## Эффект отдачи ядра для *g*-фактора тяжелых ионов: перспективы проверки квантовой электродинамики в новой области

А. В. Малышев<sup>1)</sup>, В. М. Шабаев, Д. А. Глазов, И. И. Тупицын

Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2017 г.

Вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор тяжелых водородо- и литиеподобных ионов рассчитан во всех порядках по αZ. Приближенно учтены поправки на конечный размер ядра и межэлектронное взаимодействие к эффекту отдачи. В результате значительно уменьшен второй по величине вклад в полную теоретическую погрешность для значений g-факторов ионов <sup>208</sup>Pb<sup>79+</sup> и <sup>238</sup>U<sup>89+</sup>. Особое внимание уделено тестированию КЭД-вклада в эффект отдачи для g-фактора в экспериментах с тяжелыми ионами. Показано, что в то время, как погрешности поправок на конечный размер и поляризацию ядра маскируют КЭД-эффект отдачи, его можно наблюдать с погрешностью на уровне 1–2% в специальной разности g-факторов тяжелых водородо- и литиеподобных ионов, что дает уникальную возможность для тестирования КЭД в новой области: в области сильной связи за рамками картины Фарри.

DOI: 10.7868/S0370274X17240018

1. Введение. Высокоточные измерения лэмбовского сдвига в тяжелых многозарядных ионах [1–5] позволили протестировать КЭД-эффекты в сильном кулоновском поле на уровне в несколько десятых долей процента (см., например, [6, 7] и ссылки там). К настоящему времени также выполнен ряд высокоточных измерений сверхтонкой структуры (СТС) в тяжелых водородоподобных ионах [8-13]. Главная цель этих экспериментов заключалась в тестировании КЭД при наличии сильных электрических и магнитных полей. Однако, в силу большой погрешности поправки на распределение магнитного момента по объему ядра (так называемый эффект Бора-Вайскопфа), прямая проверка КЭД путем сравнения теории и эксперимента по СТС в водородоподобных ионах оказалась невозможной. Решение данной проблемы было найдено в [14], где было предложено исследовать специальную разность СТС в водородо- и литиеподобных ионах одного и того же изотопа, которая может быть рассчитана с очень высокой точностью. Потребовалось около пятнадцати лет для того, чтобы достичь необходимого уровня точности в экспериментах по измерению СТС в литиеподобном висмуте [15]. Значительное расхождение между полученными экспериментальными данными и результатами наиболее точных теоретических расчетов [16] для специальной разности представляет нерешенную на данный момент проблему ("hyperfine puzzle") [17], которая в настоящий мо-

Современные тесты КЭД для связанных состояний, основанные на исследованиях лэмбовского сдвига и СТС в тяжелых ионах, ограничены областью, где может быть применен стандартный формализм квантовой электродинамики в присутствии внешнего классического поля, известный как картина Фарри. Вклад эффекта отдачи ядра в лэмбовский сдвиг в тяжелых ионах, расчет которого требует применения КЭД за рамками представления Фарри, как правило, замаскирован погрешностями поправок на конечный размер и поляризацию ядра. Этот факт и ограниченная точность эксперимента препятствуют в настоящее время прецизионным тестам КЭД-теории эффекта отдачи для лэмбовского сдвига в тяжелых ионах. Ожидается, что значительно более высокая точность может быть достигнута при измерении gфактора тяжелых ионов в экспериментах, которые запланированы в ближайшем будущем на установках HITRAP/FAIR в Дармштадте и в институте ядерной физики Общества Макса Планка (МРІК) в Гейдельберге. К настоящему времени был выполнен целый ряд высокоточных измерений д-фактора многозарядных ионов в области малых и средних значений заряда ядра Z [18–25]. Измерение изотопической разности *q*-факторов литиеподобного кальция <sup>*A*</sup>Ca<sup>17+</sup> с A = 40 и A = 48 [25] обеспечило первую проверку релятивистской теории эффекта отдачи ядра в многозарядных ионах в присутствии магнитного поля

мент является предметом интенсивных исследований как с теоретической, так и с экспериментальной стороны.

