Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 11, с. 718 – 723

Внутренняя структура вихрей в двухкомпонентном конденсате экситонных поляритонов

*Н. С. Воронова[+*1)], М. А. Посаженков[+], Ю. Е. Лозовик[#×1)]*

[+]*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

[*]*Российский квантовый центр, 143025 Сколково, Россия*

[#]*Институт спектроскопии Российской академии наук, 142190 Троицк, Россия*

[×]*Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова – Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 123458 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 2017 г.

В работе представлено теоретическое описание вихревых решений связанных уравнений типа Гросса–Питаевского в двухкомпонентном бозе-конденсате экситонных поляритонов с учетом зависимости энергии расщепления Раби от плотности экситонной составляющей. Показано, что учет эффекта голубого сдвига приводит к значительному снижению плотностей обеих компонент конденсата. Вычислены пространственные профили экситонов и фотонов в поляритонной системе с учетом нелинейных поправок и энергия образования вихревого возбуждения.

DOI: 10.7868/S0370274X17230126

Экситонные поляритоны — собственные моды полупроводниковой микрополости, в которую погружены квантовые ямы (КЯ), образующиеся в результате гибридизации фотонной и экситонной мод [1, 2]. Они замечательны своей предрасположенностью к макроскопическому заселению одного или нескольких квантовых состояний [3, 4]. Из-за своей смешанной природы, объединяющей свойства света и материи, эти квазичастицы обладают весьма специфическими свойствами, приводящими к множеству необычных эффектов, таких как высокотемпературная бозе-конденсация [5–7], сверхтекучесть [8, 9], спонтанное формирование вихрей [10–13], бозонный эффект Джозефсона [14–16]. В так называемом поляритонном лазере [3] конденсат экситонных поляритонов испускает свет в силу неидеальности брэгговских зеркал [17]. Такое излучение является спонтанным, однако выходящий из микрополости свет имеет все свойства лазерного излучения: он когерентен, монохроматичен, поляризован и однонаправлен, и при этом позволяет полностью получать информацию о системе, не разрушая ее квантового состояния.

Поляритоны в микрорезонаторе представляют собой квазидвумерную систему бозонов двух типов с взаимными превращениями. Экситоны в КЯ и квазидвумерные фотоны микрополости, обладая квадратичными законами дисперсии, имеют существенно различные эффективные массы ($m_{\rm C}/m_{\rm X} \sim 10^{-4}$). Закон дисперсии новых собственных состояний состоит из двух ветвей (рис. 1), причем при низких температурах макроскопически заселенной оказыва-

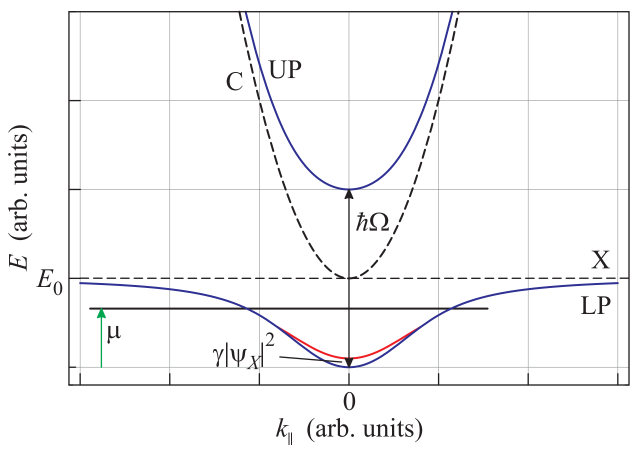

Рис. 1. (Цветной онлайн) Законы дисперсии экситона в КЯ (X), фотона в микрополости (C), нижнего (LP) и верхнего (UP) поляритонов для случая нулевой расстройки между модами. E_0 – уровень отсчета энергии, определяемый шириной полости. Схематично изображена учитываемая поправка $\gamma|\psi_{\rm X}|^2$ за счет взаимодействия между экситонами ("голубой сдвиг"). Для конденсата нижних поляритонов химический потенциал μ может принимать значения от $E_0 - \hbar\Omega/2$ до E_0, т.е. $0 < a < 1$, где $a = (E_0 - \mu)/(\hbar\Omega/2)$ (см. текст)

