Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 9, с. 591 – 596 © 2017 г. 10 ноября

Химерные состояния в ансамбле линейно локально связанных бистабильных автогенераторов

Д. С. Щапин[+1)], *А. С. Дмитричев*[+], *В. И. Некоркин*[+*]

[+]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия*

[*]*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 24 июля 2017 г.
После переработки 14 сентября 2017 г.

В статье проведено исследование химерных состояний в системе с локальными линейными связями. Система представляет собой кольцевой ансамбль аналоговых бистабильных автогенераторов с резистивной связью. Показано, что существование химерных состояний не связано с неидентичностью автогенераторов и шумами, всегда присутствующими в реальных экспериментах, а связано с нелинейной динамикой системы, происходящей на инвариантных торах различной размерности.

DOI: 10.7868/S0370274X17210135

Введение. Одной из актуальных задач современной нелинейной физики является исследование механизмов и условий формирования в осцилляторных сетях (средах) состояний с когерентным и некогерентным поведением. Такие состояния были впервые обнаружены в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау [1, 2], их активное исследование началось с работы [3]. Позднее они получили, общепринятое в настоящее время, название химерных [4]. К настоящему времени опубликовано большое число теоретических работ, посвященных изучению химерных состояний [5–17]. Значительный прогресс в последние годы достигнут также в области их экспериментального изучения. Продемонстрирована возможность образования химерных состояний в механических [18–21], оптических [22, 23], химических [24–29] и радиотехнических [30, 31] системах.

Однако, несмотря на эти успехи, связь между химерными состояниями и движениями в фазовом пространстве до сих пор не установлена, т.е. не найден образ в фазовом пространстве таких состояний. Наша работа является первой, в которой такое соответствие установлено. Заметим, что в свое время подобные проблемы возникали для периодических автоколебательных и хаотических состояний. Лишь решив их, удалось построить теорию периодических и хаотических автоколебаний.

Кроме того, до сих пор является общепринятой точка зрения, что химерные состояния возникают в сетях, имеющих сложную структуру связей, которая разрушает симметрию, вызванную идентичностью элементов сети. Это либо сети, в которых каждый осциллятор связан с некоторым числом (как правило большим) других осцилляторов [2–4, 6, 8, 9, 11, 13–16, 19, 22, 27, 28, 30], либо сети глобально связанных осцилляторов [1, 10, 26], либо модульные сети с кластерными связями, состоящими из двух и более слабосвязанных подсетей [5, 7, 18, 24], либо сети, взаимодействие в которых происходит с запаздыванием или в присутствии шума [25].

Лишь сравнительно недавно химерные состояния были обнаружены в системах с локальной структурой связей [12, 17, 20, 21]. Однако, сами связи в этих системах являются сложными, например, нелинейными или включают сразу несколько переменных (компонент).

В нашей статье мы впервые приводим простую экспериментальную систему, демонстрирующую формирование различных амплитудно-фазовых [9] и амплитудных [11] химерных состояний, элементы которой имеют между собой локальную линейную связь по одной переменной. Мы покажем, что полученные химерные состояния не являются переходными, а отвечают различным аттракторам системы.

Экспериментальная система. Рассмотрим динамику кольцевого ансамбля аналоговых автогенераторов, связанных резистивной связью (рис. 1). Каждый генератор представляет собой колебательный контур, который имеет емкость C, индуктивность L, сопротивление R и нелинейность $F(U)$, вольт-амперная характеристика которой приведена на рис. 2.

