Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 7, с. 459 – 462 © 2017 г. 10 октября

Энергетика возбуждения сверхосцилляций, близких к гармоническим

И. В. Доронин[+*1)], *А. А. Пухов*[+*×], *А. П. Виноградов*[+*×]

[+] *Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Россия*

[*] *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, 127055 Москва, Россия*

[×] *Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, 125412 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 августа 2017 г.

После переработки 30 августа 2017 г.

Исследованы энергетические затраты для создания временного цуга сверхосцилляций, близких к гармоническим. Показано, что мощность источников, необходимая для создания цуга таких сверхосцилляций экспоненциально растет как с ростом числа периодов в цуге, так и с увеличением частоты сверхосцилляций.

DOI: 10.7868/S0370274X17190110

1. Введение. Функции, имеющие ограниченный спектр, являются наиболее часто встречающимся объектом в физике. Предположение о том, что такие функции могут осциллировать на конечном промежутке времени значительно *быстрее максимальной частотной составляющей* (в строгой формулировке теоремы – сколь угодно быстро), кажется контринтуитивным. Однако, как это было показано в [1] и [2], такие функции существуют, и была указана процедура их построения.

Простейшим примером сверхосциллирующей функции является $f(t) = (\cos t + \mathrm{i}\nu \sin t)^N$ [3], где N – натуральное число, а ν – действительное. Легко видеть, что функция представима в виде суммы $f(t) = \sum_{j=-N}^{N} a_j \exp(\mathrm{i}tj)$, т.е. спектр $f(t)$ ограничен, а наибольшая частота спектра равна N. Однако при достаточно малых t получаем $f(t) \approx \exp(\mathrm{i}\nu N t)$ [3], это означает, что функция является сверхосциллирующей и имеет эффективную частоту $\nu N \gg N$.

Данное явление получило название сверхосцилляций (СО) и нашло множество применений. Так, например, в квантовой задаче рассеяния показано [4], что частица с малым импульсом, проходя через щель, может приобретать большой импульс, если ее волновая функция сверхосциллирует в области щели, а в [5] предсказана возможность передачи атому большого импульса электромагнитным полем с малым волновым вектором. В [6] показано, что за счет СО классического поля двухуровневая система с частотой перехода ω может быть возбуждена импульсом электромагнитного излучения, спектр которого представлен узкими линиями с частотами, меньшими ω.

В радиофизике явление СО предлагается использовать для улучшения разрешающей способности радара. Так, в [7, 8] рассмотрен сигнал, состоящий из n гармоник, частоты которых ω_j меньше некоторой $\omega_{\max}$. Если в этом случае взять амплитуды гармоник равными друг другу, то получится сигнал вида $\sin(2\pi\omega_{\max}t)/2\pi\omega_{\max}t$. Однако в [7, 8] амплитуды гармоник подобраны так, чтобы $f(t)$ содержала узкий пичок, ширина которого на уровне 3 дБ на 36 % меньше, чем ширина $\approx 0.6/\omega_{\max}$ на полувысоте сигнала $\sin(2\pi\omega_{\max}t)/2\pi\omega_{\max}t$. Сигнал такой формы может быть использован в радаре для более точного определения дистанции до цели.

Наряду с временны́ми существуют пространственные СО, что открывает возможности преодоления дифракционного предела разрешения в микроскопии [9–12] и получения сверхнаправленности антенн [13].

Препятствием к практическому применению СО является быстрый рост мощности источника, требуемой для генерации сверхосциллирующего сигнала [14, 15] при увеличении частоты и количества периодов сверхосцилляций.

Количественные исследования этого вопроса относятся к области квантовой механики. Так, при синтезе быстро осциллирующей на некотором интервале волновой функции из функций вида $\sin(\mu t)/\mu t$, энергия и спектр которых ограничены, общая энергия растет экспоненциально с ростом длины интервала

1) e-mail: ildoron2@gmail.com

и полиноминально с ростом частоты сверхосцилляций [14, 15].

Часто применения СО связаны с оптикой и радиофизикой, где базисными функциями являются бесконечные гармоники, имеющие бесконечную энергию. Для возможности экспериментальной постановки задачи мы рассмотрели сверхосцилляции поля, складывающегося в фиксированной точке пространства из полей низкочастотных излучателей. Очевидно, что прямой перенос результатов [14, 15] на этот случай невозможен.

В данной статье рассматривается возможность получения на конечном временно́м интервале близких к гармоническим сверхосцилляций. В качестве базиса используются обычные гармоники. Исследуются необходимые для получения таких СО интенсивности излучения отдельных источников. Показано, что как при увеличении частоты СО, так и при увеличении числа периодов СО необходимая мощность источников растет экспоненциально.