1)e-mail: nsvoronova@mephi.ru; lozovik@isan.troitsk.ru

ется только нижняя поляритонная ветвь. В предположении, что система представляет собой бозе-конденсат нижних поляритонов, в данной работе мы исследуем структуру вихревых решений уравнения Гросса–Питаевского [18] для двухкомпонентной системы экситонов и фотонов со взаимными превращениями. Вихри в поляритонном конденсате ранее исследовались как экспериментально [10–13], так и теоретически [19–23], и представляют интерес с точки зрения топологического перехода Березинского–Костерлица–Таулеса [24, 25] и турбулентных явлений в бозе-конденсате.

Необходимо подчеркнуть, что в режиме сильной связи именно нижняя и верхняя поляритонные моды (см. рис. 1) являются новыми собственными состояниями гамильтониана связанной системы фотонов и экситонов. В этом смысле рассматриваемая система является однокомпонентным бозе-конденсатом нижних поляритонов со скалярной волновой функцией $\Psi_{\rm LP}$, в отличие от многокомпонентных сверхтекучих систем типа ^{3}He-B, в которых из-за сложной топологии параметра порядка может наблюдаться нарушение осевой симметрии [26, 27] и расщепление вихрей на пары пространственно разделенных полуквантовых вихрей [28, 29]. В случае экситон-поляритонной системы двухкомпонентное описание в базисе экситонного и фотонного состояний $(\Psi_{\rm X}, \Psi_{\rm C})^T$ означает при обратном переходе к $\Psi_{\rm LP}$ лишь неоднородность коэффициентов унитарного преобразования, диагонализующего гамильтониан системы (коэффициентов Хопфилда) [1]. Поэтому нарушения аксиальной симметрии в случае поляритонных вихрей не происходит. Полуквантовые вихри в системе экситонных поляритонов могут наблюдаться в случае суперпозиции конденсатов с правой (σ^+) и левой (σ^-) круговыми поляризациями (различными псевдоспинами), однако и в этом случае осевая симметрия сохраняется: полувихри характеризуются одновременным изменением фазы и поворотом вектора поляризации на $\pm\pi$ при обходе вокруг кора вихря, что эффективно приводит к целому вихрю в одной компоненте и отсутствию вихря в другой [12]. Принципиальное отличие рассматриваемой эффективно двухкомпонентной системы экситонов и фотонов от "истинно" многокомпонентных систем, рассмотренных в [26–29], и от суперпозиции поляритонных конденсатов с σ^+ и σ^- поляризациями [12] заключается в том, что уравнения типа Гросса–Питаевского, рассматриваемые далее, связаны обменными слагаемыми, описывающими резонансное взаимопревращение частиц одного типа в частицы другого типа, тогда как в описанных выше случаях уравнения связаны лишь взаимодействием между частицами.

Пространственное распределение конденсатов экситонов и фотонов может быть описано в приближении среднего поля следующими связанными уравнениями [21–23]:

$$\begin{cases} {\rm i}\hbar\,\partial_t\Psi_{\rm X} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\rm X}}\nabla^2\Psi_{\rm X} + g|\Psi_{\rm X}|^2\Psi_{\rm X} + \frac{\Delta}{2}\,\Psi_{\rm C}, \\ {\rm i}\hbar\,\partial_t\Psi_{\rm C} = -\frac{\hbar^2}{2m_{\rm C}}\nabla^2\Psi_{\rm C} + \frac{\Delta}{2}\,\Psi_{\rm X}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Psi_{\rm X,C}$ и $m_{\rm X,C}$ – макроскопические волновые функции и эффективные массы экситонов (X) и фотонов (C) соответственно, $g > 0$ – константа экситон-экситонного взаимодействия, $\Delta \equiv \hbar\Omega$ – энергия расщепления между нижней и верхней поляритонными ветвями (Ω – частота Раби).