1)e-mail: gogy@neuron.appl.sci-nnov.ru

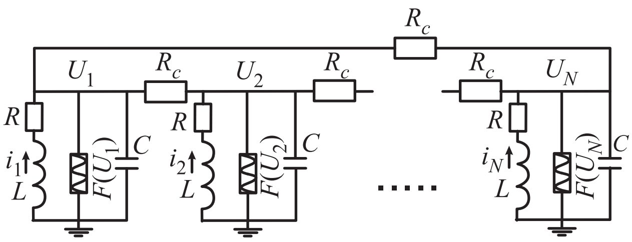

Рис. 1. Схема кольцевого ансамбля резистивно связанных автогенераторов

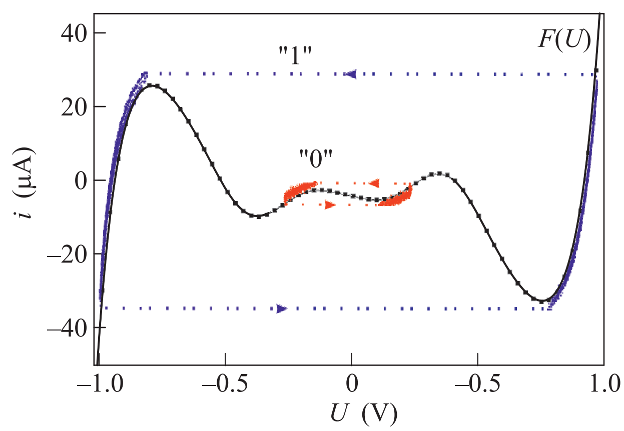

Рис. 2. (Цветной онлайн) Фазовая плоскость бистабильного автогенератора

Если генераторы не взаимодействуют $R_c = \infty$, то динамика каждого из них описывается уравнениями второго порядка. Экспериментально был получен фазовый портрет для одного генератора (см. рис. 2). На фазовой плоскости (U, i) существуют два устойчивых предельных цикла “малой” (“0”) и “большой” (“1”) амплитуды соответственно, разделенных неустойчивым предельным циклом. Стрелками указаны направления движения изображающей точки на циклах. В начале координат ($U = 0$ В, $i = 0$ мкА) находится неустойчивое состояние равновесия, поэтому при включении питания генератора возникает режим малых колебаний. Для того чтобы получить режим больших колебаний нужно взять начальные условия за неустойчивым циклом, например, $|U| > 0.5$ В или $|i| > 10$ мкА. Устанавливающиеся при этом низко- и высокоамплитудные периодические колебания имеют собственными частоты $\omega_0 = 47.65$ Гц и $\omega_1 = 21.47$ Гц соответственно. Далее мы покажем, что такая бистабильность приводит к формированию в кольцевой системе связанных генераторов инвариантных торов, движения на которых отвечают химерным состояниям. Заметим, что химерные состояния в системах из бистабильных элементов были обнаружены и ранее в работах [16, 20, 21].

Экспериментально был исследован ансамбль из семи таких генераторов, число которых выбрано из следующих соображений. Во-первых, элементов в системе должно быть больше двух, поскольку только тогда можно говорить о когерентных и не когерентных группах. Кроме того, число элементов в системе должно быть больше трех, поскольку только в этом случае можно действительно говорить о локальной связи. Оказалось, что такая система позволяет формировать целый набор различных амплитудно-фазовых и амплитудных химерных режимов. Пример одного из таких режимов показан на рис. 3, где по вертикальной оси отложен номер генератора, по горизонтальной – время, а цветом указано значение соответствующего выходного напряжения $U_j, j = 1, ..., 7$. Начальные условия в генераторах были выбраны соответственно последовательности “1000110” рядом с малым (0) и большим (1) циклами, а затем включалась связь между элементами. Результаты эксперимента показывают, что напряжения U_5 и U_6 меняются синфазно и образуют в ансамбле синхронный когерентный кластер, остальные генераторы образуют некогерентный кластер, т.е. не образуют синхронных групп между собой и элементами 5 и 6. Данный вывод подтверждается и расчетом частот колебаний соответствующих элементов. Именно для данного режима было получено пять различных усредненных частот: генераторы 5 и 6 имели одинаковые частоты $\langle\omega_6\rangle = \langle\omega_5\rangle = 23.28$ Гц, а остальные – отличные от них частоты $\langle\omega_1\rangle = 23.82$ Гц, $\langle\omega_2\rangle = 48.21$ Гц, $\langle\omega_3\rangle = 49.95$ Гц, $\langle\omega_4\rangle = 47.48$ Гц, $\langle\omega_7\rangle = 43.48$ Гц. Устойчивость этого и других химерных режимов подтверждена их экспериментальным наблюдением в течении суток (10^6 периодов). Далее мы покажем, что эти режимы отвечают устойчивым аттракторам.

