = \mathrm{Re}[\widetilde{\omega}_{\pm}(\omega)]$.

Для идентичных кубитов из (8) находим

$$\mathrm{Re}\omega_{\pm} = \Omega \pm J \pm \Gamma \sin kd, \quad (9)$$

$$\mathrm{Im}\omega_{\pm} = -\Gamma(1 \pm \cos kd) - \frac{1}{2}\kappa - \frac{1 \pm 1}{2}\gamma. \quad (10)$$

Как следует из (10), ширина резонанса $\mathrm{Im}\omega_-$ не зависит от параметра γ и в пределе $kd \ll 1$ определяется только релаксацией κ в локальный канал. Этот результат обусловлен корреляционным межкубитным взаимодействием, обусловленным общим каналом распада (последнее слагаемое справа в уравнении (7)). Если его не учитывать, то ширины обеих резонансов будут пропорциональны γ. Таким образом, с ростом γ ширина одного резонанса линейно растет, а другого – не меняется. На рис. 1 показан

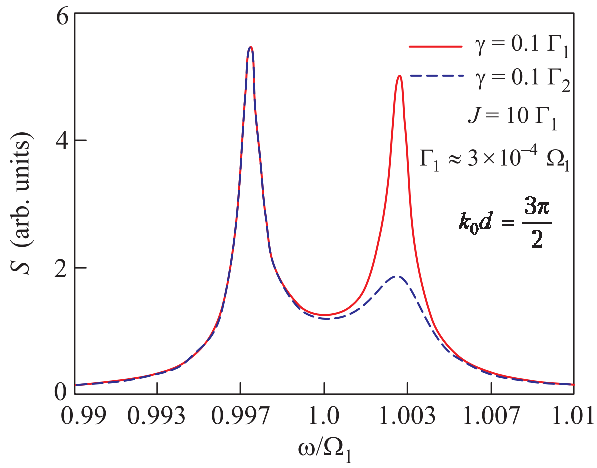

Рис. 1. (Цветной онлайн) Резонансный спектр двух идентичных кубитов в зависимости от величины нерадиационного затухания в общий канал, $k_0 = \Omega/v_g$

резонансный спектр $S(\omega)$ для двух идентичных кубитов, который определяется нулями реальной части детерминанта $D(\omega)$ $(S(\omega) \approx 1/D(\omega))$. Левый пик соответствует частоте $\mathrm{Re}\omega_-$, правый частоте $\mathrm{Re}\omega_+$. С ростом γ ширина и амплитуда левого пика не меняются, тогда как ширина правого пика увеличивается и его амплитуда уменьшается. На этом и последующих рисунках вычисления проведены в предположении $\gamma_i \gg \kappa_i$.

Запутанные состояния двухкубитной системы. Волновая функция кубитов в фотонном поле записывается следующим образом (см. выражение (42) в [17]):

$$\Psi_Q = \sum_{n,m=1}^{2} |n\rangle\lambda_m R_{n,m} e^{\mathrm{i}kx_m}, \quad (11)$$

где R_{mn} – матрица, обратная к матрице $(\omega - H_{\text{eff}})_{mn}$:

$$R = \frac{1}{D(\omega)}\begin{pmatrix} \omega - \Omega_2 + \mathrm{i}\widetilde{\Gamma}_2 & \Lambda \\ \Lambda & \omega - \Omega_1 + \mathrm{i}\widetilde{\Gamma}_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$D(\omega) = \det(\omega - H_{\text{eff}}) =$$
$$= (\omega - \Omega_1 + \mathrm{i}\widetilde{\Gamma}_1)(\omega - \Omega_2 + \mathrm{i}\widetilde{\Gamma}_2) - \Lambda^2. \quad (13)$$

Выражение для детерминанта (13) можно записать также в факторизованном виде

$$D(\omega) = (\omega - \widetilde{\omega}_-)(\omega - \widetilde{\omega}_+), \tag{14}$$

где комплексные корни $\omega_\pm$ определены в (8).