Цель настоящего исследования — изучить влияние на внутреннюю структуру вихря зависимости энергии расщепления Раби (ее эффективного уменьшения) от плотности экситонной фракции за счет взаимодействия: $\Delta = \hbar\Omega(1-\gamma|\Psi_{\rm X}|^2)$ (см. рис. 1). Данный "голубой сдвиг" энергии расщепления был предсказан теоретически [30] и наблюдался экспериментально в системах экситонных поляритонов [31–34]. Влияние голубого сдвига на формирование вихрей было экспериментально исследовано в работе [35]. Значения параметра γ могут быть определены из сравнения с экспериментом. Например, в [32] наблюдался голубой сдвиг спектра испускания вплоть до 3 мэВ при расщеплении между ветвями 7.45 мэВ. В данной работе везде предполагается выполнение условия $\gamma|\Psi_{\rm X}|^2 \ll 1$.

В нашем рассмотрении будем считать для простоты, что энергетическая расстройка между фотонной и экситонной модами равна нулю, т.е. $E_0^{\rm C} = E_0^{\rm X} = E_0$. Тогда в стационарном случае $\Psi_{\rm X,C}(\mathbf{r},t) = \psi_{\rm X,C}(\mathbf{r})\exp\{-({\rm i}/\hbar)(\mu - E_0)t\}$ (μ – химический потенциал, фиксирующий полное число частиц в системе) получим из (1) следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \left(-\frac{\hbar^2}{2m_{\rm X}}\nabla^2 + E_0 - \mu + g|\psi_{\rm X}|^2\right)\psi_{\rm X} + \\ \qquad\qquad + \frac{\hbar\Omega}{2}(1-\gamma|\psi_{\rm X}|^2)\psi_{\rm C} = 0, \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m_{\rm C}}\nabla^2 + E_0 - \mu\right)\psi_{\rm C} + \frac{\hbar\Omega}{2}(1-\gamma|\psi_{\rm X}|^2)\psi_{\rm X} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем искать решения системы (2) в виде вихревой нити, т.е. обладающие цилиндрической симметрией при обходе вокруг оси z:

$$\psi_{\rm X}(r,\varphi) = \sqrt{n_{\rm X}^0}\,e^{{\rm i}(s\varphi-\pi)}f(x),\;\; \psi_{\rm C}(r,\varphi) = \sqrt{n_{\rm C}^0}\,e^{{\rm i}s\varphi}j(x),$$