 $<sup>^{1)}{\</sup>rm e\text{-}mail:}$ a.v.malyshev@spbu.ru

[26]. Точность экспериментального значения ограничена на данный момент погрешностью атомной массы изотопа кальция A = 48. В настоящее время в мире осуществляется несколько проектов, нацеленных на повышение точности определения атомных масс. Соответствующее улучшение точности для атомной массы кальция приведет к прямой проверке КЭДвклада в эффект отдачи в многозарядных ионах. Более того, эксперименты по измерению g-фактора тяжелых ионов, ожидаемые в ближайшем будущем, предоставят уникальную возможность для тестирования КЭД-эффекта отдачи в сильно непертурбативном режиме, при условии что полные теоретические значения рассчитаны с требуемой точностью.

Известно [27, 28], однако, что погрешность от эффектов конечного размера и поляризации ядра быстро растет с увеличением Z и маскирует эффект отдачи для очень тяжелых ионов. В работах [29-32] было показано, что погрешности от этих эффектов могут быть значительно уменьшены в специальных разностях значений д-фактора для водородо-, литие- и бороподобных ионов, что дает возможность для прецизионных тестов КЭД связанных состояний в сильных полях. В данной работе мы вычисляем эффект отдачи ядра для *q*-фактора водородо- и литиеподобных ионов <sup>208</sup>Pb и <sup>238</sup>U и показываем, что в случае свинца КЭД-вклад эффекта отдачи в специальную разность на два порядка больше, чем погрешность, с которой может быть вычислено полное теоретическое значение этой разности. Это открывает уникальную возможность для тестирования КЭД в области сильной связи за рамками картины Фарри.

В статье используется релятивистская система единиц ( $\hbar = c = 1, e < 0$ ).

2. Основные формулы. Замкнутая формула для поправки на отдачу к g-фактору водородоподобного иона в первом порядке по отношению масс электрона и ядра m/M и во всех порядках по  $\alpha Z$  ( $\alpha$  – постоянная тонкой структуры) была выведена в работе [33]. Как было отмечено в этой работе, полученная формула позволяет частично учесть поправку на конечный размер ядра к эффекту отдачи, если в ней заменить чисто кулоновский потенциал  $V = -\alpha Z/r$ на потенциал протяженного ядра. Замена потенциала эффективным локальным потенциалом  $V_{\text{eff}}(r)$ , который представляет собой сумму потенциала ядра и экранирующего потенциала, позволяет частично учесть поправки к одноэлектронному вкладу эффекта отдачи в литиеподобном ионе за счет экранирования валентного 2s-электрона электронами  $1s^2$ оболочки. В первом порядке по m/M одноэлектронный вклад эффекта отдачи ядра в q-фактор состояния *а* можно представить в виде суммы вкладов низших и высших порядков по  $\alpha Z$ ,  $\Delta g = \Delta g_{\rm L} + \Delta g_{\rm H}$ , где

$$\Delta g_{\rm L} = \frac{1}{\mu_0 \mathcal{H} m_a} \frac{1}{M} \langle \delta a | \left[ \mathbf{p}^2 - \frac{\alpha Z}{r} \left( \boldsymbol{\alpha} + \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} \right) \cdot \mathbf{p} \right] | a \rangle - \frac{1}{m_a} \frac{m}{M} \langle a | \left( [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]_z - \frac{\alpha Z}{2r} [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}]_z \right) | a \rangle, \qquad (1)$$

$$\Delta g_{\rm H} = \frac{1}{\mu_0 \mathcal{H} m_a} \frac{1}{M} \frac{i}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \langle \delta a | \left( D^k(\omega) - \frac{[p^k, V]}{\omega + i0} \right) \times \right. \\ \left. \times G(\omega + \varepsilon_a) \left( D^k(\omega) + \frac{[p^k, V]}{\omega + i0} \right) | a \rangle + \right. \\ \left. + \langle a | \left( D^k(\omega) - \frac{[p^k, V]}{\omega + i0} \right) G(\omega + \varepsilon_a) \times \right. \\ \left. \times \left( D^k(\omega) + \frac{[p^k, V]}{\omega + i0} \right) | \delta a \rangle + \right. \\ \left. + \langle a | \left( D^k(\omega) - \frac{[p^k, V]}{\omega + i0} \right) G(\omega + \varepsilon_a) (\delta V - \delta \varepsilon_a) \times \right. \\ \left. \times G(\omega + \varepsilon_a) \left( D^k(\omega) + \frac{[p^k, V]}{\omega + i0} \right) | a \rangle \right\}.$$
(2)