2. Построение сверхосциллирующей функции. Следуя [7, 8], будем строить СО функцию частоты ω_{SO}, аппроксимируя на интервале $[0;\tau]$ функцию $\cos(\omega_{\text{SO}}t)$ суммой низкочастотных косинусов с верхней частотой $\omega_{\max}$. Таким образом, СО функция имеет вид

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(\omega_j t),$$

где $\mathbf{a} = \{a_j\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ – амплитуды полей низкочастотных источников в рассматриваемой точке, ω_j $(j = 1, \ldots, n)$ – их частоты, причем $\omega_n = \omega_{\max}$. Поскольку $\cos(t)$ – четная функция, то такую аппроксимацию можно автоматически продолжить на интервал $[-\tau;\tau]$.

Задача аппроксимации определяется двумя безразмерными параметрами: отношением частоты СО к максимальной частоте, $\omega_{\text{SO}}/\omega_{\max}$, и числом периодов СО $p = \tau\omega_{\text{SO}}/\pi$. Введем невязку

$$Q(\omega_{\text{SO}}/\omega_{\max}, p, \mathbf{a}) = \|f(t) - \cos(\omega_{\text{SO}}t)\|^2_{L_2}/\tau, \qquad (1)$$

где $\|\cdot\|_{L_2}$ – L_2-норма функции на отрезке $[0;\tau]$, т.е. $\|g(t)\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_0^\tau |g(t)|^2 dt}$.

В работах [14, 15] в качестве энергии сигнала используется выражение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$. В нашем случае такое определение неприменимо, поскольку используемые базисные функции не убывают на бесконечности. Вместо этого будем рассматривать величину $E = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2$, которая равна суммарной интенсивности излучения источников в точке наблюдения.

3. Алгоритм поиска сверхосциллирующей функции. Нашей целью является нахождение СО функции с приемлемой невязкой при минимальной суммарной интенсивности. Понятно, что конкретные требования к размеру невязки зависят от приложения. Разумным представляется выбор $0.001 < Q(\omega_{\text{SO}}/\omega_{\max}, p) < 0.15$. При этом СО функция достаточно близко воспроизводит косинус, отношение $\omega_{\text{SO}}/\omega_{\max}$ может достигать двадцати, а число периодов пяти–семи. Для определенности выберем $Q(\omega_{\text{SO}}/\omega_{\max}, p) = 0.03$. Типичная СО функция $f(t)$ с таким значением невязки и ее фурье-образ $F(\omega)$ представлены на рис. 1 и 2.

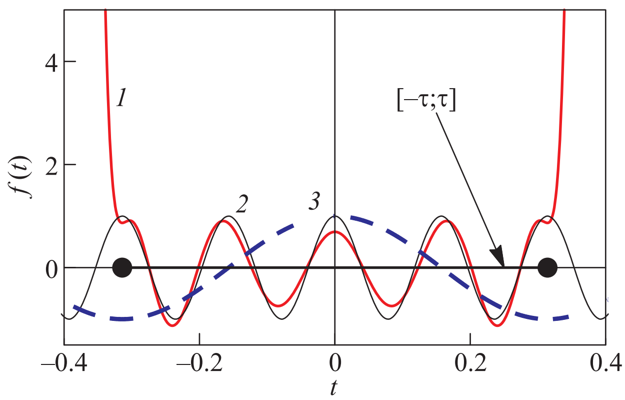

Рис. 1. (Цветной онлайн) Сверхосциллирующая функция $f(t)$ для $\omega_{\text{SO}} = 40$, $\omega_{\max} = 10$, $p = 4$: *1* – $f(t)$, *2* – $\cos(\omega_{\text{SO}}x)$, *3* – низкочастотная гармоника с наибольшей частотой. Невязка $Q(4,4) \approx 0.03$

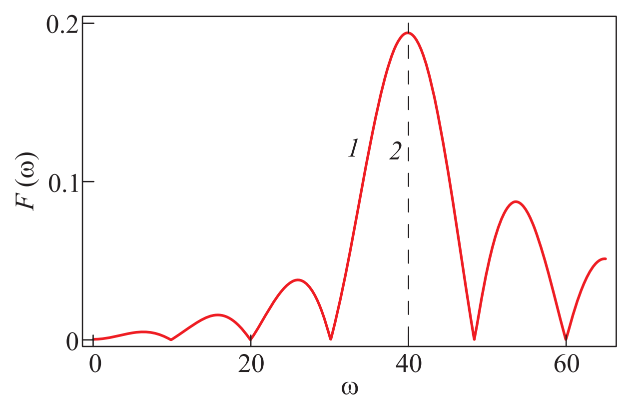

Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектр $F(\omega)$ СО функции для $\omega_{\text{SO}} = 40$, $\omega_{\max} = 10$, $p = 4$, $Q \approx 0.03$ (кривая *1*). Линия *2* соответствует частоте ω_{SO}

Для определения $E(\mathbf{a}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2$ мы искали минимум функции

$$L(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_i^2 - \lambda \times \tag{2}$$

$$\times \left((\tau)^{-1} \int\limits_0^{\tau} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cos(\omega_i t) - \cos(\omega_{\mathrm{SO}} t) \right)^2 dt - 0.03 \right),$$

при заданной невязке $Q(\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}, p, \mathbf{a}) = 0.03$. Выражение (2) – это функция Лагранжа, а λ – соответствующий множитель Лагранжа.

