Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 10, с. 633 – 636

Крупномасштабное течение в двумерной турбулентности при статической накачке

И. В. Колоколов[1]), *В. В. Лебедев*

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Национальный исследовательский университет, Высшая Школа Экономики, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 сентября 2017 г.

После переработки 16 октября 2017 г.

Двумерная турбулентность имеет замечательную тенденцию к самоорганизации в крупномасштабные когерентные структуры благодаря обратному каскаду. В настоящей работе мы исследуем случай стационарной накачки, когда возбуждающая сила не зависит от времени, этот случай соответствует организации большинства экспериментов. Мы устанавливаем зависимость крупномасштабного течения от параметров системы и характеристик накачки для неограниченной системы и конечной ячейки.

DOI: 10.7868/S0370274X17220076

Имеется существенная разница между двумерной и трехмерной турбулентностью. В трехмерном случае за счет нелинейности генерируются движения с масштабами меньшими, чем масштаб, на котором возбуждается турбулентность (масштаб накачки). В двумерном же случае нелинейность приводит и к возникновению движений с масштабами, значительно превосходящими масштаб накачки [1–3]. В ряде случаев это приводит к возникновению крупномасштабных когерентных структур [4–6]. В качестве примера можно привести такие атмосферные явления, как циклоны и антициклоны.

Физика возникновения крупномасштабных структур в двумерной турбулентности известна. В то же время все теоретические оценки проводились в рамках модели, где фиксирован поток энергии в большие масштабы, величина которого критична для возникновения когерентных крупномасштабных структур. Данное предположение обосновано для теоретических моделей, где сила, возбуждающая турбулентность, является коротко коррелированной во времени. В то же время в реальном эксперименте, как правило, возбуждающая сила не зависит от времени [5, 7, 8]. Тогда эффективность производства энергии этой силой оказывается зависящей от характеристик крупномасштабного движения и падает с ростом его интенсивности. Таким образом, мощность силы и другие характеристики крупномасштабного движения должны быть найдены в результате самосогласованной процедуры.

Именно эта ситуация анализируется в нашей работе. Мы выражаем характеристики крупномасштабного турбулентного движения через параметры статической возбуждающей силы. Связанный с этим вопрос касается критерия возникновения крупномасштабных когерентных структур. Без понимания ответов на эти вопросы невозможно оценить роль различных факторов в реальных экспериментах и даже простое сравнение результатов теории с экспериментом.

Турбулентность является хаотическим состоянием жидкости или газа, возникающим при больших числах Рейнольдса, Re [9]. В ряде случаев хаотическое течение является эффективно двумерным [10]. Уже первые теоретические работы [1–3], посвященные двумерной турбулентности, выявили ее принципиальное отличие от трехмерной турбулентности. Наличие в двумерной гидродинамике двух квадратичных бездиссипативных интегралов движения (энергии и энстрофии) приводит к возникновению двух каскадов: энстрофия переносится с масштаба накачки l в малые масштабы, в то время как энергия переносится в большие масштабы [11].

Связанный с переносом энергии в большие масштабы обратный каскад исследовался как экспериментально [7, 12], так и численно [13–16]. В этих работах показано хорошее согласие с аналитической теорией. В частности, в обратном каскаде наблюдается нормальный Колмогоровский скейлинг [10]. Теоретические аргументы в пользу нормального скейлинга были приведены в работе [17], где это явление было связано с лидирующей ролью сходящихся Лагранжевых траекторий в обратном каскаде.

1) e-mail: igor.kolokolov@gmail.com

В неограниченной двумерной системе обратный каскад заканчивается на масштабе L_α, который определяется балансом потока энергии ϵ (на единицу массы) в большие масштабы и трением о дно: $L_\alpha = \epsilon^{1/2}\alpha^{-3/2}$, где α – коэффициент трения о дно. Если размер ячейки L меньше L_α, то энергия, которая приносится обратным каскадом на масштабы порядка размеров ячейки L, начинает там накапливаться, что приводит к возникновению интенсивного крупномасштабного движения, включающего большие вихри. Тенденция к появлению вихрей наблюдалась уже в первых работах по двумерной турбулентности – как экспериментальных [12], так и численных [13–15]. В численной работе [4], где использовались периодические граничные условия, было установлено, что в результате обратного каскада в квадратной ячейке возникает стабильная когерентная структура – вихревой диполь. Несколько иная, но также стабильная когерентная вихревая структура возникает в лабораторном эксперименте в квадратной ячейке [5, 18], который с теоретической точки зрения соответствует нулевым граничным условиям для скорости течения на стенках ячейки. Возникновение вихрей в прямоугольной ячейке численно исследовалоно в [19].