Здесь  $\mu_0$  – магнетон Бора,  $m_a$  – проекция углового момента для рассматриваемого состояния,  $p^k = -i\nabla^k$  – оператор импульса, V(r) – потенциал ядра или эффективный потенциал (см. выше),  $|a\rangle$  – дираковская волновая функция в потенциале V(r),  $\varepsilon_a$  – соответствующая энергия,  $\delta V(\mathbf{r}) = -e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{\rm cl}(\mathbf{r})$  описывает взаимодействие электрона с классическим однородным магнитным полем  $\mathbf{A}_{\rm cl}(\mathbf{r}) = [\mathcal{H} \times \mathbf{r}]/2$ ,  $G(\omega) = \sum_n |n\rangle \langle n | [\omega - \varepsilon_n (1 - i0)]^{-1}$ ,  $\delta \varepsilon_a = \langle a | \delta V | a \rangle$ ,  $|\delta a\rangle = \sum_n^{\varepsilon_n \neq \varepsilon_a} |n\rangle \langle n | \delta V | a \rangle (\varepsilon_a - \varepsilon_n)^{-1}$ ,  $D^k(\omega) = -4\pi\alpha Z \alpha^l D^{lk}(\omega)$ ,

$$D^{lk}(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \times \left\{ \frac{\exp\left(i|\omega|r\right)}{r} \delta_{lk} + \nabla^{l} \nabla^{k} \frac{\left(\exp\left(i|\omega|r\right) - 1\right)}{\omega^{2}r} \right\}$$
(3)

– поперечная часть фотонного пропагатора в кулоновской калибровке,  $\alpha$  – вектор матриц Дирака, и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Вклад низших порядков  $\Delta g_{\rm L}$ , который может быть получен из уравнения Брейта, мы будем называть одноэлектронным брейтовским вкладом. Вклад высших порядков  $\Delta g_{\rm H}$  определяется квантовой электродинамикой за рамками брейтовского приближения, мы будем называть его одноэлектронным КЭД-вкладом.

Вклад	$^{208}{\rm Pb}^{81+}$	$^{238}\mathrm{U}^{91+}$
Отдача в приближении Брейта, точечное ядро	0.9632	0.9504
Отдача в приближении Брейта, протяженное ядро	0.8746	0.7583
КЭД-вклад в отдачу, точечное ядро	0.8619	1.4456
КЭД-вклад в отдачу, протяженное ядро	0.8564	1.3491
Полный вклад эффекта отдачи, точечное ядро	1.8251	2.3961
Полный вклад эффекта отдачи, протяженное ядро	1.731(15)	2.107(61)

Таблица 1. Вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор 1s-состояния водородоподобных ионов свинца и урана, выраженный в терминах функции  $F(\alpha Z)$ , определенной уравнением (5). Погрешности, главным образом, обусловлены приближенным характером учета поправки на конечный размер ядра к эффекту отдачи (см. текст).

**Таблица 2.** Вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор 2s состояния литиеподобных ионов свинца и урана, выраженный в терминах функции  $F(\alpha Z)$ , определенной уравнением (5). Все значения получены для случая протяженного ядра. При оценке полных погрешностей принят во внимание приближенный характер учета эффектов электрон-электронного взаимодействия и конечного размера ядра (см. текст).

Вклад	$^{208}{\rm Pb}^{79+}$	$^{238}\mathrm{U}^{89+}$
Одноэлектронный вклад в приближении Брейта	0.2597	0.2471
Двухэлектронный вклад в приближении Брейта	-0.0072	-0.0061
Полная отдача в приближении Брейта	0.2525	0.2410
КЭД-вклад в отдачу, кулоновский потенциал	0.1585	0.2693
КЭД-вклад в отдачу, потенциал СН	0.1525	0.2598
КЭД-вклад в отдачу, потенциал LDF	0.1523	0.2597
КЭД-вклад в отдачу, потенциал РZ	0.1539	0.2622
Полный вклад эффекта отдачи	0.405(5)	0.501(17)

В случае многоэлектронного иона следует также рассмотреть двухэлектронные вклады в эффект отдачи. Для иона с одним электроном сверх заполненных оболочек двухэлектронные вклады легко могут быть получены в рамках одноэлектронного подхода путем переопределения электронного пропагатора [26, 29, 34, 35]. Для основного состояния литиеподобного иона двухэлектронные вклады в эффект отдачи обращаются в ноль в нулевом порядке по 1/Z. Соответствующие поправки к *g*-фактору первого и более высоких порядков по 1/Z могут быть вычислены при помощи эффективных операторов отдачи, полученных в рамках брейтовского приближения [26].

