Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 11, с. 689 – 695 © 2017 г. 10 декабря

О топологии ферми-поверхности со спонтанно нарушенной вращательной симметрией

С. С. Панкратов[+*1)], *М. Балдо*[×], *М. В. Зверев*[+*]

[+]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский Институт", 123182 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[×]*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Catania, I-95123 Catania, Italy*

Поступила в редакцию 31 октября 2017 г.

На примере двумерной ферми-системы с квазичастичным взаимодействием $f(\mathbf{p},\mathbf{p}')$, имеющим резкий максимум при $|\mathbf{p}-\mathbf{p}'| = q_0$, изучается взаимосвязь спонтанного нарушения вращательной симметрии системы и изменения топологии ее ферми-поверхности. Показано, что в случае притяжения и $q_0 = 2p_{\rm F}$ первой неустойчивостью при усилении взаимодействия оказывается неустойчивость Померанчука в канале с $L = 2$, которая приводит к переходу второго рода в нематическую фазу. Монте-Карловскими расчетами найдено, что за этим переходом следует цепочка фазовых переходов первого и второго рода с изменением симметрии и топологии ферми-поверхности. В случае отталкивания и малых значений q_0 первым происходит топологический переход в состояние со спонтанно нарушенной вращательной симметрией – рождение $L \simeq \pi(p_{\rm F}/q_0 - 1)$ малых дырочных карманов на расстоянии $p_{\rm F} - q_0$ от центра и деформация внешней ферми-поверхности с мультипольностью L. При $q_0 \to 0$, когда изучаемая модель переходит в двумерную модель Нозьера, мультипольность спонтанной деформации $L \to \infty$, и бесконечно складчатая ферми-линия приобретает хаусдорфову размерность $\mathcal{D} = 2$, что отвечает состоянию с фермионным конденсатом.

DOI: 10.7868/S0370274X17230060

1. В теории ферми-жидкости [1, 2] квазичастицы в однородной и изотропной системе заполняют в импульсном пространстве область, ограниченную вращательно симметричной ферми-поверхностью радиусом $p_{\rm F}$. Система квазичастиц с импульсным распределением $n_{\rm FL}(\mathbf{p}) = \theta(p_{\rm F} - p)$ устойчива, пока любое его изменение $\delta n(\mathbf{p})$ увеличивает энергию системы. Однако при сильном квазичастичном взаимодействии устойчивость ферми-жидкостного распределения $n_{\rm FL}(\mathbf{p})$ может нарушаться. Один из сценариев такого нарушения, впервые рассмотренный Померанчуком [3], заключается в спонтанной деформации ферми-поверхности. Уменьшение энергии системы при анизотропном отклонении $\delta n(\mathbf{p})$ от симметричного ферми-жидкостного распределения становится возможным при нарушении условий устойчивости Померанчука [3]. Возникающее в этом сценарии состояние со спонтанно нарушенной вращательной симметрией в современной литературе называется нематической фазой [4].

Другой сценарий нарушения устойчивости ферми-жидкостного распределения квазичастиц $n_{\rm FL}(\mathbf{p})$ связан с изотропным спонтанным рождением пар квазичастица–квазидырка, меняющим топологию ферми-поверхности, но не нарушающим ее вращательной симметрии. Топологический переход может менять связность ферми-поверхности [5–14] или ее топологическую размерность [15–17]. В результате перехода с изменением связности квазичастичный спектр системы становится немонотонной функцией импульса, неоднократно пересекающей химический потенциал. При переходе, в котором размерность ферми-поверхности становится равной размерности системы, рождается область бездисперсионных квазичастиц – фермионный конденсат [15].

До сих пор в литературе два типа перестройки ферми-поверхности – с нарушением ее вращательной симметрии и с изменением ее топологии – рассматривались как альтернативные друг другу. В этой работе будет продолжен начатый в [18] самосогласованный анализ перестройки основного состояния системы за точкой ферми-жидкостной неустойчивости. Мы включим в рассмотрение оба типа перестроек и увидим, что они могут интерферировать, порождая весьма необычные формы ферми-поверхности.

2. Приступая к анализу взаимосвязи сценариев неустойчивости квазичастичной картины, напомним, что в теории ферми-жидкости энергия системы –

[1)]e-mail: capannelle@yandex.ru

функционал $E[n]$ импульсного распределения квазичастиц $n(\mathbf{p})$, и вариация этого функционала связана с изменением $\delta n(\mathbf{p})$ квазичастичного распределения интегральным соотношением

$$\delta E = \int \varepsilon(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p})\, d\upsilon, \tag{1}$$

где $d\upsilon$ обозначает деленный на $(2\pi)^k$ элемент объема импульсного пространства k-мерной ферми-системы. В этом соотношении $\varepsilon(\mathbf{p}) = \delta E/\delta n(\mathbf{p})$ – квазичастичный спектр, связанный с квазичастичным распределением формулой Ландау–Питаевского [1, 2, 19]