В работе [6] приведены результаты численного моделирования двумерной турбулентности в периодическом случае в квадратной ячейке для коротко коррелированной по времени накачки. Средний профиль скорости вихря оказался с хорошей степенью точности изотропным. В той же работе был обнаружен интервал расстояний до центра вихря, где реализуется плоский профиль скорости и были приведены теоретические аргументы в пользу существования такого интервала. В наших работах [20, 21] было показано, что плоский профиль соответствует пассивному режиму турбулентных флуктуаций, а в работе [22] мы нашли корреляционную функцию этих флуктуаций. Однако во всех этих работах использовалась модель накачки, коротко коррелированной по времени. Возникает вопрос о степени универсальности выводов, сделанных на основе такой модели и их применимости к эксперименту.

В настоящей работе мы анализируем случай, когда двумерная турбулентность возбуждается статической (не зависящей от времени) накачкой, которая характеризуется силой $\mathbf{f}(x,y)$ (на единицу массы), приложенной к слою жидкости. Предполагается, что корреляционная длина накачки l много меньше размеров ячейки L. В частности, $f(x,y)$ может быть периодической функцией с периодом l. Этот случай соответствует экспериментальным условиям работ [5–8], где для возбуждения турбулентности использовалась сила Лоренца. Обратный каскад формируется в том случае, когда сила накачки достаточно велика, а именно, должно выполняться условие

$$f \gg l\alpha^2. \tag{1}$$

В дальнейшем мы предполагаем, что неравенство (1) выполняется.

В случае статической накачки поток энергии ϵ должен быть выражен через силу f. В силу Колмогоровской оценки $v_r \sim (\epsilon r)^{1/3}$ характерная скорость турбулентных пульсаций растет с их размером r. Поэтому мелкомасштабные флуктуации переносятся самыми крупномасштабными пульсациями размера L_α со скоростью $V \sim (\epsilon L_\alpha)^{1/3}$. В этом случае удобно перейти в систему отсчета, связанную с крупномасштабным движением, чтобы исключить перенос. В этой системе отсчета накачка становится зависящей от времени, и ее эффективное время корреляции τ равно $\tau = l/V$.

В этом случае производство энергии накачкой оценивается, как $f^2\tau$. Приравнивая эту величину к потоку энергии ϵ, мы находим соотношения

$$V \sim f^{2/3} l^{1/3} \alpha^{-1/3}, \tag{2}$$

$$L_\alpha \sim f^{2/3} l^{1/3} \alpha^{-4/3}, \tag{3}$$

$$\epsilon \sim f^{4/3} l^{2/3} \alpha^{1/3}. \tag{4}$$

Отметим, что поток энергии падает при уменьшении α. Отметим также, что в силу неравенства (1) характерное значение флуктуаций скорости на масштабе накачки $(\epsilon l)^{1/3}$ оказывается гораздо меньше, чем крупномасштабная скорость V.

Приведенные выше соображения справедливы, если эффективное время корреляции накачки τ оказывается много меньше, чем нелинейное время взаимодействия флуктуаций потока на масштабе накачки. Скорость флуктуации может быть оценена как $(\epsilon l)^{1/3}$, поэтому это время оценивается как $\tau_n = \epsilon^{-1/3} l^{2/3} \sim \alpha^{-1/9} l^{4/9} f^{-4/9}$. Используя соотношения (2)–(4), можно проверить, что неравенство $\tau \ll \tau_n$ эквивалентно основному соотношению (1). Таким образом, наша схема оказывается самосогласованной.

При выводе оценок (2)–(4) мы игнорировали диссипацию на масштабе накачки. Данные оценки справедливы, если $\Gamma\tau_n \ll 1$, где Γ – декремент затухания флуктуаций потока на масштабе накачки. Если $\Gamma \sim \alpha$, то неравенство $\Gamma\tau_n \ll 1$ является следствием соотношения (1). Однако вязкий декремент на масштабе накачки $\sim \nu/l^2$ (ν – кинематическая вязкость) может и намного превышать α. Такой режим вряд ли осуществляется в лабораторном эксперименте, однако он может быть легко реализован в численном моделировании. В этом режиме неравенство $\Gamma\tau_n \ll 1$ ведет к дополнительному условию $\nu^9 \ll \alpha f^4 l^{14}$.

Теперь мы переходим к рассмотрению ячейки размером L, удовлетворяющим условию $L \ll L_\alpha$. В этом случае обратный каскад доносит энергию до масштаба порядка размеров ячейки L, где она накапливается до тех пор, пока не будет достигнут баланс между доставкой энергии и ее диссипацией. Такой баланс приводит к формированию крупномасштабного течения, которое характеризуется скоростью $V \gg (\epsilon L)^{1/3}$. Диссипация энергии оценивается как αV^2. В стационарном случае диссипация должна быть равна потоку энергии, $\epsilon \sim \alpha V^2$.