Чтобы найти условный минимум функции, надо приравнять нулю производные $L(\mathbf{a})$ по $a_j, j = 1, \ldots, n$ и по λ. Условие равенства нулю производных сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} (\tau/\lambda) a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \int\limits_0^{\tau} \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t) dx = \\ = \int\limits_0^{\tau} \cos(\omega_{\mathrm{SO}} t)\cos(\omega_i t) dt, \ i = 1, \ldots, n; \\ Q(\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}, p, \mathbf{a}(\lambda)) - 0.03 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение системы (3) сводится к поиску λ, при котором $Q(\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}, p, \mathbf{a}(\lambda)) = 0.03$. В свою очередь $\mathbf{a}(\lambda)$ является решением системы

$$(\tau/\lambda) a_i + \sum_{j=1}^{u} a_j \int\limits_0^{\tau} \cos(\omega_i t), \cos(\omega_j t) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\tau} \cos(\omega_{\mathrm{SO}} t)\cos(\omega_i t) dt, \ i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Система (4) имеет единственное решение для любого λ. Действительно, матрица $\left\{ \int\limits_0^{\tau} \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t) dt \right\}_{ij}$ является матрицей Грамма для векторов $\cos(\omega_j t)$, $j = 1, \ldots, n$ с введенным выше скалярным произведением. Поскольку $\cos(\omega_j t)$ линейно независимы, то детерминант матрицы не равен нулю, и система (4) всегда имеет единственное решение [16].

4. Рост суммарной интенсивности излучения источников при изменении частоты и длины интервала сверхосцилляций. Рассмотрим зависимость E от величин $\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}$ и p. Результат оптимизации изображен на рис. 3. Поскольку E может изменяться на много порядков, то удобно перейти в логарифмический масштаб и рассматривать величину $\log_{10} E = \log_{10} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \right)$. Как следует из рис. 3,

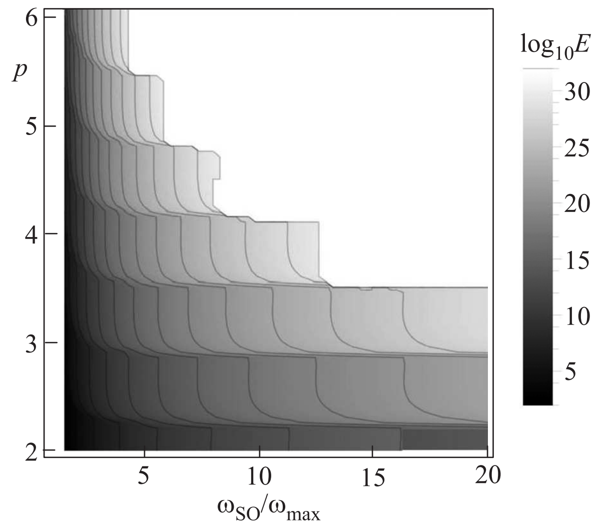

Рис. 3. $\log_{10} E$ при фиксированной невязке $Q = 0.03 \pm \pm 0.01$ в зависимости от количества СО в цуге p и от отношения частоты СО к максимальной частоте спектра $\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}$

при фиксированном соотношении частот E растет скачкообразно при увеличении длины интервала аппроксимации τ. Величина E при фиксированном p растет как $\exp(g(\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}))$, где $g(x)$ – медленно возрастающая функция $\sim \sqrt{x}$ (рис. 4).

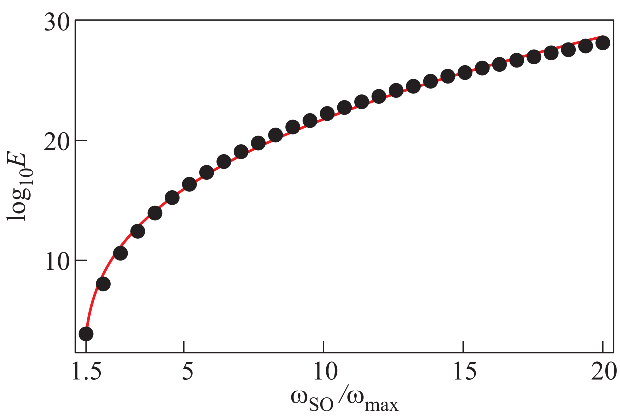

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость $\log_{10} E$ от соотношения частот при постоянной длине $p = 3.3$. Точки – результаты аппроксимации гармоники, сплошная кривая – модель с параметрами $c = 10.2$, $d = 1.5$

Как упоминалось ранее, рост E в зависимости от p происходит скачкообразно на несколько порядков (рис. 5). Для любого фиксированного $\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}$ скачки $\log_{10} E$ одинаковы по значению и равноудалены по p, что позволяет аппроксимировать искомую зависимость следующим образом: $\log_{10} E(p) \approx ap - b + e(p)$; $a, b > 0$, здесь $e(p)$ – периодическая функция, такая, что $e(p) \ll \log_{10} E$.