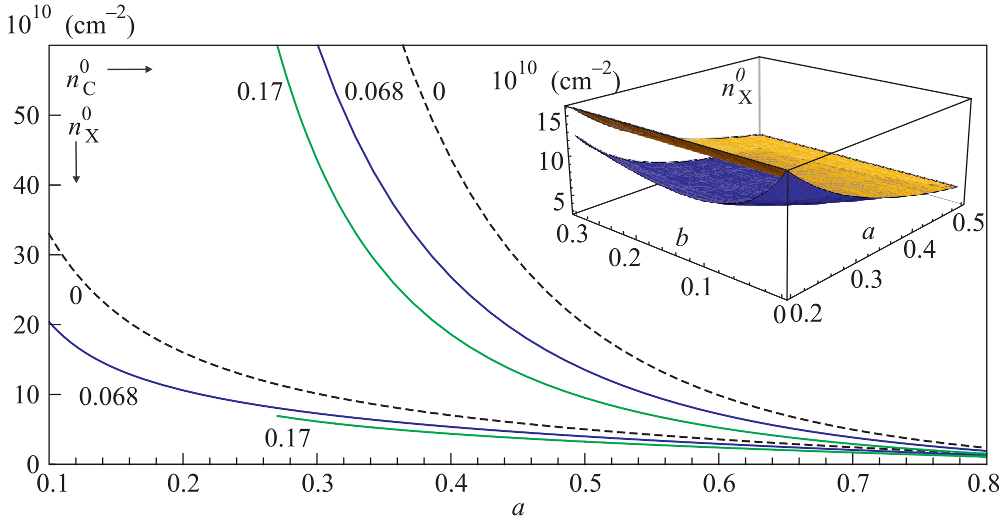

Рис. 2. (Цветной онлайн) Плотности однородных конденсатов фотонов n^0_{C} и экситонов n^0_{X} на бесконечности в зависимости от параметра голубого сдвига $b = \kappa/g$ согласно формулам (4), (5). Пунктирные линии показывают равновесные плотности без учета поправки, сплошные линии – для значений b, указанных на графике. Для $b = 0.17$ в области $a < 0.3$ перестает выполняться условие $b \ll a/(1-a^2)$. Видно, что учет поправки приводит к понижению как плотностей обеих компонент, так и их отношения $n^0_{\mathrm{C}}/n^0_{\mathrm{X}}$. На врезке показан трехмерный график зависимости n^0_{X} от a и b. Физические параметры: $m_{\mathrm{C}}/m_{\mathrm{X}} = 0.0001$, $\hbar\Omega/2 = 5$ мэВ, $g = 0.015$ мэВ $\cdot$ мкм^2

где $n^0_{\mathrm{X,C}}$ – невозмущенные плотности экситонного и фотонного конденсатов, s – целое число, отвечающее моменту импульса частицы $\ell_z = s\hbar$. Здесь введена безразмерная координата $x = r/\xi_{\mathrm{X}}$, где $\xi_{\mathrm{X}} = \hbar^2/\sqrt{2m_{\mathrm{X}} g n^0_{\mathrm{X}}}$ – длина залечивания экситонной волновой функции, и учтено, что волновые функции фотонов и экситонов в конденсате нижних поляритонов должны иметь разность фаз π [36]. Вдали от кора вихря плотности $|\psi_{\mathrm{X,C}}|^2$ должны выходить на свои невозмущенные значения, что накладывает условие стремления к 1 на функции $f(x)$ и $j(x)$ при $x \to \infty$.

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} \triangle f - \left(\omega + \dfrac{s^2}{x^2}\right) f = -\sqrt{\dfrac{n^0_{\mathrm{C}}}{n^0_{\mathrm{X}}}}\left(\alpha - \dfrac{\kappa}{g} f^2\right) j + f^3, \\ \triangle j - \left(\dfrac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{X}}}\omega + \dfrac{s^2}{x^2}\right) j = -\dfrac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{X}}}\sqrt{\dfrac{n^0_{\mathrm{X}}}{n^0_{\mathrm{C}}}}\left(\alpha - \dfrac{\kappa}{g} f^2\right) f, \end{cases} \tag{3}$$

в которых введены обозначения $\omega = (E_0 - \mu)/g n^0_{\mathrm{X}}$, $\alpha = \hbar\Omega/2 g n^0_{\mathrm{X}}$, $\kappa = \hbar\Omega\gamma/2$.

Поведение системы, таким образом, регулируется двумя безразмерными параметрами: $a = \omega/\alpha = 2(E_0 - \mu)/\hbar\Omega$ и $b = \kappa/g$, причем параметр a зависит от химического потенциала системы и может принимать значения в пределах 0 до 1, а накладываемое условие малости $\gamma n^0_{\mathrm{X}} \ll 1$ отвечает условию $b \ll a/(1-a^2)$, т.е. параметр b *не обязательно мал по сравнению с единицей*: с уменьшением химического потенциала (ростом a) его влияние на поведение системы значительно усиливается. Отметим, что предел $a \to 1$ означает стремление к нулю полного числа частиц в конденсате и физически не реализуется.

Требование $f(\infty) \to 1$, $j(\infty) \to 1$ приводит к выражениям для равновесных концентраций (с точностью до второго порядка по b):

$$n^0_{\mathrm{X}} = \frac{E_0 - \mu}{g}\,\frac{1 - a^2}{a}\,\frac{1 + \frac{1-a^2}{a^2} b^2}{1 + \frac{2}{a} b}, \tag{4}$$

$$n^0_{\mathrm{C}} = n^0_{\mathrm{X}}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{1 + 2ab + \frac{(1-a^2)^2}{a^2} b^2}{1 + \frac{2}{a} b}. \tag{5}$$

Как сказано выше, влияние поправки b растет с понижением химического потенциала системы. Из полученных выражений видно (рис. 2 и врезка рис. 3a), что учет голубого сдвига приводит к заметному понижению невозмущенных плотностей обеих компонент при фиксированном химическом потенциале, причем полученные с учетом поправки значения сходятся с экспериментально наблюдаемыми плотностями в поляритонных системах [5], в то время как значения для $b = 0$ оказываются сильно завышенными.

