Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 9, с. 577 – 580

О некоторых интегрируемых случаях двумерного движения заряженной частицы в электромагнитном поле

В. Г. Марихин[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 6 сентября 2017 г.
После переработки 4 октября 2017 г.

Проинтегрированы два случая двумерного движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В этих случаях гамильтониан коммутирует с моментом импульса. Переменные разделяются в полярных координатах. Векторный потенциал и потенциальная энергия выбраны из недавней работы автора для двух случаев двумерного уравнения Шредингера, относящихся к квази-точнорешаемым задачам. Произведено сравнение квазиклассической и точной волновых функций в классически недоступных областях в этих случаях.

DOI: 10.7868/S0370274X17210093

В работе автора [1] были получены и проинтегрированы два, по-видимому первых, примера двумерных уравнений Шредингера с электромагнитным полем, относящихся к классу квази-точнорешаемых задач. Такие примеры были получены с помощью редукции параметров в Примерах 1 и 2 автором в работе [2]. Цель данной работы – найти классическую динамику электрона в тех же электромагнитных полях, как и в вышеупомянутых квантовых примерах. Это представляет интерес, потому что квантовые задачи имеют повышенную симметрию, следовательно появляется надежда решить соответствующие классические задачи в терминах наиболее простых спецфункций.

Кроме того будет получено, что квазиклассические волновые функции, вычисленные с помощью функций Гамильтона – Якоби соответствующей классической задачи, хорошо аппроксимируют точную волновую функцию квантовых примеров в классически недоступных областях $r \ll a$ и $r \gg a$, где a – параметр размерности длины, входящий в определение потенциалов. Вероятно, что этот факт связан с интегрируемостью используемых квантовых примеров.

Мы будем также пользоваться параметром размерности времени $\tau = \frac{2ma^2}{\hbar}$.

План работы следующий: сначала будут приведены исследуемые гамильтонианы в общем виде, выписана функция Гамильтона–Якоби в переменных координаты – значения интегралов движения на поверхности уровня, а также выражение для второго приближения квазиклассической волновой функции. Затем будут приведены результаты интегрирования классических примеров и сравнение точной и квазиклассической волновых функций. Далее, на одном примере будет представлен полный вывод для асимптотик волновых функций при $r \ll a$ и $r \gg a$, оценена точность приближения. В заключение мы обсудим полученные результаты.

В обоих случаях в полярных координатах потенциалы подчиняются ограничениям:

$$A_r = 0, \quad A_\phi = A_\phi(r), \quad u = u(r). \tag{1}$$

Поскольку гамильтониан не содержит переменной ϕ явно, он коммутирует с моментом импульса $M = p_\phi r$, т.е. величина $M = \hbar l$ не меняется со временем. Итак, гамильтониан в обоих случаях имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_\phi - \frac{e}{c}A_\phi(r))^2 + p_r^2\right] + u(r). \tag{2}$$

Следует отметить, что для любых электромагнитных потенциалов вида (1) задача интегрируется в квадратурах, однако в общем случае решение не удается привести к известным спецфункциям. Оба рассматриваемых здесь примера можно привести к задаче о вычислении эллиптических (гиперэллиптических) интералов и их обращении.

Функция Гамильтона–Якоби $S(r, \phi; H, M = \hbar l)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$S = M\phi + \int p_r \, dr, \tag{3}$$

где компонента импульса p_r вычисляется явно из уравнения (2).

[1)]e-mail: mvg@itp.ac.ru

Квазиклассическая волновая функция во втором приближении в данном случае такая:

$$\psi_{QC} = \frac{1}{\sqrt{r\frac{\partial S}{\partial r}}} e^{\mathrm{i}\frac{S}{\hbar}}. \tag{4}$$

Требование однозначности волновой функции приводит к условию $l \in \mathbb{Z}$ во всех рассматриваемых случаях в части, касающейся оценки волновых функций.