С помощью (12) получим выражение для волновой функции двухкубитной системы.

$$\Psi_Q = \frac{\lambda}{D(\omega)}(\omega - \Omega + i\widetilde{\Gamma})\left(|1\rangle\, e^{-ikd} + |2\rangle\, e^{ikd}\right) + + \frac{\lambda}{D(\omega)}\Lambda\left(|1\rangle\, e^{ikd} + |2\rangle\, e^{-ikd}\right). \tag{15}$$

Формула (15) позволяет определять амплитуду вероятности возбуждения каждого из кубитов ($\langle 1|\Psi_Q\rangle$, $\langle 2|\Psi_Q\rangle$), а также степень запутанности двухкубитного состояния. Из (15) следует, что максимальная запутанность $\Psi_Q \approx (|1\rangle \pm |2\rangle)$ при произвольной частоте ω рассеиваемого фотона имеет место в пределе $kd \ll 1$, а также при дискретных частотах, определяемых соотношением $kd = n\pi/2$, где $n = 1, 2, 3...$

Вычисление транспортных коэффициентов. Согласно методу при рассеянии фотона амплитуда перехода из состояния фотона с начальным импульсом k в состояние фотона с конечным импульсом q определяется следующим образом [16]:

$$T^{qk} = \sum_{m,n=1}^{2} A_m(q) R_{mn} A_n^*(k). \tag{16}$$

При этом коэффициенты фотонного траспорта t^{qk} являются элементами матрицы рассеяния S^{qk} и связаны с T^{qk} следующим образом:

$$t^{qk} \equiv S^{qk} = \delta_{qk} - iT^{qk}. \tag{17}$$

Для дальнейшего анализа нам удобно переписать детерминант (13) как

$$D(\omega) = = \delta_1\delta_2 - J^2 + i\delta_1\Gamma_2 + i\delta_2\Gamma_1 + 2iJ\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{ikd} - - \Gamma_1\Gamma_2\left(1 - e^{2ikd}\right) + A, \tag{18}$$

где $\delta_j = \omega - \Omega_j + \frac{i}{2}\kappa_j + \frac{i}{2}\gamma_j$, $j = 1, 2$.

В последней строчке (18) мы выделили величину A, которая описывает взаимодействие между кубитами, обусловленное общим нерадиационным каналом распада:

$$A = \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{4}\left(\sqrt{\gamma_1\gamma_2} + 4i(J - i\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{ikd})\right). \tag{19}$$

Прохождению фотона через волновод соответствует $q = k$, а отражению $q = -k$. Тогда в соответствии с (17) коэффициенты прохождения t и отражения r можно записать так: $t \equiv t^{kk} = 1 - iT^{kk}$, $r \equiv t^{-kk} = -iT^{-kk}$. Используя (3), (16) и явный вид элементов матрицы R (12), запишем эти коэффициенты в следующем виде:

$$t = \frac{1}{D(\omega)}\left(\delta_1\delta_2 - J^2 - 2J\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\sin kd + B\right), \tag{20}$$

$$r = \frac{-i}{D(\omega)}\Big[\delta_2\Gamma_1 e^{ikd} + \delta_1\Gamma_2 e^{-ikd} + 2\Gamma_1\Gamma_2\sin kd + + 2J\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} + C\Big], \tag{21}$$

где $D(\omega)$ имеет вид (18), а величины B и C также как и A (19) описывают вклад нерадиационных каналов распада во взаимодействие между кубитами:

$$B = \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{4}\left(\sqrt{\gamma_1\gamma_2} + 4i(J + \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\sin kd)\right), \tag{22}$$