Второе уравнение системы (3) для фотонной функции $j(x)$ в пренебрежении членами $\sim m_{\mathrm{C}}/m_{\mathrm{X}}$ упрощается до $j''(x) + j'(x)/x - j(x)\, s^2/x^2 = 0$, нетривиальное решение которого при $x \to 0$ ведет себя как $j(x) \sim x^{|s|}$, а в пределе $x \to \infty$ расходится. Таким образом, для удовлетворения требования

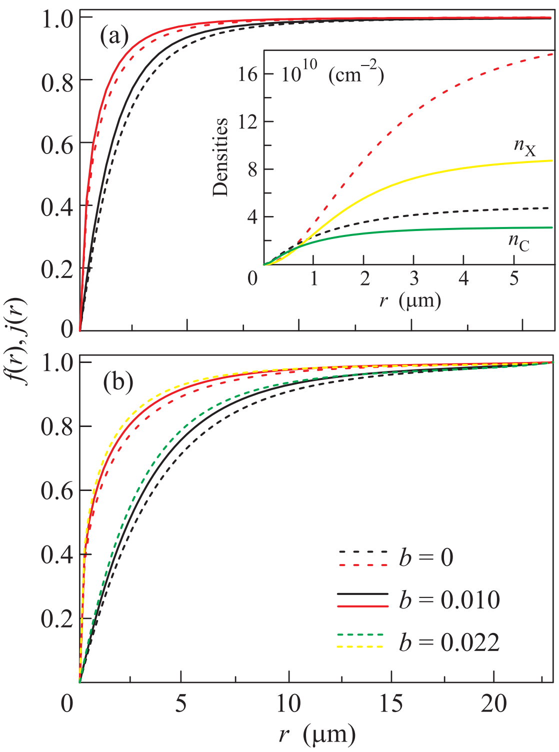

Рис. 3. (Цветной онлайн) Численные решения системы уравнений (3) с $s = 1$. (a) – Для $a = 0.5$, $b = 0$ (пунктирные красная ($f(r)$) и черная ($j(r)$) кривые) и $b = 0.068$ (сплошные красная ($f(r)$) и черная ($j(r)$) линии). На врезке показаны профили плотностей экситонной $n_X(r)$ и фотонной $n_C(r)$ компонент конденсата для $a = 0.5$ и $b = 0.17$. Видно, что равновесные значения плотностей значительно понижены при учете поправки на голубой сдвиг энергии. (b) – Для $a = 0.1$ и значений b, указанных на рисунке, и отвечающих голубому сдвигу $\gamma n_X^0 = 0.08$ и 0.15 соответственно. В данном случае при повышении химического потенциала системы разница в длинах залечивания экситонной и фотонной компонент заметно увеличивается. Физические параметры, использованные в моделировании, те же, как и на рис. 2

$j(x \to \infty) = 1$ необходимо учитывать малые слагаемые. В общем случае система нелинейных уравнений (3) решалась численно для $s = 1$ и различных значений параметров a и b. Полученные решения $f(x)$ и $j(x)$ представлены на рис. 3 для $a = 0.5$ и $a = 0.1$. Различие пространственных профилей двух подсистем связано с наличием в системе двух в различных характерных масштабов – экситонной длины залечивания ξ_X (см. выше) и длины залечивания фотонной волновой функции $\xi_C = \hbar^2/\sqrt{2m_C(E_0 - \mu)}$, причем $\xi_C > \xi_X$ всегда. В разреженном пределе (см. рис. 3a) они приближаются друг к другу, тогда как в пределе большого числа частиц (рис. 3b) существенно различны. Как можно видеть, с ростом поправки на голубой сдвиг b профили сильнее втягиваются внутрь кора вихря. Однако при переходе к плотностям фотонного и экситонного конденсатов $n_X(r) = n_X^0 f^2(r)$, $n_C(r) = n_C^0 j^2(r)$ с учетом выражений (4), (5) оказывается, что эффект обратный: частицы выталкиваются из центра, и экситонная фракция внутри вихря уменьшается, хоть и остается, вплоть до определенных r, выше доли фотонной компоненты поляритонного газа. Зависимость плотностей компонент конденсата с учетом и без учета поправки b показана на врезке рис. 3a.