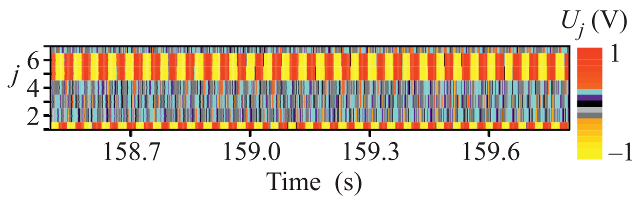

Рис. 3. (Цветной онлайн) Пространственно-временная диаграмма амплитудно-фазового химерного режима, наблюдаемого в ансамбле при $R_c = 560$ кОм

Частоты и фазы колебаний автогенераторов рассчитываем следующим образом. Для определенности рассмотрим j-ый автогенератор. Введем последовательность $\{t_j^n\}$ моментов времени, когда значение выходного напряжения генератора U_j увеличивается и пересекает линию $U_j = 0$, т.е.

$$t_j^n = \{t : U_j(t) = 0, i_j(t) > 0\}.$$

Тогда фазу колебаний i-го генератора в момент времени t можно найти следующим образом:

$$\phi_j = 2\pi\omega_j^n(t - t_j^n) \text{ для } t \in [t_j^n, t_j^{n+1}], \qquad (1)$$

а $\omega_j^n = \frac{1}{t_j^n - t_j^{n-1}}$ будет определять мгновенную частоту колебаний. Отметим, что такое определение фазы имеет смысл только, если w_j^n постоянны или достаточно близки друг к другу. В первом случае мы имеем дело с регулярными колебаниями автогенератора и фаза все время будет меняться с одинаковой скоростью. Во втором случае колебания автогенератора могут быть, в том числе, нерегулярными, и фаза будет зависеть от времени кусочно-линейно. Кроме того, нужно сказать, что введенная в (1) фаза описывает динамику лишь индивидуального автогенератора в отрыве от остальной системы. Поэтому для описания динамики системы как целого удобнее использовать величину $\varphi_j^k = \phi_j - \phi_k$, которая описывает фазу колебаний j-го автогенератора относительно колебаний опорного k-го автогенератора. Если φ_j^k не меняется со временем, то говорят, что имеет место фазовая синхронизация колебаний j-го и k-го автогенераторов. В общем случае при взаимодействии автогенераторов между собой мгновенные частоты не остаются постоянными, поэтому здесь и далее значения частот вычисляем усреднением по достаточно длинному временному ряду (более $2 \cdot 10^4$ периодов): $\langle\omega_j\rangle = \frac{1}{n}\Sigma_n\omega_j^n$.

Для проверки грубости рассматриваемого динамического режима экспериментально была построена одна параметрическая зависимость средних частот от величины резистора связи R_c (рис. 4). Представленные на этом рисунке результаты показывают, что существует интервал значений, где генераторы демонстрируют режимы с различными наборами средних частот. Такие режимы называют амплитудно-фазовыми химерами. Однако, начиная со значения $R_c = 220$ кОм, генераторы переходят в полностью синхронный режим, т.е. у всех средние частоты становятся одинаковыми. При этом амплитуды остаются различными, следовательно в ансамбле появляется другое химерное состояние, соответствующее так называемой амплитудной химере. При дальнейшем увеличении проводимости связи (начиная с $R_c = 150$ кОм) амплитуды всех генераторов становятся "большими", т.е. помимо частот у генера-

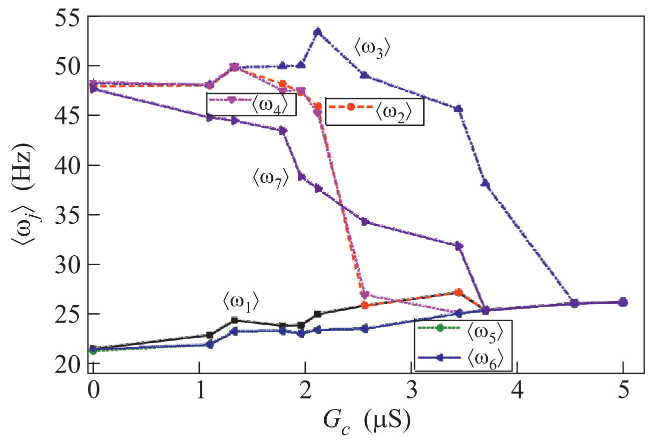

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость средних частот генераторов от проводимости $G_c = 1/R_c$

торов становятся также одинаковые амплитуды колебаний.