$$C = -\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}. \tag{23}$$

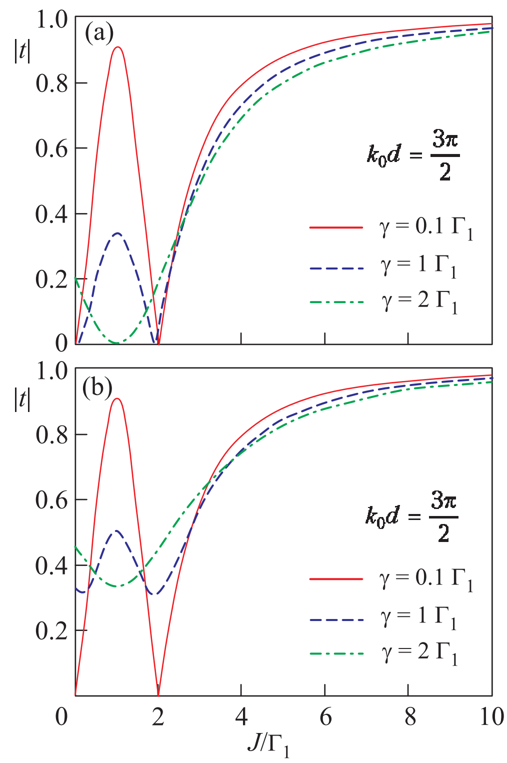

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость коэффициента прохождения $|t|$ от величины прямого взаимодействия J при различных значениях нерадиационного затухания в общий канал γ. (a) – Расчет по формуле (11a) из работы [6]. (b) – Расчет по формуле (20), $k_0 = \Omega/v_g$

Пренебрегая в выражениях (18), (20) и (21) величинами A, B и C, получаем для коэффициентов t и r выражения, в точности совпадающие с уже известными (выражения (11a) и (11b) в работе [6]).

На рис. 2 и 3 проведено сравнение поведения коэффициента пропускания $|t|$ (20) с формулой (11a)

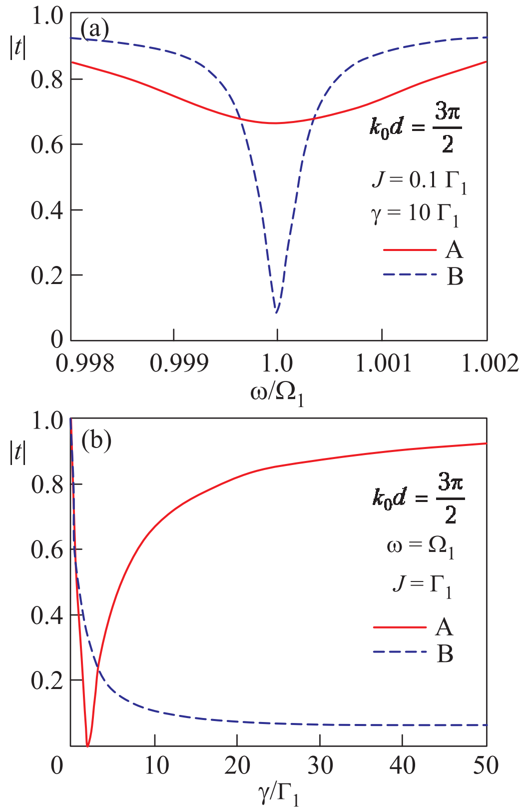

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость коэффициента прохождения $|t|$ от частоты рассеиваемого фотона (a) и от величины нерадиационного затухания в общий канал (b). Сплошные линии соответствуют расчету по формуле (11a) из работы [6], пунктирные линии – расчету по формуле (20). $k_0 = \Omega/v_g$

из работы [6]). Расчеты проводили для идентичных кубитов: $\Omega_1 = \Omega_2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ при фиксированных значениях $\Omega_1 = 3$ ГГц, $\Gamma_1 = 3 \cdot 10^{-4}\Omega_1$. Из рис. 2 следует, что в области $J < 2\Gamma_1$ выражение (20) приводит к результатам, которые существенно отличаются от того, что следует из выражения (11a) в работе [6]. Еще более существенно это отличие видно на рис. 3, где наличие непрямого взаимодействия между кубитами, обусловленного нерадиационными каналами распада, приводит к значительному подавлению коэффициента пропускания. На рис. 4 изображено рассчитанное по формуле (20) двумерное (в плоскости $k_0 d, \omega$) распределение коэффициента прохождения. Вблизи $k_0 d = 3\pi/2$ хорошо заметна область прозрачности, в которой коэффициент прохождения близок к единице в широком частотном диапазоне. Численное моделирование показало, что ширина этой области по вертикальной оси пропорциональна величине J и обратно пропорциональна скорости нерадиационного распада γ.