Наконец, определим энергию вихревого возбуждения в двухкомпонентном поляритонном конденсате. Для этого, считая число частиц в системе фиксированным, запишем большой канонический функционал и вычтем из него энергию основного состояния однородного конденсата [18], что в терминах безразмерных функций f и j дает:

$$\mathcal{E}_v = \pi \frac{\hbar^2 n_X^0}{m_X} \int_0^{R/\xi_X} \left\{ \frac{m_X}{m_C} \frac{\omega + 1}{\omega} \left[\left(\frac{dj}{dx} \right)^2 + \frac{s^2}{x^2} j^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{s^2}{x^2} f^2 + (\omega + 1)(f - j)^2 + \frac{1}{2}(f^2 - 1)^2 \right\} x\, dx, \quad (6)$$

где интегрирование ведется по пятну радиуса R.

Из (6) следует, что основной вклад в энергию дает кинетическая энергия фотонной компоненты, а при увеличении R (в пределе $f, j \to 1$) выражение (6) ведет себя как

$$\mathcal{E}_v = \pi \frac{\hbar^2 n_C^0}{m_C} \ln \left(\frac{\beta R}{\xi} \right), \quad (7)$$

где коэффициент $\beta \sim 10^{-3}$ зависит от a и b и определяется фитированием.

Результат численного интегрирования для энергии возбуждения вихря с моментом $s = 1$ и логарифмические фиты по формуле (7) показаны на рис. 4 для $a = 0.1$ (a) и $a = 0.6$ (b). По графикам рис. 4b можно сделать вывод, что в разреженном пределе формула (7) согласуется с результатом численного интегрирования, тогда как в случае большого числа частиц (рис. 4a) при малых R энергия ведет себя по-другому за счет вклада от экситонных и обменных слагаемых. Полученный результат позволяет при переходе во вращающуюся систему отсчета оценить, в каком случае образование вихря становится более энергетически выгодным по сравнению с однородным решением $\Psi_{X,C} = \sqrt{n_{X,C}^0}$. Это происходит при угловой скорости вращения конденса-