Мы будем использовать обозначения ψ_{ex} для точной, а ψ_{qc} для квазиклассической функции в степенном приближении с точностью до нормировки. Далее мы будем писать просто "в степенном приближении".

Пусть ψ – волновая функция в степенном приближении, а $\psi^{(1)}$ – волновая функция в следующем приближении по параметру $\frac{r}{a}$ $(r \ll a)$, или $\frac{a}{r}$ $(r \gg a)$, тогда

$$\frac{\psi^{(1)}}{\psi} = 1 + O\left(\frac{r}{a}\right)^m, \; r \ll a,$$

$$\frac{\psi^{(1)}}{\psi} = 1 + O\left(\frac{a}{r}\right)^{m'}, \; r \ll a, \quad m > 0, \; m' > 0.$$

Например, величину $O\left(\frac{r}{a}\right)^m$ будем называть "точностью степенного приближения волновой функции ψ" при $r \ll a$. Конечно, такое определение точности можно ввести не всегда, однако во всех приведенных далее случаях оно корректно.

Рассмотрим анонсируемые выше случаи.

Рациональный случай. Потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{c\hbar}{2ea^2}\, r\left(\epsilon + 3\frac{r^2}{a^2}\right), \quad A_r = 0, \\ u &= -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(2\frac{r^6}{a^6} + \epsilon\frac{r^4}{a^4} + 2k\frac{r^2}{a^2}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

энергия $H = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\lambda$.

Решая уравнения движения с гамильтонианом (2) с потенциалами (5), получаем искомую динамику заряженной частицы

$$\begin{aligned} \frac{t-t_0}{\tau} &= \int_{\xi_l}^{\xi} \frac{dx}{2y}, \quad r = a\sqrt{\xi}, \\ \phi - \phi_0 &= \int_{\xi_l}^{\xi} \frac{(2l - \epsilon x - 3x^2)}{2x}\frac{dx}{y}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$y^2 = P_1(x),$$

$$P_1(x) = -x^4 - 2x^3\epsilon + (12l + 8k - \epsilon^2)x^2 + (4l\epsilon + 4\lambda)x - 4l^2,$$

где как обычно классическое движение происходит в классически доступной области при условии $(\xi > 0)$

$$0 < \xi_l \le \xi \le \xi_r, \quad P_1(\xi_l) = P_1(\xi_r) = 0, \; P_1(\xi) \ge 0,$$

если существует хотя бы пара положительных корней полинома $P_1(\xi)$.

В (6) время t определяется интегралом от голоморфного дифференциала эллиптической кривой (кривой рода 1), поэтому радиус r может быть приведен к функции Вейерштрасса, если точно известны корни полинома $P_1(x)$ [3]. Полярный угол ϕ также определяется эллиптическим интегралом.

Оценим точную волновую функцию в степенном приближении. Возможны два подслучая:
либо $l \in \mathbb{N}, \; k + l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \psi_{ex} &= e^{\mathrm{i}l\phi} r^l, \; r \ll a, \\ \psi_{ex} &= e^{\mathrm{i}l\phi} e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon\frac{r^2}{4a^2}} r^{3l+2k-2}, \; r \gg a, \end{aligned} \tag{7}$$

либо $-l \in \mathbb{N}, \; k + 2l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \psi_{ex} &= e^{\mathrm{i}l\phi} r^{-l}, \; r \ll a, \\ \psi_{ex} &= e^{\mathrm{i}l\phi} e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon\frac{r^2}{4a^2}} r^{3l+2k-2}, \; r \gg a. \end{aligned} \tag{8}$$

Тот факт, что степенной вклад в точную и квазиклассическую функции на больших расстояниях совпадает, является нетривиальным, поскольку величина этого вклада в точную волновую функцию определяется условием полиномиальности на биконфлюэнтную функцию Гойна [4, 5], входящую как множитель в волновую функцию (подробно см. далее пример вычисления асимптотик волновых функций, а также [1]). Напомним, что это условие означает принадлежность волновой функции к дискретному спектру.