3. Результаты и обсуждение. Согласно вышесказанному, поправка на отдачу ядра к *g*-фактору представляется в виде суммы вклада, отвечающего приближению Брейта, и КЭД-вклада. Для чисто кулоновского поля  $V(r) = -\alpha Z/r$  одноэлектронный брейтовский вклад может быть вычислен аналитически [14]:

$$\Delta g_{\rm L}({\rm p.n.}) = -\frac{m}{M} \frac{2\kappa^2 \varepsilon_a^2 + \kappa m \varepsilon_a - m^2}{2m^2 j(j+1)},\tag{4}$$

где  $\varepsilon_a$  – дираковская энергия, и  $\kappa = (-1)^{j+l+1/2}(j+1/2)$  – релятивистское угловое квантовое число. В данной работе этот вклад был рассчитан по формуле (1) для протяженного ядра. Суммирование по

Письма в ЖЭТФ том 106 вып. 11-12 2017

промежуточным электронным состояниям было выполнено с использованием конечного базисного набора с базисными функциями, построенными из Всплайнов [36] в рамках метода дуального кинетического баланса (ДКБ) [37]. Результаты расчетов для Z = 82, 92, выраженные в терминах функции  $F(\alpha Z)$ ,

$$\Delta g = \frac{m}{M} (\alpha Z)^2 F(\alpha Z), \tag{5}$$

представлены в табл. 1 и 2 для водородо- и литиеподобных ионов соответственно. Для водородоподобных ионов показаны результаты для точечных и протяженных ядер, в то время как для литиеподобных ионов рассмотрен только случай протяженных ядер. Среднеквадратичные зарядовые радиусы ядер взяты из [38]. Как уже было упомянуто выше, двухэлектронный вклад в эффект отдачи к g-фактору равен нулю для основного состояния литиеподобного иона, если ограничиться приближением независимых электронов. Данное приближение соответствует нулевому порядку по 1/Z. В табл. 2 мы приводим двухэлектронные поправки на эффект отдачи, рассчитанные в рамках брейтовского приближения во всех порядках по 1/Z, в соответствии с тем, как это описано в нашей недавней работе [26].

В случае точечного ядра численные расчеты одноэлектронного вклада в высших порядках (КЭД-

734	

Вклад	$^{208}{\rm Pb}^{79+}$	$^{238}\mathrm{U}^{89+}$
Дираковское значение (точечное ядро)	1.932002904	1.910722624
Конечный размер ядра	0.00007857(14)	0.00024162(36)
Одноэлектронная КЭД	0.0024081(5)	0.0024427(8)
Экранированная КЭД	-0.00000191(4)	-0.00000218(6)
Межэлектронное взаимодействие	0.00213934(4)	0.00250005(6)
Брейтовский вклад в отдачу	0.00000239(2)	0.00000250(8)
КЭД-вклад в отдачу	0.000000144(3)	0.00000270(10)
Поляризация ядра	-0.0000004(2)	-0.00000027(14)
Полное теоретическое значение	1.9366273(5)	1.9159051(9)
Теоретическое значение из работы [45]	1.9366272(6)	1.9159048(11)

Таблица 3. Отдельные вклады в g-фактор основного состояния тяжелых литиеподобных ионов.

вклада)  $\Delta q_{\rm H}$  были выполнены для 1*s*- и 2*s*-состояний в [26, 27]. В настоящей работе мы рассчитали этот вклад в случае протяженного ядра. С целью частичного учета влияния электрон-электронного взаимодействия на КЭД-вклад в эффект отдачи для литиеподобных ионов были также использованы остовный потенциал Хартри (СН), потенциал Пердью-Цунгера (PZ) и локальный потенциал Дирака-Фока (LDF). Методы построения и примеры использования данных потенциалов можно найти в работах [39– 43]. Интегрирование по  $\omega$  в уравнении (2) было выполнено аналитически для вклада, который не содержит оператор  $D^k(\omega)$  ("кулоновский" вклад), и численно, после стандартного поворота Вика, для оставшихся вкладов (вклады с одним и двумя поперечными фотонами) [26, 27]. Суммирование по промежуточным электронным состояниям было осуществлено посредством применения конечного базисного набора ДКБ-сплайнов. Результаты расчетов для Z = 82,92, выраженные в терминах функции  $F(\alpha Z)$ , которая определена уравнением (5), представлены в табл. 1 и 2 для водородо- и литиеподобных ионов соответственно. Следует отметить, что в случае ионов урана КЭД-вклад в эффект отдачи даже больше, чем вклад, полученный в приближении Брейта.