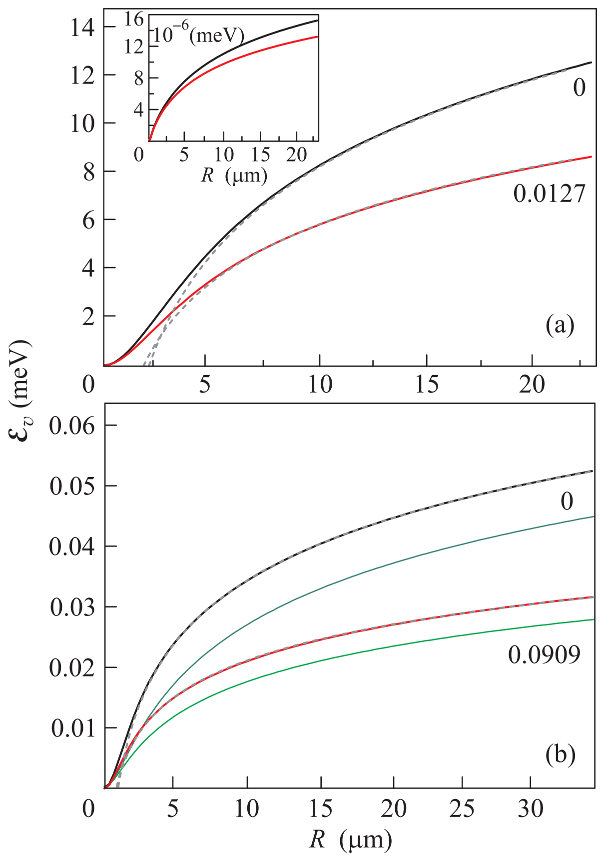

Рис. 4. (Цветной онлайн) Энергия возбуждения поляритонного вихря с моментом $s = 1$, определенная численным интегрированием выражения (6) (сплошные линии) и по формуле (7) (пунктирные линии): (a) – в условиях большого числа частиц ($a = 0.1$), без учета поправки b (черным) и для $b = 0.0127$ (красным). Видно, что внутри кора вихря формула (7) не согласутся с результатом численного интегрирования, т.е. из-за наполненности кора экситонами вклад в энергию внутри кора менее зависит от фотонной компоненты. На врезке показана кинетическая энергия экситонной компоненты конденсата. (b) – разреженный предел ($a = 0.6$) для значений $b = 0$ и 0.0909. Тонкие зеленые линии показывают вклад от кинетической энергии фотонной компоненты. Физические параметры те же, что на рис. 2

та выше критического значения $\Omega_{\rm cr} = \mathcal{E}_v/N\hbar$, где $N = (n_{\rm X}^0 + n_{\rm C}^0)\pi R^2$ – полное число поляритонов.

Таким образом, в данной работе показано, что учет влияния голубого сдвига экситонов на энергию расщепления Раби значительно меняет в меньшую сторону плотности обеих компонент поляритонного конденсата как на бесконечности (в приближении Томаса–Ферми), так и внутри кора вихря, сохраняя при этом эффект разницы длин залечивания для экситонов и фотонов. В меру понижения плотности также понижается и энергия вихревого возбуждения. Отличие результата (6) от энергии однокомпонентного вихря (см., например, [18]) заключается в появлении дополнительного вклада в энергию за счет обмена частицами и отклонения зависимости от логарифмической на малых радиусах. Подчеркнем, что преимуществом использованного нами двухкомпонентного подхода является возможность предсказать несовпадение пространственных распределений экситонной и фотонной фракций поляритонного конденсата, которое можно обнаружить в ближнем поле излучения из полости. Кроме того, как можно видеть из рис. 3, при увеличении накачки размер кора поляритонного вихря растет за счет наполнения системы фотонами, что контрастирует с атомными конденсатами, где увеличение числа частиц приводит к уменьшению длины залечивания и, соответственно, сужению кора вихря. Данное обстоятельство может быть легко проверено экспериментально, так как в случае поляритонных систем детектируется именно фотонная компонента конденсата.

Авторы благодарны рецензенту за ценный комментарий и указание полезной литературы [28, 29]. Исследование частично выполнено за счет гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-201.2017.2 (Н.С.В. и М.А.П.) и РФФИ в рамках научного проекта #16-32-60066 мол_а_дк (Н.С.В.). Ю.Е.Л. поддержан Программой фундаментальных исследований ВШЭ. Н.С.В. и М.А.П. благодарны финансовой поддержке Программы Повышения Конкурентноспособности НИЯУ МИФИ.

1. A. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and F. P. Laussy, *Microcavities* (2nd ed.), Oxford Univ. Press (2017).
2. *Exciton Polaritons in Microcavities: New Frontiers*, ed. by D. Sanvitto and V. Timofeev, Springer (2012).
3. A. Imamoglu, R. J. Ram, S. Pau, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **53**, 4250 (1996).
4. J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, Phys. Rev. B **62**, 16247(R) (2000).
5. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, Nature (London) **443**, 409 (2006).
6. S. Christopoulos, G. Baldassarri Höger von Högersthal, A. J. D. Grundy, P. G. Lagoudakis, A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Christmann, R. Butté, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean, Phys. Rev. Lett. **98**, 126405 (2007).