Так как рассматриваемые автогенераторы не являются абсолютно идентичными (имеют изначально небольшой разброс собственных частот порядка 0.15 Гц) и подвержены воздействию шумов, то возникает вопрос – не являются ли химерные режимы следствием отмеченных эффектов. Для ответа на этот вопрос мы провели численное исследование динамики соответствующей математической модели в случае идентичных автогенераторов.

Теоретическая модель. Для построения модели ансамбля из N автогенераторов, приведенного на рис. 1, мы аппроксимировали экспериментальную вольт-амперную характеристику $F(U)$ полиномом седьмого порядка вида $F(U) = \alpha U(U \pm u_a)(U \pm \pm u_b)(U \pm u_c)$. Тогда, записывая уравнения Кирхгофа получим систему вида

$$C\frac{dU_j}{d\tau} = -F(U_j) - i_j + \frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{R_c},$$
$$L\frac{di_j}{d\tau} = U_j - Ri_j, j = 1, 2, \ldots N \qquad (2)$$

с периодическими граничными условиями $j - 1 = N$ для первого элемента, и $j + 1 = 1$ для последнего элемента.

Для удобства введем новые переменные и параметры $t = \frac{R_0}{L}\tau$, $v_j = \frac{i_j}{i_0}$, $u_j = \frac{U_j}{u_0}$, $\varepsilon = \frac{R_0^2 C}{L}$, $R_0 = \frac{u_0}{i_0}$, $\gamma = \frac{R}{R_0}$, $\alpha u_0^6 R_0 = 1$, $d = \frac{R_0}{R_c}$ и получим эту же систему уже в безразмерных величинах:

$$\varepsilon\frac{du_j}{dt} = f(u_j) - v_j + d(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}),$$
$$\frac{dv_j}{dt} = u_j - \gamma v_j, j = 1, 2, \ldots N, \qquad (3)$$

где функция $f(u) = -F(\frac{U}{u_0}) = -u(u \pm a)(u \pm b)(u \pm c)$, $a = \frac{u_a}{u_0}$, $b = \frac{u_b}{u_0}$, $c = \frac{u_c}{u_0}$, $u_0 = 1$ В, $R_0 = 1$ Ом.

Далее мы также рассмотрим ансамбль из семи элементов. Зафиксируем параметры следующим образом: $a = 0.32$, $b = 0.79$, $c = 1.166$, $\varepsilon = 0.001$, $\gamma = 0$, и исследуем закономерности смены режимов этой системы при изменении силы связи между элементами d. При всех значениях параметра d, как и ранее, начальные условия мы выбираем соответственно последовательности "1000110". На рис. 5 и 6 приведены, соответственно, зависимости средних частот и относительных фаз колебаний элементов ансамбля. При $d = 0$ в ансамбле, естественно, наблюдаются лишь две различных частоты, т.е. имеется два частотных кластера, состоящих из 4-х элементов с низко-амплитудными и 3-х элементов с высокоамплитудными колебаниями. При увеличении силы связи частоты колебаний элементов, из-за их взаимодействия друг с другом, начинают меняться и, соответственно, меняется количество и размер частотных кластеров. До значения $d = 0.01375$ в ансамбле наблюдаются режимы с 6-ю различными частотами. В этих режимах, как и в случае реальной системы, 5-й и 6-й элементы демонстрируют синфазные колебания (см. рис. 6), т.е. образуют в ансамбле синхронный (когерентный) кластер. Все остальные элементы из-за несоизмеримости частот не образуют синхронных групп ни между собой, ни с 5-м, ни, соответственно, с 6-м элементами, т.е. образуют в ансамбле некогерентный кластер. При этом относительные фазы этих элементов оказываются случайно распределенными на интервале от $-\pi$ до π. Таким образом, эти режимы являются примерами амплитудно-фазовых химер. При дальнейшем увеличение d происходит укрупнение когерентного кластера. Сначала синхронизуются 1-й и 7-й элементы, непосредственно примыкающие к исходному когерентному кластеру. Затем при $d > 0.0149$ синхронизуются 4-й и 5-й элементы. Наконец при $d > 0.0194$ синхронизуется 3-й элемент, и в ансамбле остается только когерентный кластер.