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)\, \frac{\partial n(\mathbf{p}_1)}{\partial \mathbf{p}_1}\, d\upsilon_1. \tag{2}$$

В соотношении (2) квазичастичное взаимодействие $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$, строго говоря, само является функционалом $n(\mathbf{p})$, но в теории ферми-жидкости этой зависимостью пренебрегают, полагая взаимодействие заданной функцией импульсов, или ограничиваются гармониками этой функции на ферми-поверхности. Если квазичастичное взаимодействие зависит только от относительного импульса $\mathbf{p} - \mathbf{p}_1$, то соотношение (2) интегрируется к виду

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \int f(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, n(\mathbf{p}_1)\, d\upsilon_1, \tag{3}$$

который определяет форму функционала энергии

$$\frac{E[n]}{V} = \int \frac{p^2}{2m} n(\mathbf{p}) d\upsilon + \frac{1}{2} \int f(\mathbf{p} - \mathbf{p_1}) n(\mathbf{p}) n(\mathbf{p_1}) d\upsilon d\upsilon_1. \tag{4}$$

Мы рассмотрим модельную двумерную (2D) ферми-систему с квазичастичным взаимодействием

$$f(\mathbf{p} - \mathbf{p_1}) = \frac{\pi}{m} \frac{4\beta p_{\rm F}^2}{q_0^2} \frac{g}{[(\mathbf{p} - \mathbf{p_1})^2/q_0^2 - 1]^2 + \beta^2}, \tag{5}$$

имеющим максимум при $|\mathbf{p} - \mathbf{p_1}| = q_0$, ширина которого определяется параметром β. Выбор этого взаимодействия продиктован, с одной стороны, тем что с параметрами $q_0 = 2p_{\rm F}$, $\beta = 0.14$ и безразмерной константой связи $g < 0$ оно моделирует полученную в микроскопических расчетах [20, 21] функцию квазичастичного взаимодействия в 2D электронном газе при $T = 0$ вблизи квантовой критической точки, где расходится эффективная масса электронных квазичастиц [22–24]. С другой стороны, при $q_0 \to 0$, $\beta \to 0$ и $g > 0$ взаимодействие (5) принимает вид $f(\mathbf{p} - \mathbf{p_1}) = (4\pi^3 p_{\rm F}^2/m) g \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p_1})$, т.е. модель переходит в модель Нозьера [17], в которой при сколь угодно малой константе g происходит фермионная конденсация.

Ферми-жидкость остается устойчивой относительно спонтанной деформации ферми-поверхности с мультипольностью L, пока выполняется условие Померанчука [3] для гармоники f_L. В 2D-системе это условие имеет вид

$$1 + \frac{m^*}{\pi} \frac{f_L}{2} > 0, \tag{6}$$

где эффективная масса m^* выражается через первую гармонику:

$$\frac{m^*}{m} = \left(1 - \frac{m}{\pi} \frac{f_1}{2}\right)^{-1}, \tag{7}$$

а сами L-гармоники вычисляются интегрированием взаимодействия как функции угла ϑ между импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p_1}$, лежащими на ферми-окружности, с $\cos(L\vartheta)$:

$$f_L = \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos(L\theta) \frac{d\vartheta}{2\pi}. \tag{8}$$

3. Для взаимодействия (5) с $q_0 = 2p_{\rm F}$, моделирующего эффективное взаимодействие в 2D электронном газе в модели “желе”, интеграл (8) принимает вид

$$f_L = \frac{\pi\beta g}{m} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(L\vartheta)}{[\sin^2(\vartheta/2) - 1]^2 + \beta^2} \frac{d\vartheta}{2\pi}. \tag{9}$$

Поскольку знаменатель подынтегрального выражения имеет минимум при $\vartheta = \pi$, при $g < 0$ гармоники f_L с нечетным L положительны, а с четным L отрицательны. При $\beta \ll 1$ этот интеграл несложно оценить, перейдя к переменной $x = (\vartheta - \pi)/2\sqrt{\beta}$ и преобразовав (9) к виду

$$f_L \simeq \frac{\pi}{m} \frac{g}{\sqrt{\beta}} \cos L\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - 2\beta L^2 x^2}{x^4 + 1 - 2\beta x^6/3} \frac{dx}{\pi}. \tag{10}$$

Вычисляя интеграл в правой части (10), получаем

$$f_L \simeq \frac{\pi}{m} \frac{g}{\sqrt{2\beta}} (1 + \beta(1 - 4L^2)/2) \cos L\pi. \tag{11}$$

Сохраненная рядом с единицей добавка $\beta(1 - 4L^2)/2$ показывает, что гармоника f_2 по модулю больше всех остальных четных гармоник (нулевая гармоника, отвечающая за сжимаемость системы, в нашем рассмотрении не участвует, поскольку электронный газ удерживается однородным положительно заряженным фоном). Пренебрегая для оценки этой добавкой при малых β и подставляя выражение (11) в (6) и (7), находим, что эффективная масса расходится при критической константе $g_c^{(1)} \simeq -2\sqrt{2\beta}$, в то время как устойчивость Померанчука в канале с $L = 2$, т.е. относительно квадрупольной деформации, нарушается при критической константе $g_c^{(2)} \simeq -\sqrt{2\beta}$, которая по модулю *меньше*, чем $|g_c^{(1)}|$.