7. J. J. Baumberg, A. V. Kavokin, S. Christopoulos, A. J. D. Grundy, R. Butté, G. Christmann, D. D. Solnyshkov, G. Malpuech, G. Baldassarri Höger von Högersthal, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean, Phys. Rev. Lett. **101**, 136409 (2008).
8. I. Carusotto and C. Ciuti, Phys. Rev. Lett. **93**, 166401 (2004).
9. A. Amo, J. Lefrère, S. Pigeon, C. Adrados, C. Ciuti, I. Carusotto, R. Houdré, E. Giacobino, and A. Bramati, Nat. Phys. **5**, 805 (2009).
10. D. Sanvitto, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, G. Tosi, M. Baudisch, F. P. Laussy, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, L. Marrucci, A. Lemaitre, J. Bloch, C. Tejedor, and L. Vina, Nat. Phys. **6**, 527 (2010).
11. K. G. Lagoudakis, M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. André, Le Si Dang, and B. Deveaud-Plédran, Nat. Phys. **4**, 706 (2008).
12. K. G. Lagoudakis, T. Ostatnický, A. V. Kavokin, Y. G. Rubo, R. André, and B. Deveaud-Plédran, Science **326**, 974 (2009).
13. E. A. Ostrovskaya, J. Abdullaev, A. S. Desyatnikov, M. D. Fraser, and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **86**, 013636 (2012).
14. K. G. Lagoudakis, B. Pietka, M. Wouters, R. André, and B. Deveaud-Plédran, Phys. Rev. Lett. **105**, 120403 (2010).
15. M. Abbarchi, A. Amo, V. G. Sala, D. D. Solnyshkov, H. Flayac, L. Ferrier, I. Sagnes, E. Galopin, A. Lemaître, G. Malpuech, and J. Bloch, Nat. Phys. **9**, 275 (2013).
16. N. S. Voronova, A. A. Elistratov, and Yu. E. Lozovik, Phys. Rev. Lett. **115**, 186402 (2015).
17. M. S. Skolnick, T. A. Fisher, and D. M. Whittaker, Semicond. Sci. Technol. **13**, 645 (1998).
18. L. P. Pitaevskii and S. Stringary, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford Univ. Press (2016).
19. Y. G. Rubo, Phys. Rev. Lett. **99**, 106401 (2007).
20. J. Keeling and N. Berloff, Phys. Rev. Lett. **100**, 250401 (2008).
21. A. V. Gorbach, R. Hartley, and D. V. Skryabin, Phys. Rev. Lett. **104**, 213903 (2010).
22. N. S. Voronova and Yu. E. Lozovik, Phys. Rev. B **86**, 195395 (2012).
23. A. V. Yulin, D. V. Skryabin, and A. V. Gorbach, Phys. Rev. B **92**, 064306 (2015).
24. G. Roumpos, M. D. Fraser, A. Löffler, S. Höfling, A. Forchel, and Y. Yamamoto, Nat. Phys. **7**, 129 (2011).
25. W. H. Nitsche, N. Y. Kim, G. Roumpos, C. Schneider, M. Kamp, S. Höfling, A. Forchel, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. B **90**, 205430 (2014).
26. M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **56**(4), 363 (1986).
27. G. E. Volovik, JETP Lett. **52**, 358 (1990).
28. M. A. Silaev, E. V. Thuneberg, and M. Fogelström, Phys. Rev. Lett. **115**, 235301 (2015).
29. A. A. Zyuzin, J. Garaud, and E. Babaev, Phys. Rev. Lett. **119**, 167001 (2017).
30. C. Ciuti and I. Carusotto, Phys. Stat. Sol. (b) **242**, 2224 (2005).
31. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, Phys. Rev. B **62**, 4825(R) (2000).
32. H. Deng, G. Weighs, C. Santori, J. Bloch, and Y. Yamamoto, Science **298**, 199 (2002).
33. H. Deng, G. Weihs, D. Snoke, J. Bloch, and Y. Yamamoto, PNAS **100**, 15318 (2003).
34. A. S. Brichkin, S. I. Novikov, A. V. Larionov, V. D. Kulakovskii, M. M. Glazov, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, and A. Forchel, Phys. Rev. B **84**, 195301 (2011).
35. A. A. Demenev, Ya. V. Grishina, S. I. Novikov, V. D. Kulakovskii, C. Schneider, and S. Höfling, Phys. Rev. B **94**, 195302 (2016).
36. N. S. Voronova, A. A. Elistratov, and Yu. E. Lozovik, J. Nanophot. **6**, 061802 (2012).