Вычисляя квазиклассическую волновую функцию в степенном приближении, получаем, что $\psi_{ex} = \psi_{qc}$ попарно в каждом случае. Точность степенного приближения для волновых функций $\psi_{ex}, \; \psi_{qc}$ в этом случае равна

$$O\left(\frac{r}{a}\right)^2, \; r \ll a, \quad O\left(\frac{a}{r}\right)^2, \; r \ll a. \tag{9}$$

Процедура вычислений точной и квазиклассической волновых функций в степенном приближении, а также оценка точности приближения будут представлены в примере после рассмотрения иррационального случая.

Иррациональный случай. Потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} A_\phi &= -\frac{c\hbar}{e}\, k\frac{a}{r\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad A_r = 0, \\ u &= \frac{\hbar^2}{8ma^2}\left(\frac{3a^4}{(r^2 + a^2)^2} - \epsilon\frac{a^2}{r^2 + a^2}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Решая уравнения движения с гамильтонианом (2) с потенциалами (10), получаем искомую динамику заряженной частицы

$$\frac{t-t_0}{\tau} = \int\limits_{\xi_l}^{\xi} (2x+1)^3 \frac{dx}{y}, \quad r = 2a\sqrt{\xi(\xi+1)},$$
$$\phi - \phi_0 = \int\limits_{\xi_l}^{\xi} \frac{(2lx+l+k)(2x+1)^2}{2x(x+1)} \frac{dx}{y}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} y^2 = P_2(x),\ P_2(x) = 64\lambda x^6 + 192\lambda x^5 + \\ + (-16l^2 + 224\lambda + 4\epsilon)x^4 + \\ + (128\lambda - 32l^2 - 16kl + 8\epsilon)x^3 + \\ + (5\epsilon - 3 - 24kl - 24l^2 + 36\lambda - 4k^2)x^2 + \\ + (-12kl - 4k^2 + 4\lambda - 3 - 8l^2 + \epsilon)x - (k+l)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Один из способов обращения таких интегралов изучался, например, в работе [6] (см. также цитируемые там работы).

Классически доступные области в этом случае:

$$0 < \xi_l \le \xi \le \xi_r, \quad P_2(\xi_l) = P_2(\xi_r) = 0,\ P_2(\xi) \ge 0$$

или

$$\xi_l \le \xi \le \xi_r < -1, \quad P_2(\xi_l) = P_2(\xi_r) = 0,\ P_2(\xi) \ge 0,$$

если существует соответствующая пара ξ_l, ξ_r корней полинома $P_2(\xi)$.

Используем обозначения $\lambda = -\chi^2$, $\chi < 0$, тогда точные волновые функции в степенном приближении имеют вид

$$\psi_{ex} = e^{\mathrm{i}l\phi} r^{k+l},\ r \ll a,$$
$$\psi_{ex} = e^{\mathrm{i}l\phi} e^{\chi \frac{r}{a}} r^{-\frac{1}{2}},\ r \gg a. \tag{13}$$

При этом либо

$$-k \in \mathbb{N},\ k+l \in \mathbb{N},$$

либо

$$-l \in \mathbb{N},\ k+l > 0.$$

Получаем, что и теперь $\psi_{ex} = \psi_{qc}$ попарно в каждом случае.