Крупномасштабное течение в конечной ячейке состоит из нескольких мод, сильно взаимодействующих между собой. В этом случае ожидается хаотическое поведение [23], когда крупномасштабное течение оценивается через V. Мы снова переходим в систему отсчета, движущуюся со скоростью крупномасштабного движения. В этой системе отсчета накачка имеет эффективное корреляционное время $\tau = l/V$, и потому производство энергии оценивается как $\epsilon \sim f^2\tau$. Приравнивая эту величину к αV^2, мы получаем те же оценки (2), (4) для крупномасштабной скорости V и потока энергии ϵ. Отметим, что неравенство $L \ll L_\alpha$ эквивалентно условию $V \gg (\epsilon L)^{1/3}$, как и должно быть в рамках нашей схемы.

Теперь мы должны проверить самосогласованность наших оценок. Имеются два случая. В первом случае динамика на масштабе накачки является нелинейной. Применимость нашей схемы означает, что время τ намного меньше, чем нелинейное время $\epsilon^{-1/3}l^{2/3}$. Легко проверить, что неравенство $\tau \ll \epsilon^{-1/3}l^{2/3}$ эквивалентно основному условию (1), как и для неограниченной ячейки.

Второй случай соответствует чрезвычайно сильному крупномасштабному течению, когда $L/V \ll \epsilon^{-1/3}l^{2/3}$. Тогда динамика движений на масштабе накачки является пассивной (квазилинейной). Все наши оценки оправданы и в этом случае, так как время $\tau = l/V$ оказывается много меньше характерного времени флуктуаций потока L/V в силу условия $l \ll L$, которое подразумевается в нашем рассмотрении. В противном случае нет места для обратного каскада.

Наряду с гладким крупномасштабным течением с характерной скоростью V в системе возникают когерентные структуры, представляющие собой большие вихри [4–6]. Следовательно, возникает вопрос о внутренней структуре этих вихрей. Для случая коротко коррелированной во времени накачки проблема была проанализирована в работах [6, 20–22]. Статический случай требует специального рассмотрения, базирующегося на результатах настоящей работы. Данное рассмотрение сейчас проводится, а его итоги будут опубликованы отдельно.

Найденные нами оценки (2)–(4) позволяют теоретически оценить крупномасштабные движения, возникающие в двумерной турбулентности, возбуждаемой статической силой. Оценка (2) показывает, что скорость крупномасштабного движения V растет с увеличением силы f медленнее, чем первая степень f. Такое явление связано с ограничением эффективности накачки при росте скорости V, что приводит к уменьшению времени корреляции накачки в системе отсчета, связанной с крупномасштабным движением. Тот же механизм объясняет отличие показателя 4/3 от двойки в выражении (4) для производимой силой f энергии. Обращаем внимание на то, что в силу самосогласованного характера производства энергии в оценках (2), (4) присутствует коэффициент трения о дно α, который существенен именно для крупномасштабного движения. Выражение (3) для предельного масштаба турбулентных движений в неограниченной системе позволяет сформулировать критерий возникновения когерентных структур (крупномасштабных вихрей) в ячейке размера L, который имеет вид $L < L_\alpha$. В данном случае мы имеем дело с нетривиальной зависимостью от величины возбуждающей силы f.

Работа поддержана грантом РНФ 14-22-00259.

---

1. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
2. C. E. Leith, Phys. Fluids **11**, 671 (1968).
3. G. K. Batchelor, Phys. Fluids **12**, 233 (1969).
4. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **99**, 084501 (2007).
5. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, Phys. Fluids **21**, 125101 (2009).
6. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **113**, 254593 (2014).
7. P. Tabeling, Phys. Rep. **362**, 1 (2002).
8. A. E. Gledzer, E. B. Gledzer, A. A. Khapaev, and O. G. Chkhetiani, ZhETF **140**, 590 (2011) [JETP **113**, 516 (2011)].
9. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, vol. I, MIT Press (1971), vol. II, Diver (2007).
10. G. Boffetta and R. E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).
11. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Prog. Phys. **43**, 547 (1980).

12. J. Sommeria, J. Fluid Mech. **170**, 139 (1986).
13. L. M. Smith and V. Yakhot, Phys. Rev. Lett. **71**, 352 (1993).
14. L. M. Smith and V. Yakhot, J. Fluid Mech. **274**, 115 (1994).
15. V. Borue, Phys. Rev. Lett. **72**, 1475 (1994).
16. G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola, Phys. Rev. E **61**, R29 (2000).
17. G. Falkovich, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 123001 (2009).
18. N. Francois, Y. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats, Phys. Rev. X **4**, 021021 (2014).
19. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, Phys. Rev. Fluids **2**, 032602 (2017).
20. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, Письма в ЖЭТФ **101**, 181 (2015) [JETP Lett. **101**, 164 (2015)].
21. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, Phys. Rev. E **93**, 033104 (2016).
22. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, J. Fluid Mech. **809**, R2-1 (2016).
23. E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear waves, solitons and chaos*, Cambridge UP (2000), ch. 11.