Для анализа поведения гармоник f_L взаимодействия (5) с $\beta = 0.14$ интеграл в (9) рассчитывался численно. На рис. 1 показана зависимость левой части неравенства (6) в каналах с $1 \le L \le 4$ от абсолютного значения отрицательной константы связи g. В случае $L = 1$ левая часть неравенства (6) совпадает с отношением m^*/m, и соответствующая кривая на рис. 1 показывает неограниченный рост эффективной массы при приближении $|g|$ к критическому значению $|g_c^{(1)}| \simeq 1.3$. Однако при $|g| = |g_c^{(2)}| \simeq 0.85$ система теряет устойчивость в канале с $L = 2$, т.е. ферми-линия приобретает квадрупольную деформацию.

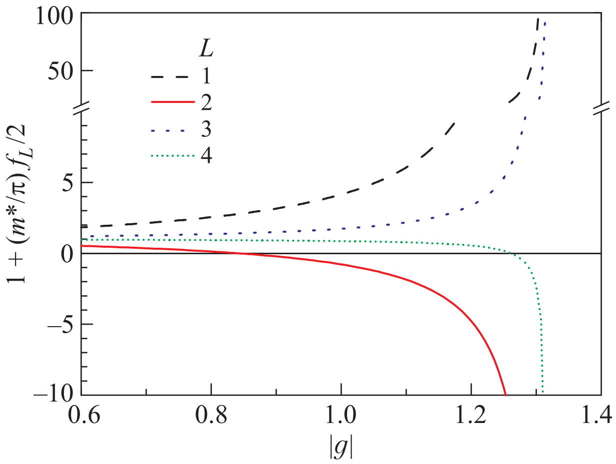

Рис. 1. (Цветной онлайн) Условия устойчивости Померанчука для $1 \le L \le 4$. При $|g| \simeq 0.85$ первой теряется устойчивость в канале с $L = 2$

Импульсное распределение $n(\mathbf{p})$ квазичастиц в основном состоянии системы при $|g| > |g_c^{(2)}|$ мы находили, минимизируя эффективный функционал энергии (4) с помощью метода Монте-Карло. В нашей задаче реализация этого метода заключается в следующем. Используется однородная сетка в 2D импульсном пространстве с шагом Δp, задаваемым условием $V(\Delta p)^2/(2\pi)^2 = 1$, в котором объем системы $V = N/\rho$, где N – полное число частиц. Состояние системы описывается квазичастичными числами заполнения $n(\mathbf{p})$ на сетке, принимающими значения 1 и 0 для занятых и свободных состояний соответственно. Организуется случайное блуждание на множестве квазичастичных распределений в соответствии с гиббсовской термодинамически равновесной вероятностью $\propto e^{-E[n]/T}$. На каждом элементарном шаге процедуры предпринимается попытка перекладки квазичастицы из случайного занятого состояния в случайное пустое. Перекладка всегда принимается, если изменение энергии системы $\Delta E < 0$, в противном случае она принимается с вероятностью $e^{-\Delta E/T}$. В случае $T \to 0$, который мы будем обсуждать дальше, такая процедура эквивалентна минимизации эффективного функционала энергии. В расчетах, результаты которых будут представлены, мы полагали $N = 9000$ и $T = 0$. Полное число ячеек 2D сетки в импульсном пространстве составляло 201×201.

Последовательность перестроек основного состояния системы, происходящих при усилении квазичастичного взаимодействия, представлена на рис. 2. Для понимания характера этих перестроек полезен