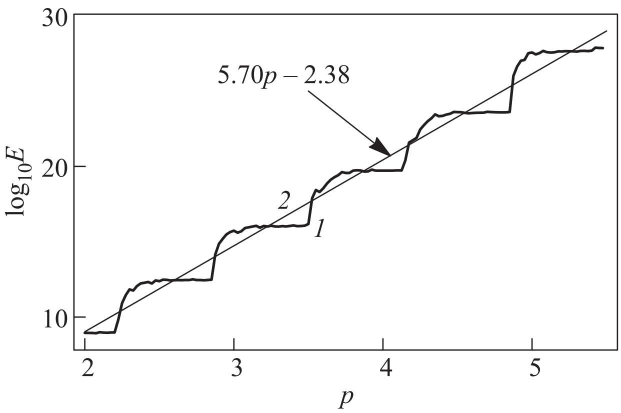

Рис. 5. Зависимость суммарной интенсивности E, необходимой для создания цуга СО от длины p, при $\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max} = 5$: результаты численного моделирования (*1*) и сглаженная зависимость вида $ap - b$ (*2*)

Вторым параметром, влияющим на величину E, является отношение СО частоты к верхней частоте спектра $\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max}$. Вдали от скачка E по p, полученные результаты хорошо приближаются зависимостью вида $\log_{10} E = c(\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max} - d)^{0.36}$ с параметрами $c, d > 0$. Пример для $p = 3.3$ изображен на рис. 4. С увеличением p рост E связан с ростом параметра c. Параметр d меняется в небольших пределах, $d \approx 1.5$.

5. Заключение. Получены характерные требования к суммарной интенсивности источников, создающих в точке наблюдения сигнал, содержащий СО с заданным отклонением от чистой гармоники (заданная невязка). Показано, что для $Q \approx 0.03$ СО визуально соответствуют чистой гармонике, и увеличение длины цуга при фиксированной частоте приводит к экспоненциальному увеличению суммарной интенсивности источников $E \sim \exp(ap+b)$. При этом увеличение интенсивности E происходит скачками. При увеличении частоты СО при фиксированном p интенсивность E растет как $\exp(b(\omega_{\mathrm{SO}}/\omega_{\max})^{0.36})$.

Авторы выражают благодарность В.П. Крайнову за обсуждение полученных результатов.

1. Y. Aharonov, J. Anandan, S. Popescu, and L. Vaidman, Phys. Rev. Lett. **64**, 2965 (1990).
2. M. V. Berry, J. Phys. A: Mathematical and General **27**, 391 (1994).
3. M. V. Berry and S. Popescu, J. Phys. A: Mathematical and General **39**, 6965 (2006).
4. A. Kempf and P. J. S. G. Ferreira, J. Phys. A: Mathematical and General **37**, 12067 (2004).
5. S. M. Barnett and M. V. Berry, J. Optics **15**, 6 (2013).
6. D. G. Baranov, A. P. Vinogradov, and A. A. Lisyansky, Opt. Lett. **39**, 6316 (2014).
7. A. M. H. Wong and G. V. Eleftheriades, IEEE Microwave and Wireless Components Lett. **22**, 147 (2012).
8. A. M. H. Wong and G. V. Eleftheriades, IEEE Transactions on Information Theory **59**, 2173 (2011).
9. N. I. Zheludev, Nature Materials **7**, 420 (2008).
10. F. M. Huang and N. I. Zheludev, Nano Lett. **9**, 1249 (2009).
11. N. I. Zheludev, J. Optics A: Pure and Appl. Opt. **11**, 074009 (2009).
12. E. T. F. Rogers and N. I. Zheludev, J. Optics **15**, 094008 (2013).
13. A. M. H. Wong and G. V. Eleftheriades, IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett. **9**, 315 (2010).
14. P. J. S. G. Ferreira and A. Kempf, IEEE Transactions on Signal Proc. **54**, 3732 (2006).
15. P. J. S. G. Ferreira and A. Kempf, *11th Europ. Signal Proc. Conf.*, Toulouse (2002), p. 347.
16. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Физматлит, М. (2004), с. 215.