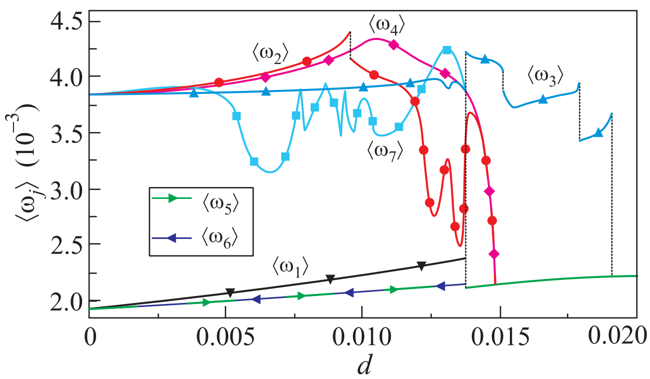

Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимости средних частот колебаний элементов системы (3) от параметра d

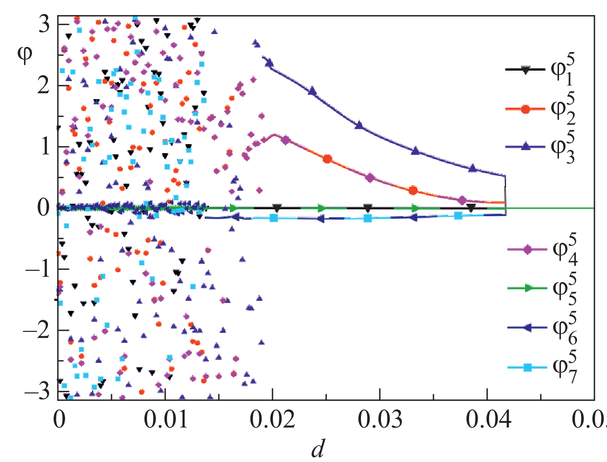

Рис. 6. (Цветной онлайн) Зависимости относительных фаз колебаний от параметра d

На рис. 7 приведены зависимости средних "амплитуд" колебаний генераторов. Для их вычисления производилось усреднение ($\langle a_j \rangle = \frac{1}{n}\Sigma_n a_j^n$) по достаточно длинному временно́му ряду мгновенных амплитуд $a_j^n = \{v_j(t) : u_j(t) = 0, v_j(t) > 0\}$. Из рис. 7 следует, что при $d > 0.194$ одинаковыми становятся лишь частоты колебаний отдельных генераторов, а амплитуды и фазы колебаний остаются различными, формируя при этом 4 амплитудно-фазовых кластера. Такие режимы называют амплитудными химерами. Они наблюдаются вплоть до значения параметра $d = 0.43$, при превышении которого в системе

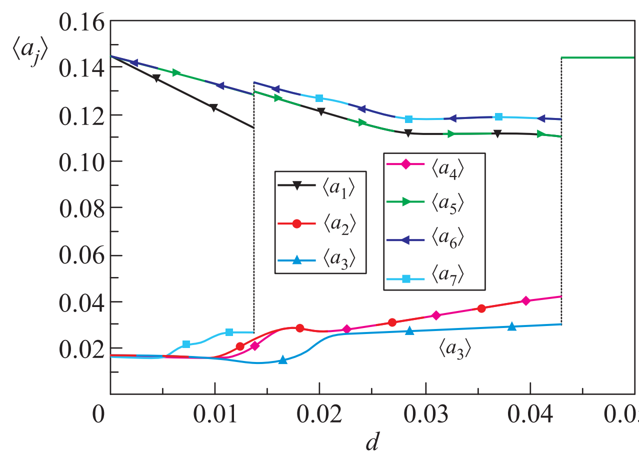

Рис. 7. (Цветной онлайн) Зависимости средних амплитуд колебаний от параметра d

устанавливается режим однородных синфазных колебаний.