Точность степенного приближения для волновых функций ψ_{ex}, ψ_{qc} равна

$$O\Big(\frac{r}{a}\Big),\ r \ll a, \quad O\Big(\frac{a}{r}\Big),\ r \ll a,$$

В качестве примера вычислений точной и квазиклассической волновых функций рассмотрим рациональный случай при $l \in \mathbb{N}$: точная волновая функция (формулы (4), (5) в [1]) выражается через биконфлюэнтную функцию Гойна, являющуюся в случае дискретного спектра полиномом, который далее обозначим $Q_n(x)$:

$$\psi_{exact} = e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon \frac{r^2}{4a^2}} r^l e^{\mathrm{i}l\phi} \times$$
$$\times \operatorname{HeunB}\left(l, \epsilon, 3l+2k, -\epsilon l - \lambda, \tfrac{r^2}{2a^2}\right) \Rightarrow \tag{14}$$

$$\psi_{ex} = e^{\mathrm{i}l\phi} r^l,\ r \ll a, \tag{15}$$

$$\psi_{ex} = e^{\mathrm{i}l\phi} e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon \frac{r^2}{4a^2}} r^{l+2n},\ r \gg a. \tag{16}$$

При выводе формул (15), (16) мы пользовались следующими свойствами биконфлюэнтной функции Гойна в том случае, когда она является полиномом:

$$\operatorname{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = Q_n(x), \quad n = \deg(Q_n(x)) \Rightarrow$$
$$\gamma - \alpha = 2(n+1), \quad Q_n(0) \ne 0. \tag{17}$$

Первое условие общеизвестно [4, 5] (см. также формулу (23) из [1]). Второе условие может быть выведено из реккурентных соотношений на полином $Q_n(x)$ [4] (формулы (20), (21) из [1]) при данных значениях параметров k, l. Подставляя $\alpha = l$, $\gamma = 3l + 2k$ из (14) в первое условие (17), получаем $k + l = n + 1$. Подставляя $n = k + l - 1$ в (16), получаем

$$\psi_{ex} = e^{\mathrm{i}l\phi} e^{-\frac{r^4}{8a^4}} e^{-\epsilon \frac{r^2}{4a^2}} r^{3l+2k-2},\ r \gg a, \tag{18}$$

тогда оценки асимптотик (15) и (18) совпадают с оценками (7). Также из формулы для n следует условие $k + l \in \mathbb{N}$.

Поскольку $Q_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} q_m x^m$, $q_0 = Q_n(0) \ne 0$, $q_n \ne 0$, имеем $\frac{\psi^{(1)}}{\psi} = 1 + \frac{q_1}{q_0}\frac{r^2}{2a^2}$, $r \ll a$, а значит, точность степенного приближения функции ψ_{ex} при $r \ll a$ равна $O\left(\frac{r}{a}\right)^2$.

Аналогично,

$$\frac{\psi^{(1)}}{\psi} = 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\frac{2a^2}{r^2},\ r \gg a,$$

а значит, точность степенного приближения функции ψ_{ex} при $r \gg a$ равна $O\left(\frac{a}{r}\right)^2$.

Вычислим теперь квазиклассическую функцию (4), для чего необходимо найти функцию Гамильтона–Якоби. Выразим импульс p_r из уравнения для гамильтониана (2), разложив его по степеням r. Знак p_r должен быть определен из условия регулярности волновой функции при $r \ll a$. Вычислив интеграл $\int p_r\,dr$, подставляя результат в выражение (3), получаем

$$S = \hbar l\phi - \mathrm{i}\hbar l \log\left(\frac{r}{a}\right) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} s_m \left(\frac{r^2}{a^2}\right)^m \Rightarrow \psi_{qc} = e^{\mathrm{i}l\phi} r^l,\ r \ll a. \tag{19}$$

Точность степенного приближения функции ψ_{qc} при $r \ll a$ равна $O\left(\frac{r}{a}\right)^2$, поскольку последний член в функции Гамильтона–Якоби (19) является рядом по степеням $\frac{r^2}{a^2}$, а следующее приближение волновой функции ψ_{qc} определяется обрывом этого ряда при соответствующем m. Например, в случае вычисления функции ψ_{qc} ряд заменяется на константу s_0, а в случае $\psi_{qc}^{(1)}$ на полином $s_0 + s_1\frac{r^2}{a^2}$.