Для водородоподобных ионов (см. табл. 1) погрешность определяется главным образом тем, что поправка на конечный размер ядра к эффекту отдачи для *g*-фактора учтена лишь приближенно. Мы предполагаем, что погрешность, связанная с использованием данного приближения, должна быть на том же уровне, что и соответствующий вклад в энергию связи, который был исследован в приближении Брейта в [44]. Согласно работе [44], данный вклад изменяет поправку на конечный размера ядра к эффекту отдачи на 16 % и 21 % для 1*s*-состояния водородоподобных ионов свинца и урана соответственно.

Для литиеподобных ионов (см. табл. 2) в качестве окончательного теоретического значения для

КЭД-вклада в эффект отдачи мы выбрали значение, полученное для потенциала LDF. Погрешность была оценена как сумма двух вкладов. Первый вклад обусловлен приближенным учетом поправки на межэлектронное взаимодействие к КЭД-эффекту отдачи. Чтобы оценить связанную с этим погрешность, мы также выполнили расчеты одноэлектронного брейтовского вклада в потенциале LDF и сравнили полученные результаты с полными значениями для отдачи в брейтовском приближении, представленными в табл. 2. Отношение полученной разницы к результату расчета брейтовского вклада в потенциале LDF было выбрано в качестве относительной погрешности для соответствующей поправки к КЭДвкладу в эффект отдачи. Второй вклад в погрешность связан с приближенным учетом поправки на конечный размер ядра к эффекту отдачи. Он был оценен таким же образом, как это было сделано для водородоподобных ионов в табл. 1.

В табл. 3 представлены полные теоретические значения д-фактора для литиеподобных ионов свинца и урана. За исключением поправок на эффект отдачи, все остальные вклады были взяты из предыдущих компиляций [45–48]. По сравнению с работой [45] мы значительно уменьшили вторую по величине теоретическую погрешность, которая была связана с эффектом отдачи ядра. Как следует из табл. 3, погрешности поправок на конечный размер и поляризацию ядра маскируют КЭД-вклад в эффект отдачи. При этом погрешность поправки на конечный размер ядра была оценена как квадратичная сумма погрешности, полученной путем варьирования среднеквадратичного радиуса в пределах погрешности, указанной в статье [38], и разности результатов, полученных для двух моделей распределения заряда ядра: модели Ферми и модели однородно заряженного шара. Это довольно консервативная оценка для данной погрешности, которая может быть значительно уменьшена, если параметры распределения заряда ядра определены с хорошей точностью из экспериментов с соответствующими мюонными атомами.

Более фундаментальное ограничение точности связано с эффектом поляризации ядра. Для того, чтобы уменьшить погрешность, связанную с ядерными эффектами, в работе [29] было предложено исследовать специальную разность *g*-факторов литиеи водородоподобных ионов:

$$g' = g_{(1s)^2 2s} - \xi g_{1s},\tag{6}$$

где параметр  $\xi$  выбирается так, чтобы сократить в данной разности поправки на конечный размер ядра. Можно показать [29, 30], что и параметр  $\xi$ , и данная разность очень стабильны по отношению к вариации ядерных параметров и модели ядра.

Для свинца параметр  $\xi = 0.1670264$  [29]. Замена модели Ферми для распределения заряда ядра на модель однородно заряженного шара изменяет специальную разность g' на величину порядка  $1 \cdot 10^{-9}$ . Однако, как было отмечено выше, это очень консервативная оценка для данной погрешности. Если мы рассмотрим вариацию среднеквадратичного зарядового радиуса ядра в пределах удвоенного интервала, задаваемого погрешностью радиуса, то получим изменение q' только на величину порядка  $0.1 \cdot 10^{-9}$ . Поправка на поляризацию ядра в эту разность дает вклад  $-0.13(6) \cdot 10^{-9}$  [28, 31]. В то же время, вклад КЭД-эффекта отдачи в специальную разность составляет  $8.7 \cdot 10^{-9}$  и это означает, что тестирование КЭД-эффекта отдачи для q-фактора тяжелых ионов возможно на уровне 1–2 % при условии, что все КЭДпоправки и вклады от межэлектронного взаимодействия рассчитаны с требуемой точностью.