На рис. 8 представлены зависимости семи старших характеристических показателей Ляпунова для

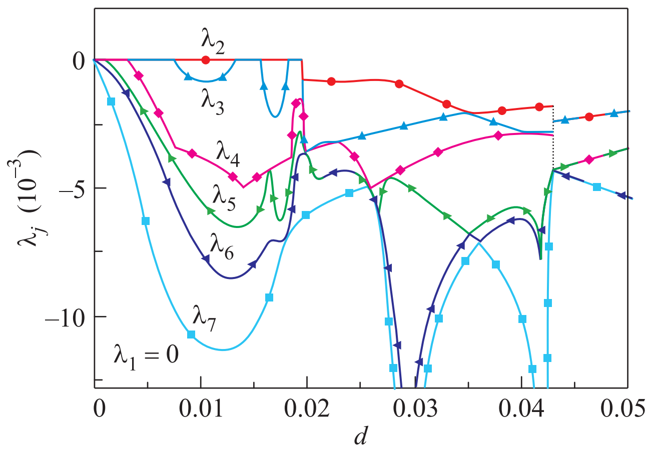

Рис. 8. (Цветной онлайн) Зависимости показателей Ляпунова от параметра d

траекторий, отвечающих режимам представленным на рисунках 5–7. Показатели рассчитывали методом Бенетина с периодической ортогонализацией Грама–Шмидта [32].

Амплитудно-фазовые химеры – мы установили, что такие химерные состояния формируются движениями, происходящими в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{14}$ на инвариантных торах различной размерности (два и более старших Ляпуновских показателя равны нулю). Размерность тора зависит от контрольного параметра d. Именно: при $d \leq 0.0011$ размерность тора равна 5, $d \leq 0.0032$ – 4, $d \in (0.0032, 0.0075] \bigcup (0.0131, 0.0156] \bigcup (0.0182, 0.0194]$ – 3 и при $d \in (0.0075, 0.0131] \bigcup (0.0156, 0.0182]$ размерность тора – 2. Как известно, движения на торе являются квазипериодическими и характеризуются набором несоизмеримых частот (их отношение иррационально), число которых определяется размерностью тора. Таким образом, когерентная и некогерентная части амплитудно-фазовых химер состоят из элементов, для которых компоненты движений имеют, соответственно, одинаковые и различные средние частоты и амплитуды.

Амплитудные химеры – мы установили, что такие химерные состояния наблюдаются в области параметров, где один старший показатель Ляпунова равен нулю, т.е. эти режимы отвечают периодическим движениям системы (3).

Кроме приведенных в статье, нами были получены и другие химерные состояния, которые реализуются при иных начальных условиях. Это свидетельствует о мультистабильности химерных состояний в системе. Кроме того, мы численно получили различные химерные состояния и в большой системе из $N = 1000$ элементов (рис. 9), что свидетельствует

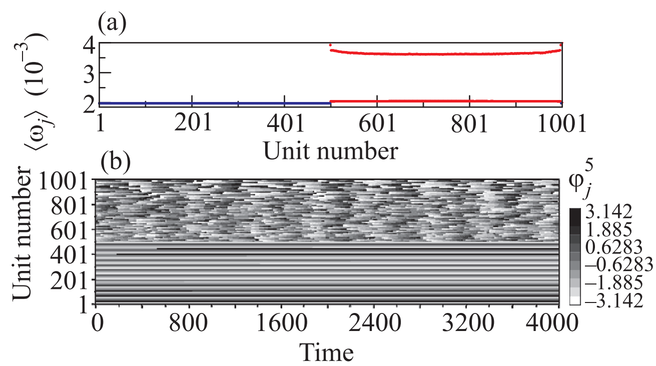

Рис. 9. (Цветной онлайн) Пример химерного режима в ансамбле из 1000 элементов. (a) – Средние частоты элементов, элементы $N = 1, \ldots, 500$ имеют одинаковые средние частоты (синий цвет), а элементы $N = 501, .., 1001$ все имеют различные средние частоты (красный цвет). (b) – Изменение фаз элементов от времени

о том, что существование таких состояний не связано с ее малыми размерами. Наоборот, увеличение размера приводит к увеличению числа наблюдаемых химерных состояний.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 14-12-01358).