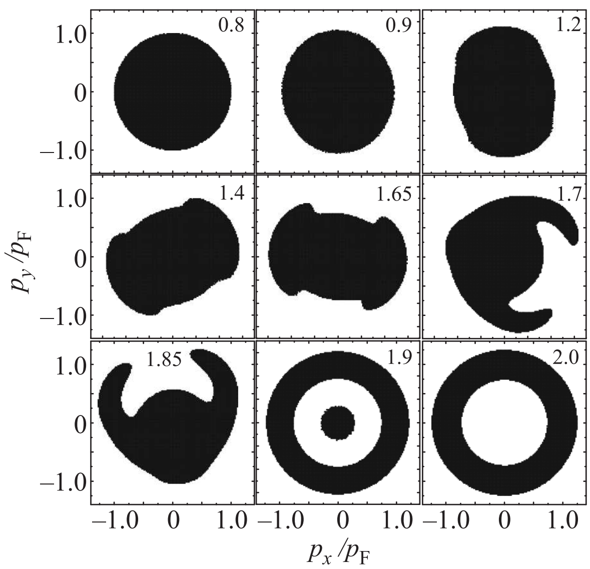

Рис. 2. Перестройки ферми-поверхности двумерной системы с квазичастичным взаимодействием (5) при увеличении $|g|$ от 0.8 до 2.0. $|g| = 0.8$ – ферми-жидкостное состояние с изотропной ферми-поверхностью; $|g| = 0.9 \div 1.65$ – нематическое состояние $\mathcal{N}_{xy}$ с двумя осями симмметрии; $|g| = 1.7 \div 1.85$ – нематическое состояние $\mathcal{N}_x$ с одной осью симметрии; $|g| = 1.9$ – изотропное состояние $\mathcal{T}_3$, ферми-поверхность трехсвязна; $|g| = 2.0$ – изотропное состояние $\mathcal{T}_2$ с двухсвязной ферми-поверхностью

также рис. 3, на котором показана зависимость от $|g|$ энергии основного и всех метастабильных состояний системы, которые существуют при данной константе g. Существование метастабильных состояний мы установили, организовав старт процедуры Монте-Карло со случайного начального квазичастичного распределения, в результате чего система попадала в два (и даже три) различных конечных состояния

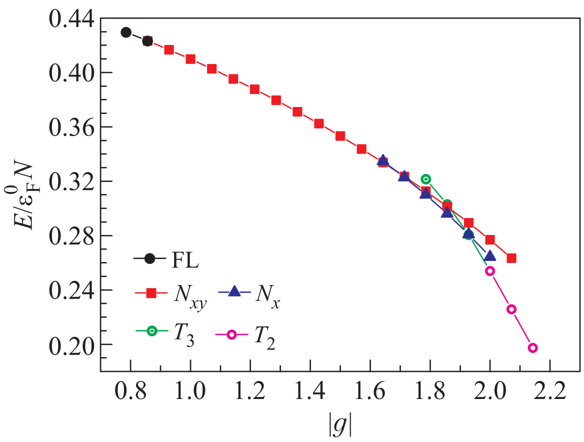

Рис. 3. (Цветной онлайн) Энергия на частицу в единицах $\varepsilon_F^0 = p_F^2/2m$ для различных состояний системы

по завершении большого числа серий ее термодинамической монте-карловской эволюции.

Первая перестройка основного состояния происходит при $|g| \simeq 0.85$, когда нарушается условие устойчивости Померанчука в канале с $L = 2$. Переходом второго рода по константе g возникает нематическое состояние с квадрупольной деформацией. Октупольная деформация вступает в игру при значении $|g| \simeq 1.2$, близком, как видно из рис. 1, к значению $|g_c^{(4)}| \simeq 1.25$, при котором нарушается условие устойчивости изотропной ферми-поверхности в канале с $L = 4$. При дальнейшем увеличении абсолютного значения константы g в дело вступают более высокие четные гармоники, определяющие форму ферми-поверхностей, показанных на рис. 2 для $|g| = 1.4$ и 1.65. Все нематические состояния с четными мультипольностями деформации ферми-поверхности, имеющей две оси симметрии, мы будем обозначать $\mathcal{N}_{xy}$.

При дальнейшем росте константы связи картина перестроек Ферми-поверхности усложняется. Мы обнаружили, что при $|g| = 1.6$ наряду с основным состоянием с четной деформацией, существует метастабильное нематическое состояние $\mathcal{N}_x$, деформация которого содержит также нечетные мультиполи. Ферми-поверхность этого состояния имеет только одну ось симметрии, поэтому не симметрична при инверсии. При $|g| \simeq 1.7$ это состояние опускается по энергии ниже состояния $\mathcal{N}_{xy}$ и переходом первого рода становится основным (см. рис. 3 и панель $|g| = 1.7$ рис. 2). Четно-деформированное состояние $\mathcal{N}_{xy}$ продолжает существовать как метастабильное до $|g| \simeq 2.1$. При $|g| \simeq 1.8$ с основным состоянием $\mathcal{N}_x$ и метастабильным состоянием $\mathcal{N}_{xy}$ сосуществует третье, лежащее по энергии выше обоих — изотропное состояние $\mathcal{T}_3$ с трехсвязной ферми-поверхностью. Оно опускается по энергии ниже состояния $\mathcal{N}_x$ и становится основным при $|g| \simeq 1.9$ (см. рис. 3 и соответствующую панель рис. 2). Таким образом, при $|g| \simeq 1.9$ фазовым переходом первого рода по константе g вращательная симметрия основного состояния восстанавливается, но меняется его топология. Состояние $\mathcal{N}_x$ остается метастабильным до $|g| \simeq 2.0$. При этом же значении $|g|$ топология изотропного основного состояния непрерывным переходом меняется – ферми-поверхность становится двухсвязной. Новое основное состояние $\mathcal{T}_2$ при $|g| = 2.0$ показано на нижней правой панели рис. 2.