4. Заключение. В данной работе мы исследовали эффект отдачи ядра для *g*-фактора водородои литиеподобных ионов <sup>208</sup>Pb и <sup>238</sup>U для потенциала протяженного ядра и для эффективных потенциалов, которые частично учитывают эффекты межэлектронного взаимодействия в литиеподобных ионах. В результате, значительно уменьшен второй по величине вклад в погрешность теоретических значений *q*-фактора ионов <sup>208</sup>Pb<sup>79+</sup> и <sup>238</sup>U<sup>89+</sup>. Вклад КЭД-эффекта отдачи в специальную разность g-факторов водородо- и литиеподобных ионов сопоставлен с погрешностями поправок на конечный размер и поляризацию ядра. Показано, что КЭДэффект отдачи для д-фактора может быть исследован в высокоточных экспериментах с тяжелыми ионами, открывая уникальную возможность для тестирования КЭД в новой области: области сильной связи за рамками картины Фарри.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект # 17-12-01097).

- 1. Th. Stöhlker, P.H. Mokler, F. Bosch, R.W. Dunford, Franzke, F. О. Klepper, С. Kozhuharov. T. Ludziejewski, F. Nolden, H. Reich, P. Rymuza, Z. Stachura, M. Steck, P. Swiat, and A. Warczak, Phys. Rev. Lett. 85, 3109 (2000).
- 2. A. Gumberidze, Th. Stöhlker, D. Banaś, K. Beckert, P. Beller, H.F. Beyer, F. Bosch, S. Hagmann, C. Kozhuharov, D. Liesen, F. Nolden, X. Ma, P. H. Mokler, M. Steck, D. Sierpowski, and S. Tashenov, Phys. Rev. Lett. 94, 223001 (2005).
- 3. J. Schweppe, A. Belkacem, L. Blumenfeld, N. Claytor, B. Feinberg, H. Gould, V.E. Kostroun, L. Levy, S. Misawa, J. R. Mowat, and M. H. Prior, Phys. Rev. Lett. 66, 1434 (1991).
- 4. C. Brandau, C. Kozhuharov, A. Müller et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. 91, 073202 (2003).
- 5. P. Beiersdorfer, H. Chen, D. B. Thorn, and E. Träbert, Phys. Rev. Lett. 95, 233003 (2005).
- 6. D.A. Glazov, Y.S. Kozhedub, A.V. Maiorova, Shabaev, I.I. V. M. Tupitsyn, A. V. Volotka, C. Kozhuharov, G. Plunien, and Th. Stöhlker, Hyp. Interact. 199, 71 (2011).
- 7. A.V. Volotka, D.A. Glazov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, Ann. Phys. (Berlin) 525, 636 (2013).
- 8. I. Klaft, S. Borneis, T. Engel, B. Fricke, R. Grieser, G. Huber, T. Kühl, D. Marx, R. Neumann, S. Schröder, P. Seelig, and L. Völker, Phys. Rev. Lett. 73, 2425 (1994).
- 9. J.R. Ρ. Crespo López-Urrutia, Beiersdorfer, D.W. Savin, and K. Widmann, Phys. Rev. Lett. 77, 826 (1996).
- 10. J.R. Crespo López-Urrutia, Ρ. Beiersdorfer, K. Widmann, B.B. Birkett, A.-M. Mårtensson-Pendrill, and M.G.H. Gustavsson, Phys. Rev. A 57, 879 (1998).
- 11. P. Seelig, S. Borneis, A. Dax et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. 81, 4824 (1998).
- 12. P. Beiersdorfer, S. B. Utter. K. L. Wong. J. R. López-Urrutia, Crespo J. A. Britten, H. Chen, C.L. Harris, R.S. Thoe, D.B. Thorn, E. Träbert, M.G.H. Gustavsson, C. Forssén, and A.-M. Mårtensson-Pendrill, Phys. Rev. A 64, 032506 (2001).
- 13. J. Ullmann, Z. Andelkovic, A. Dax et al. (Collaboration), J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 48, 144022 (2015).
- 14. V. M. Shabaev, A. N. Artemyev, V. A. Yerokhin, O. M. Zherebtsov, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. 86, 3959 (2001).
- 15. J. Ullmann, Z. Andelkovic, C. Brandau et al. (Collaboration), Nat. Commun. 8, 15484 (2017).