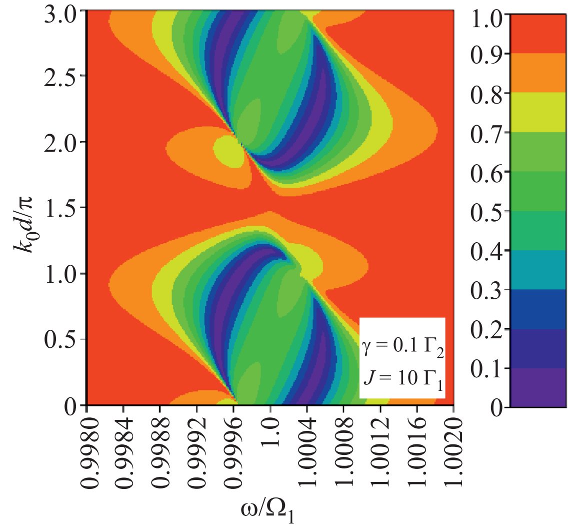

Рис. 4. (Цветной онлайн) Двумерное (в плоскости kd, ω) распределение коэффициента прохождения. Вблизи $k_0 d = 3\pi/2$ хорошо видна область прозрачности

Заключение. Итак, существование общего нерадиационного канала распада кубитов приводит к дополнительному взаимодействию между ними, что оказывает существенное влияние на коэффициенты прохождения и отражения микроволновых фотонов. Подробно рассмотрена система из двух кубитов. Получены аналитические выражения для коэффициентов прохождения и отражения. Показано, что есть области параметров, где учет межкубитной корреляции, обусловленной общим каналом распада, приводит к результатам, которые существенно отличаются от известных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект # 16-19-10069.

1. I. Buluta, S. Ashhab, and F. Nori, Rep. Prog. Phys. **74**, 104401 (2011).
2. D. Roy, C. M. Wilson, and O. Firstenberg, Rev. Mod. Phys. **89**, 021001 (2017).
3. G. Romero, J. J. Garcia-Ripoll, and E. Solano, Phys. Scr. T **137**, 014004 (2009).
4. Y.-L. L. Fang, H. Zheng, and H. U. Baranger, EPJ Quantum Technology **1**, 3 (2014).
5. H. Zheng and H. U. Baranger, Phys. Rev. Lett. **110**, 113601 (2013).
6. M.-T. Cheng, J. Xu, and G. S. Agarwal, Phys. Rev. A **95**, 053807 (2017).
7. T. Ojanen, A. O. Niskanen, Y. Nakamura, and A. A. Abdumalikov Jr, Phys. Rev. B **76**, 100505(R) (2007).
8. C. Gonzalez-Ballestero, F. J. Garcia-Vidal, and E. Moreno, New J. Phys. **15**, 073015 (2013).

9. M. J. Storcz and F. K. Wilhelm, Phys. Rev. A **67**, 042319 (2003).
10. M. J. Storcz, F. Hellmann, C. Hrelescu, and F. K. Wilhelm, Phys. Rev. A **72**, 052314 (2005).
11. T. Vorrath and T. Brandes, Phys. Rev. B **68**, 035309 (2003).
12. T. Brandes and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **83**, 3021 (1999).
13. F. Reiter, L. Tornberg, G. Johansson, and A. S. Srensen, Phys. Rev. A **88**, 032317 (2013).
14. N. A. Rodriguez-Briones, J. Li, X. Peng, T. Mor, Y. Weinstein, and R. Laflamme, arXiv:1703.02999v1 (2017).
15. N. Auerbach and V. Zelevinsky, Rep. Progr. Phys. **74**, 106301 (2011).
16. A. Volya and V. Zelevinsky, *Conf. Proc. Nuclei and Mesoscopic Physics: WNMP 2004*, ed. by V. Zelevinsky, AIP, Melville (2005), v. 777, p. 229.
17. Ya. S. Greenberg and A. A. Shtygashev, Phys. Rev. A **92**, 063835 (2015).