Важной характеристикой основного состояния системы является плотность одночастичных состояний

$$\nu = \int \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)\, V dv. \qquad (12)$$

Мы находили ее, вычисляя число квазичастичных состояний $\mathbf{p}$ в энергетическом интервале $|\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu| < 0.1\,\varepsilon_F^0$. Поведение плотности состояний ν показано на рис. 4. Как видно, фазовый переход первого

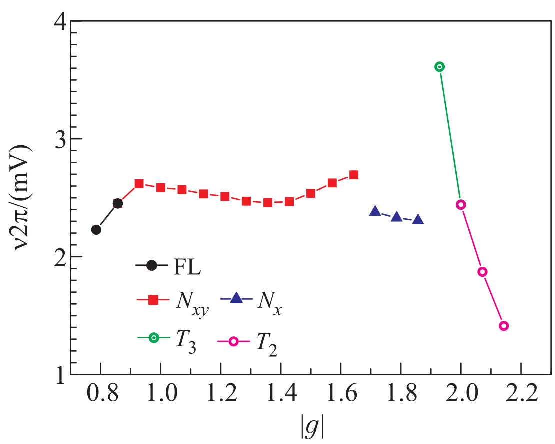

Рис. 4. (Цветной онлайн) Плотность состояний на единицу объема для основного состояния системы

рода между нематическими состояниями $\mathcal{N}_{xy}$ и $\mathcal{N}_x$ и топологический фазовый переход первого рода из нематического $\mathcal{N}_x$-состояния в изотропное состояние $\mathcal{T}_3$ проявляются как скачки в плотности состояний величиной порядка 10 % и 50 % соответственно.

4. Перейдем к анализу неустойчивости ферми-жидкостного распределения квазичастиц в модели (5) с $g > 0$ и малыми $q_0 < p_F$. В этой модели топологическая неустойчивость обусловлена особенностями спектра не на ферми-поверхности, а на окружности радиусом $p_b < p_F$. Дело в том, что при $p = p_b$ в уравнении $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mu$ возникает бифуркация – появляются два новых корня, а в импульсном распределении возникает кольцевая дырочная полость. Это легко понять на примере трехмерной модели со взаимодействием

$$f(\mathbf{q}) = \frac{2\pi^2 p_\mathrm{F}^2}{m q_0} g\delta(q^2 - q_0^2), \quad g > 0. \tag{13}$$

В этом случае интегрирование в уравнении (3) с ферми-жидкостным распределением $n_{\mathrm{FL}}(\mathbf{p})$ выполняется аналитически и дает

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{p_\mathrm{F}^2}{2m} g\Big(\theta(p_\mathrm{F} - q_0 - p) + \frac{1}{4q_0 p}(p_\mathrm{F}^2 - (p - q_0)^2) \times \times [\theta(p_\mathrm{F} + q_0 - p) - \theta(p_\mathrm{F} - q_0 - p)]\Big). \tag{14}$$

Найденный спектр имеет Λ-образный излом в точке $p_b = p_\mathrm{F} - q_0$, обеспечивающий в этой точке упомянутую выше бифуркацию.

Возвращаясь к 2D-системе, заметим, что в момент рождения кольцевой полости в импульсном распределении плотность одночастичных состояний расходится из-за обращения в нуль групповой скорости $d\varepsilon/dp$ в точке p_b [25], поэтому едва возникшая дырочная полость становится привлекательной для формирования неустойчивости Померанчука. Как возникает эта неустойчивость, можно проследить аналитически для ситуации, когда импульс $q_0 \simeq 2p_b \sin(\pi/n)$ вписывается n-кратно в ферми-окружность радиусом p_b. В этом случае L-гармоника взаимодействия (5), вычисленная при $p = p_1 = p_b$, дается соотношением

$$f_L = \frac{\pi}{m}\frac{4\beta g p_\mathrm{F}^2}{p_b^2 \sin^2(\pi/n)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos L\vartheta}{[\sin^2(\vartheta/2)/\sin^2(\pi/n) - 1]^2 + \beta^2}\frac{d\vartheta}{2\pi}, \tag{15}$$

в котором множителем 4 учтено, что неустойчивость разыгрывается на двух очень близких взаимодействующих между собой границах дырочной полости.