Письма в ЖЭТФ том 106 вып. 11-12 2017

- A. V. Volotka, D. A. Glazov, O. V. Andreev, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. 108, 073001 (2012).
- 17. J.-P. Karr, Nature Physics 13, 533 (2017).
- H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H. J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth, Phys. Rev. Lett. 85, 5308 (2000).
- J. Verdú, S. Djekić, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, T. Beier, H.J. Kluge, and W. Quint, Phys. Rev. Lett. 92, 093002 (2004).
- S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski,
  Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C. H. Keitel, and
  K. Blaum, Phys. Rev. Lett. 107, 023002 (2011).
- A. Wagner, S. Sturm, F. Köhler, D.A. Glazov, A.V. Volotka, G. Plunien, W. Quint, G. Werth, V.M. Shabaev, and K. Blaum, Phys. Rev. Lett. **110**, 033003 (2013).
- D. von Lindenfels, M. Wiesel, D.A. Glazov, A.V. Volotka, M.M. Sokolov, V.M. Shabaev, G. Plunien, W. Quint, G. Birkl, A. Martin, and M. Vogel, Phys. Rev. A 87, 023412 (2013).
- S. Sturm, A. Wagner, M. Kretzschmar, W. Quint, G. Werth, and K. Blaum, Phys. Rev. A 87, 030501(R) (2013).
- S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski, A. Wagner, Z. Harman, G. Werth, W. Quint, C. H. Keitel, and K. Blaum, Nature 506, 467 (2014).
- F. Köhler, K. Blaum, M. Block, S. Chenmarev, S. Eliseev, D.A. Glazov, M. Goncharov, J. Hou, A. Kracke, D. A. Nesterenko, Yu. N. Novikov, W. Quint, E. M. Ramirez, V. M. Shabaev, S. Sturm, A. V. Volotka, and G. Werth, Nat Commun. 7, 10246 (2016).
- 26. V.M. Shabaev, D.A. Glazov, A.V. Malyshev, and I.I. Tupitsyn, Phys. Rev. Lett., accepted for publication.
- V. M. Shabaev and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. Lett. 88, 091801 (2002).
- A. V. Nefiodov, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. 89, 081802 (2002).
- V. M. Shabaev, D. A. Glazov, M. B. Shabaeva, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A 65, 062104 (2002).
- V.M. Shabaev, D.A. Glazov, N.S. Oreshkina, A.V. Volotka, G. Plunien, H.J. Kluge, and W. Quint,

Phys. Rev. Lett. 96, 253002 (2006).

- A. V. Volotka and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. 113, 023002 (2014).
- V. A. Yerokhin, E. Berseneva, Z. Harman, I. I. Tupitsyn, and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **116**, 100801 (2016).
- 33. V. M. Shabaev, Phys. Rev. A  ${\bf 64},\,052104$  (2001).
- 34. V. M. Shabaev, Phys. Rep. **356**, 119 (2002).
- A. A. Shchepetnov, D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, J. Phys. Conf. Ser. 583, 012001 (2015).
- J. Sapirstein and W.R. Johnson, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 29, 5213 (1996).
- V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. 93, 130405 (2004).
- I. Angeli and K.P. Marinova, At. Data Nucl. Data Tables 99, 69 (2013).
- J. P. Perdew and A. Zunger, Phys. Rev. B 23, 5048 (1981).
- J. Sapirstein and K. T. Cheng, Phys. Rev. A 66, 042501 (2002).
- V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, K. Pachucki, G. Plunien, and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. A 72, 062105 (2005).
- J. Sapirstein and K. T. Cheng, Phys. Rev. A 83, 012504 (2011).
- A. V. Malyshev, D. A. Glazov, A. V. Volotka, I.I. Tupitsyn, V. M. Shabaev, G. Plunien, and Th. Stöhlker, Phys. Rev. A 96, 022512 (2017).
- I. A. Aleksandrov, A. A. Shchepetnov, D. A. Glazov, and V. M. Shabaev, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 48, 144004 (2015).
- A. V. Volotka, D. A. Glazov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. 112, 253004 (2014).
- D. A. Glazov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, A. V. Volotka, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A 70, 062104 (2004).
- D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Lett. A 357, 330 (2006).
- D.A. Glazov, A.V. Volotka, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. A 81, 062112 (2010).