Вычисления в случае $r \gg a$ аналогичны предыдущему случаю, за исключением того, что выражение для импульса p_r необходимо раскладывать по степеням $\frac{1}{r}$. Получаем

$$\psi_{qc} = e^{\mathrm{i}l\phi}e^{-\frac{r^4}{8a^4}}e^{-\epsilon\frac{r^2}{4a^2}}r^{3l+2k-2}, \; r \gg a. \qquad (20)$$

Аналогично случаю $r \ll a$, функция Гамильтона–Якоби раскладывается при $r \gg a$ по степеням $\frac{a^2}{r^2}$, следовательно точность степенного приближения для функции ψ_{qc} будет равна $O\left(\frac{a}{r}\right)^2$.

Сравнение формул (15) и (19), а также (18) и (20) попарно, доказывает формулу $\psi_{ex} = \psi_{qc}$ в данном случае. Вычисленные точности степенного приближения соответствуют формуле (9). Остальные случаи рассматривают аналогично. Напомним, что условия на параметры k и l определяются свойствами точной волновой функции.

Итак, были проинтегрированы две классические задачи движения заряженной частицы в двумерии, в электромагнитных полях, выбранных из двух двумерных квази-точнорешаемых квантовомеханических задач. Такой выбор позволил проинтегрировать классические задачи в терминах эллиптических (гиперэллиптических) интегралов.

Возникает естественный вопрос – корректно ли рассматривать задачу классической механики, в которой потенциалы зависят от постоянной Планка? Ответ заключается в том, что постоянная Планка здесь используется для определения размерных величин. Как было показано, динамика частиц определяется только параметрами длины a и времени τ. Например, если $a = 10^{-2}$ см, что соответствует 10^6 межатомных расстояний, при этом $\tau = 10^{-4}$ с, что вполне соответствует классическим размерам и временам.

Кроме того, квазиклассическое приближение во втором приближении в этих случаях хорошо приближает точное решение. Вычисления были проведены в классически недоступных областях, лежащих либо очень близко, либо очень далеко от начала координат. Более того, точная и квазиклассическая функции в степенном приближении совпадают во всех случаях: $\psi_{ex} = \psi_{qc}$ попарно в каждом случае. Было бы интересно провести вычисления и в других возможных областях, однако поскольку функция Гамильтона–Якоби выражается в терминах эллиптических (гиперэллиптических интегралов), такое вычисление можно проделать только численно.

Интересным является тот факт, что в рассмотренных примерах квазиклассическая волновая функция выражается через эллиптические (гиперэллиптические интегралы), в то время как точная волновая функция определяется биконфлюэнтной (конфлюэнтной) функцией Гойна [1]. Все функции Гойна и их свойства представлены в книге [4].

Было бы интересно проанализировать классическую динамику для одномерных систем, в которых потенциал совпадает с соответствующим потенциалом в одномерной задаче квантовой механики, относящейся к квази-точнорешаемым примерам (см., например [7]).

Рациональный пример можно обобщить на другие полиномиальные электромагнитные потенциалы, однако, динамика частицы в этом случае принадлежит алгебраической кривой рода > 1. Пока непонятно, как можно обобщить иррациональный случай. Однако, по-видимому, в обоих рассмотренных случаях алгебраическая кривая имеет минимальный возможный род.

Работа выполнена при поддержке РНФ грант # 16-11-10349.

1. V. G. Marikhin, Письма в ЖЭТФ **103**(7), 552 (2016).
2. В. Г. Марихин, Теор. Мат. Физ. **177**(1), 83 (2013).
3. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М. (1970).
4. *Heun's Differential Equations*, ed. by A. Ronveaux, Oxford Univ. Press, N.Y. (1995).
5. P. P. Fiziev, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 035203 (2010).
6. A. Bogatyrev, J. Approx. Theory **191**, 38 (2015); arXiv:1312.0445.
7. A. V. Turbiner, Phys. Rep. **642**, 1 (2016).