В пределе очень острого пика при малых значениях q_0, т.е. $\beta \ll q_0/p_\mathrm{F} \sim 1/n \ll 1$, гармонику можно приближенно вычислить аналитически. Введя в окрестности значения $\vartheta = 2\pi/n$, при котором подынтегральное выражение имеет резкий экстремум, переменную $x = (\vartheta - 2\pi/n)(n/\pi\beta)$, преобразуем выражение (15) к виду

$$f_L \simeq \frac{8gnp_\mathrm{F}^2}{mp_b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos L(2\pi/n + \pi\beta x/n)}{x^2 + 1}\frac{dx}{2\pi}. \tag{16}$$

Пренебрегая при $L < n$ слагаемым с β в аргументе косинуса, получаем

$$f_L \simeq \frac{4gnp_\mathrm{F}^2}{mp_b^2}\cos(2\pi L/n). \tag{17}$$

Гармоники f_L становятся отрицательными при $L > n/4$, а наибольшее по модулю значение f_L достигается, когда $\cos(2\pi L/n) \simeq -1$, т.е. при $L \simeq n/2 \simeq \pi(p_\mathrm{F}/q_0 - 1)$. Подстановка (17) в условие устойчивости (6) показывает, что критическое для возникновения этой неустойчивости значение константы связи $g_c^{(L)} \propto 1/L$ падает с уменьшением q_0.

Импульсные распределения квазичастиц в основном состоянии системы за точкой неустойчивости для $\beta = 0.05$ и разных значений q_0, найденные методом Монте-Карло по описанной выше схеме, показаны на рис. 5. При $q_0 = p_\mathrm{F}$ бифуркация локализована в центре ферми-круга, т.е. при $p_b = 0$, поэтому основным игроком в формировании неустойчивости Померанчука служит единственная внешняя ферми-поверхность с радиусом p_F. В этом случае импульс q_0 вкладывается в ферми-окружность с кратностью $n = 6$, поэтому мультипольность деформации ферми-поверхности $L = 3$. При $q_0 = 0.5p_\mathrm{F}$ бифуркация возникает при $p_b \simeq 0.5p_\mathrm{F}$. В таком случае вложение q_0 в окружность радиусом p_b тоже имеет кратность $n = 6$ и мультипольность $L = 3$, но деформация внутренних ферми-поверхностей приводит к образованию трех несвязных малых дырочных карманов, т.е. к состоянию, в котором одновременно нарушена вращательная симметрия и изменена топология. Внешняя ферми-поверхность поддерживает C_3 симметрию внутренней перестройки. При $q_0 = 0.4p_\mathrm{F}$ радиус $p_b \simeq 0.6p_\mathrm{F}$, кратность вложения $n = 10$, и мультипольность $L = 5$ отвечает рождению пяти дырочных карманов. При $q_0 = 0.3\,p_\mathrm{F}$ кратность $n = 16$,

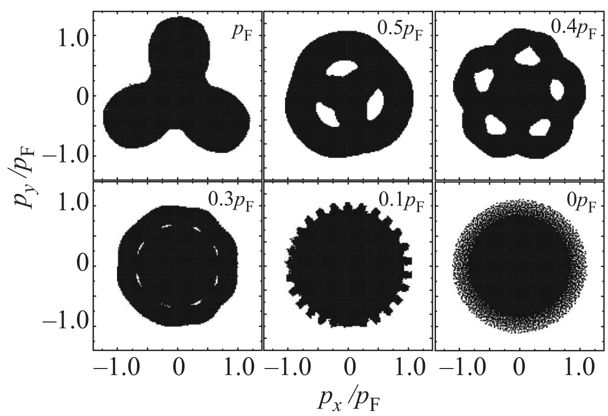

Рис. 5. $q_0 = p_\mathrm{F}$ – деформация ферми-поверхности с мультипольностью $L = 3$. $q_0 = 0.5\,p_\mathrm{F}$ – мультипольность деформации $L = 3$, три малых дырочных кармана. $q_0 = 0.4\,p_\mathrm{F}$ – $L = 5$, пять карманов. $q_0 = 0.3\,p_\mathrm{F}$ – $L = 8$, восемь карманов. $q_0 = 0.1\,p_\mathrm{F}$ – ферми-поверхность с $L = 27$ складками. $q_0 = 0$ – фермионный конденсат

мультипольность $L = 8$ и внутри внешней ферми-поверхности рождаются восемь дырочных карманов.

Заметим, что состояния с тремя и пятью карманами найдены при заметном превышении константой g критического значения, отвечающего возникновению бифуркации, поэтому дырочные карманы в этих состояниях ощутимо развиты. В состоянии же с мультипольностью $L = 8$ карманы, показанные на рис. 5, совсем новорожденные. Для всех рассмотренных мультипольностей (не только для $L = 8$) дырочные карманы рождаются внутри ферми-круга прямо в момент бифуркации. Таким образом, рождение L малых дырочных карманов происходит переходом второго рода, в котором одновременно меняется топология и спонтанно нарушается вращательная симметрия. Отметим, что перестройка ферми-поверхности с образованием малых дырочных карманов наблюдается в квантовых осцилляциях термоэдс и коэффициента Нернста в недодопированном купрате $YBa_2Cu_3O_y$ [26].