1. V. I. Nekorkin, M. L. Voronin, and M. G. Velarde, Eur. Phys. J. B **9**, 533 (1999)
2. Y. Kuramoto, in *Nonlinear Dynamics and Chaos: Where do we go from here?* ed. by J. Hogan et al., IOP (2003), Ch. 9, p. 209
3. Y. Kuramoto and D. Battogtokh, Nonlinear Phenom. Complex Syst. **5**, 380 (2002).
4. D. M. Abrams and S. H. Strogatz, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).
5. D. M. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, and D. A. Wiley, Phys. Rev. Lett. **101**, 084103 (2008).
6. G. Bordyugov, A. Pikovsky, and M. Rosenblum, Phys. Rev. E **82**, 035205 (2010).
7. E. A. Martens, Phys. Rev. E **82**, 016216 (2010).
8. I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, and E. Schöll, Phys. Rev. Lett. **106**, 234102 (2011).
9. G. C. Sethia, A. Sen, and G. L. Johnston, Phys. Rev. E **88**, 042917 (2013)
10. A. Yeldesbay, A. Pikovsky, and M. Rosenblum, Phys. Rev. Lett. **112**, 144103 (2014).

11. A. Zakharova, M. Kapeller, and E. Schöll, Phys. Rev. Lett. **112**, 154101 (2014).
12. C. R. Laing, Phys. Rev. E **92**, 050904(R) (2015).
13. S. A. M. Loos, J. C. Claussen, E. Schöll, and A. Zakharova, Phys. Rev. E **93**, 012209 (2016).
14. N. Semenova, A. Zakharova, V. Anishchenko, and E. Schöll, Phys. Rev. Lett. **117**, 014102 (2016).
15. N. I. Semenova, G. I. Strelkova, V. S. Anishchenko, and A. Zakharova, Chaos **27**, 061102 (2017).
16. I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova, A. V. Bukh, G. I. Strelkova, and V. S. Anishchenko, Phys. Lett. A **381**, 1398 (2017).
17. Y. Maistrenko, S. Brezetsky, P. Jaros, R. Levchenko, and T. Kapitaniak, Phys. Rev. E **95**, 010203(R) (2017).
18. E. A. Martens, S. Thutupallic, A. Fourrierec, and O. Hallatschek, PNAS **110**, 10563 (2013).
19. T. Kapitaniak, P. Kuzma, J. Wojewoda, K. Czolczynski, and Y. Maistrenko, Sci. Rep. **4**, 6379 (2014).
20. J. Wojewoda, K. Czolczynski, Y. Maistrenko, and T. Kapitaniak, Sci. Rep. **6**, 34329 (2016).
21. D. Dudkowski, J. Grabski, J. Wojewoda, P. Perlikowskii, Y. Maistrenko, and T. Kapitaniak, Sci. Rep. **6**, 29833 (2016).
22. A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hovel, I. Omelchenko, and E. Schöll, Nature Phys. **8**, 658 (2012).
23. L. Larger, B. Penkovsky, and Y. Maistrenko, Nature Commun. **6**, 7752 (2015).
24. M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter, Nature Phys. **8**, 662 (2012).
25. E. Schöll, Europ. Phys. J. Special Topics **225**, 891 (2016).
26. L. Schmidt, K. Schönleber, K. Krischer, and V. Garcia-Morales, Chaos **24**, 013102 (2014).
27. M. Wickramasinghe and I. Z. Kiss, PLOS ONE **8**, e80586 (2013).
28. M. Wickramasinghe and I. Z. Kiss, Phys. Chem. Chem. Phys. **16**, 18360 (2014).
29. A. G. Smart, Phys. Today **65**, 17 (2012).
30. L. Larger, B. Penkovsky, and Y. Maistrenko, Phys. Rev. Lett. **111** 054103 (2013).
31. L. V. Gambuzza, A. Buscarino, S. Chessari, L. Fortuna, R. Meucci, and M. Frasca, Phys. Rev. E **90**, 032905 (2014).
32. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J. M. Strelcyn, Comptes-Rendues Acad. Sc. Paris A **286**, 431 (1978).