При дальнейшем уменьшении q_0 импульс бифуркации p_b приближается к p_F; кроме того, спектр при $p \simeq p_F$ становится очень плоским, т.е. плотность состояний на внешней ферми-поверхности в момент бифуркации играет существенную роль. С состоянием, имеющим L дырочных карманов, начинает конкурировать состояние, в котором формируется одна гофрированная ферми-поверхность с L складками. Переход первого рода между этими состояниями происходит в районе $q_0 = 0.2\,p_F$. При $q_0 = 0.1p_F$ число складок равно $L = 27$, как это можно увидеть из рис. 5.

При $q_0 \to 0$ кратность вложения q_0 в ферми-окружность $n \to \infty$, поэтому $g_c^{(L)} \propto 1/n \to 0$, т.е. при сколь угодно малой константе g система оказывается неустойчивой относительно спонтанной деформации ферми-поверхности с мультипольностью $L \to \infty$. При ненулевой амплитуде деформации δp_F и $q_0 > 0$, т.е. при конечном значении n, ферми-линия остается *линией*, поскольку покрывается $N(\zeta) \propto 1/\zeta$ кругами малым радиусом ζ, и ее хаусдорфова размерность

$$\mathcal{D} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\ln N(\zeta)}{\ln(1/\zeta)} \qquad (18)$$

остается $\mathcal{D}_{n<\infty} = 1$. При $n \to \infty$ ферми-линия становится бесконечно складчатой и проходит сколь угодно близко к любой точке кольца, ограниченного окружностями с радиусами $p_F \pm \delta p_F$, поэтому число кругов покрытия $N(\zeta) \propto 1/\zeta^2$ даже при $\zeta \to 0$. Из этого следует, что хаусдорфова размерность (18) такой ферми-линии $\mathcal{D}_\infty$ равна *двум*. Переход со сменой размерности ферми-поверхности – топологический переход, происходящий в модели Нозьера, в которую переходит наша модель при $q_0 \to 0$, по сценарию фермионной конденсации.

Результат расчета импульсного распределения квазичастиц в этой модели методом Монте-Карло показан на правой нижней панели рис. 5. В темной области все состояния заполнены, $n(\mathbf{p}) = 1$; в светлой – пусты. Диффузное "облако" вокруг заполненного кора – это область фермионного конденсата. В этой области числа заполнения в процессе монте-карловской эволюции флуктуируют между нулем и единицей, так что их средние значения лежат в интервале $0 < n(\mathbf{p}) < 1$, а усредненный спектр вырождается, т.е. $\varepsilon(\mathbf{p}) \equiv \mu$. Такое определения фермионного конденсата созвучно с его определением [18] как области, где числа заполнения оказываются дробными, а спектр плоским при усреднении их по итерационной эволюции уравнения (3).

В нашей работе перестройка основного состояния ферми-системы изучалась при $T = 0$. Следует заметить, что влияние температуры на сценарий перестройки весьма существенно. Так, расчеты из работы [27] показали, что при нагревании восстанавливается спонтанно нарушенная C_4 симметрия электронной системы в квадратной решетке, а расчеты в [10, 18] обнаружили при повышении температуры кроссовер от фазы с вращательно симметричными карманами Лифшица в состояние с плоской зоной – фермионным конденсатом. Оценки для рассмотренных здесь двумерных модельных систем указывают, что в них роль температуры также сводится к восстановлению вращательной симметрии и разрушению дырочных карманов с образованием участков с плоским спектром. Подробный анализ этого вопроса будет сделан в отдельной работе.

5. В заключение, на примере сильно коррелированной 2D ферми-системы с модельным взаимодействием квазичастиц $f(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$, имеющим максимум при $|\mathbf{p}-\mathbf{p}'| = q_0$, мы изучили взаимосвязь топологической неустойчивости и неустойчивости Померанчука. В случае $q_0 = 2p_F$ и отрицательной константы связи, моделирующем квазичастичное взаимодействие в разреженном 2D электронном газе, нематические и топологические фазовые переходы могут равноправно возникать в системе, образуя сложную последовательность перестроек ферми-поверхности. Мы обнаружили две различные нематические фазы $\mathcal{N}_{xy}$ и $\mathcal{N}_x$. В обеих нематических фазах спонтанно нарушена вращательная симметрия, но ферми-линия в фазе $\mathcal{N}_{xy}$ имеет две оси симметрии и поэтому симметрична относительно инверсии, а в фазе $\mathcal{N}_x$ ось симметрии только одна и инверсионная симметрия нарушена. Переход из изотропного ферми-жидкостного состояния в состояния $\mathcal{N}_{xy}$ происходит непрерывным образом при нарушении условия устойчивости Померанчука с ростом константы взаимодействия, тогда как последующий переход из фазы $\mathcal{N}_{xy}$ в фазу $\mathcal{N}_x$ происходит скачком. При дальнейшем росте константы связи вращательная симметрия восстанавливается — основное состояние $\mathcal{N}_x$ топологическим переходом первого рода сменяется изотропным состоянием $\mathcal{T}_3$ с трехсвязной ферми-линией, которое затем переходит непрерывно в изотропное состояние $\mathcal{T}_2$, ферми-линия которого двухсвязна.

В случае отталкивания и $q_0 < p_\mathrm{F}$ мы исследовали только начальный этап перестройки из ферми-жидкостного состояния, но даже на этом этапе сценарии перестройки переплетаются весьма причудливо. При $q_0 \simeq p_\mathrm{F}$ возникает неустойчивость Померанчука в канале с $L = 3$, за которой рождается состояние с C_3 симметрией. При $q_0 < p_\mathrm{F}$ происходит непрерывный переход, в котором одновременно меняется топология и спонтанно нарушается вращательная симметрия – внутри ферми-кольца в области импульсов $p_\mathrm{F}-q_0$ рождаются $L \simeq \pi(p_\mathrm{F}/q_0-1)$ малых дырочных карманов и состояние приобретает C_L симметрию. При $q_0 \ll p_\mathrm{F}$ деформированное состояние с ненарушенной топологией оказывается энергетически выгоднее топологически перестроенного состояния, т.е. фазовый переход определяется неустойчивостью Померанчука с мультипольностью $L \gg 1$. При $q_0 \to 0$, когда изучаемая модель переходит в двумерную модель Нозьера, мультипольность спонтанной деформации $L \to \infty$, ферми-линия становится бесконечно складчатой и приобретает хаусдорфову размерность $\mathcal{D} = 2$, что отвечает состоянию с фермионным конденсатом.

Авторы признательны В.А. Ходелю и С.В. Толоконникову за плодотворное обсуждение затронутых в работе вопросов. С.С.П. благодарит INFN, Sezione di Catania, за оказанное гостеприимство во время его пребывания в Катании. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 15-02-06261-a).

1. L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3**, 920 (1956).
2. L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **8**, 70 (1959).
3. I. Ia. Pomeranchuk, Sov. Phys. JETP **8**, 361 (1959).
4. E. Fradkin, S. A. Kivelson, M. J. Lawler, J. P. Eisenstein, and A. P. Mackenzie, arXiv:0910.4166 (2009).
5. H. Fröhlich, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).
6. M. de Llano and J. P. Vary, Phys. Rev. C **19**, 1083 (1979).
7. M. de Llano, A. Plastino, and J. G. Zabolitsky, Phys. Rev. C **20**, 2418 (1979).
8. V. C. Aguilera-Navarro, R. Belehrad, M. de Llano, M. Sandel, J. P. Vary, and O. Rojo, Phys. Rev. C **22**, 1260 (1980).
9. M. V. Zverev and M. Baldo, JETP **87**, 1129 (1998).
10. M. V. Zverev and M. Baldo, J. Phys.: Condens. Matter **11**, 2059 (1999).
11. S. A. Artamonov, V. R. Shaginyan, and Yu. G. Pogorelov, JETP Lett. **68**, 942 (1998).
12. J. Quintanilla and A. J. Schofield, Phys. Rev. B **74**, 115126 (2006).
13. S. S. Pankartov, M. V. Zverev, and M. Baldo, JETP Lett. **93**, 591 (2011).
14. S. S. Pankartov and M. V. Zverev, JETP Lett. **97**, 163 (2013).
15. V. A. Khodel and V. R. Shaginyan, JETP Lett. **51**, 553 (1990).
16. G. E. Volovik, JETP Lett. **53**, 222 (1991).
17. P. Nozières, J. Phys. I France **2**, 443 (1992).
18. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, Phys. Rev. B **78**, 075120 (2008).
19. A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, London (1963).
20. V. V. Borisov and M. V. Zverev, JETP Lett. **81**, 503 (2005).
21. M. V. Zverev, V. A. Khodel, and S. S. Pankratov, JETP Lett. **96**, 192 (2012).
22. A. A. Shashkin, S. V. Kravchenko, V. T. Dolgopolov, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **66**, 073303 (2002).
23. V. M. Pudalov, M. E. Gershenson, H. Kojima, N. Butch, E. M. Dizhur, G. Brunthaler, A. Prinz, and G. Bauer, Phys. Rev. Lett. **88**, 196404 (2002).
24. A. A. Kapustin, A. A. Shashkin, V. T. Dolgopolov, M. Goiran, H. Rakoto, and Z. D. Kvon, Phys. Rev. B **79**, 205314 (2009).
25. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, JETP Lett. **94**, 73 (2011).
26. N. Doiron-Leyraud, S. Badoux, and S. René de Cotret, Nat. Comm. **6**, 6034 (2015).
27. M. V. Zverev, J. W. Clark, Z. Nussinov, and V. A. Khodel, JETP Lett. **91**, 529 (2010).