Письма в ЖЭТФ, том 106, вып. 12, с. 731 – 736

Эффект отдачи ядра для g-фактора тяжелых ионов: перспективы проверки квантовой электродинамики в новой области

А. В. Малышев[1)], В. М. Шабаев, Д. А. Глазов, И. И. Тупицын

Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2017 г.

Вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор тяжелых водородо- и литиеподобных ионов рассчитан во всех порядках по αZ. Приближенно учтены поправки на конечный размер ядра и межэлектронное взаимодействие к эффекту отдачи. В результате значительно уменьшен второй по величине вклад в полную теоретическую погрешность для значений g-факторов ионов $^{208}\mathrm{Pb}^{79+}$ и $^{238}\mathrm{U}^{89+}$. Особое внимание уделено тестированию КЭД-вклада в эффект отдачи для g-фактора в экспериментах с тяжелыми ионами. Показано, что в то время, как погрешности поправок на конечный размер и поляризацию ядра маскируют КЭД-эффект отдачи, его можно наблюдать с погрешностью на уровне 1–2 % в специальной разности g-факторов тяжелых водородо- и литиеподобных ионов, что дает уникальную возможность для тестирования КЭД в новой области: в области сильной связи за рамками картины Фарри.

DOI: 10.7868/S0370274X17240018

1. Введение. Высокоточные измерения лэмбовского сдвига в тяжелых многозарядных ионах [1–5] позволили протестировать КЭД-эффекты в сильном кулоновском поле на уровне в несколько десятых долей процента (см., например, [6, 7] и ссылки там). К настоящему времени также выполнен ряд высокоточных измерений сверхтонкой структуры (СТС) в тяжелых водородоподобных ионах [8–13]. Главная цель этих экспериментов заключалась в тестировании КЭД при наличии сильных электрических и магнитных полей. Однако, в силу большой погрешности поправки на распределение магнитного момента по объему ядра (так называемый эффект Бора–Вайскопфа), прямая проверка КЭД путем сравнения теории и эксперимента по СТС в водородоподобных ионах оказалась невозможной. Решение данной проблемы было найдено в [14], где было предложено исследовать специальную разность СТС в водородо- и литиеподобных ионах одного и того же изотопа, которая может быть рассчитана с очень высокой точностью. Потребовалось около пятнадцати лет для того, чтобы достичь необходимого уровня точности в экспериментах по измерению СТС в литиеподобном висмуте [15]. Значительное расхождение между полученными экспериментальными данными и результатами наиболее точных теоретических расчетов [16] для специальной разности представляет нерешенную на данный момент проблему (“hyperfine puzzle”) [17], которая в настоящий момент является предметом интенсивных исследований как с теоретической, так и с экспериментальной стороны.

Современные тесты КЭД для связанных состояний, основанные на исследованиях лэмбовского сдвига и СТС в тяжелых ионах, ограничены областью, где может быть применен стандартный формализм квантовой электродинамики в присутствии внешнего классического поля, известный как картина Фарри. Вклад эффекта отдачи ядра в лэмбовский сдвиг в тяжелых ионах, расчет которого требует применения КЭД за рамками представления Фарри, как правило, замаскирован погрешностями поправок на конечный размер и поляризацию ядра. Этот факт и ограниченная точность эксперимента препятствуют в настоящее время прецизионным тестам КЭД-теории эффекта отдачи для лэмбовского сдвига в тяжелых ионах. Ожидается, что значительно более высокая точность может быть достигнута при измерении g-фактора тяжелых ионов в экспериментах, которые запланированы в ближайшем будущем на установках HITRAP/FAIR в Дармштадте и в институте ядерной физики Общества Макса Планка (MPIK) в Гейдельберге. К настоящему времени был выполнен целый ряд высокоточных измерений g-фактора многозарядных ионов в области малых и средних значений заряда ядра Z [18–25]. Измерение изотопической разности g-факторов литиеподобного кальция $^{A}\mathrm{Ca}^{17+}$ с $A = 40$ и $A = 48$ [25] обеспечило первую проверку релятивистской теории эффекта отдачи ядра в многозарядных ионах в присутствии магнитного поля

[1)]e-mail: a.v.malyshev@spbu.ru

[26]. Точность экспериментального значения ограничена на данный момент погрешностью атомной массы изотопа кальция $A = 48$. В настоящее время в мире осуществляется несколько проектов, нацеленных на повышение точности определения атомных масс. Соответствующее улучшение точности для атомной массы кальция приведет к прямой проверке КЭД-вклада в эффект отдачи в многозарядных ионах. Более того, эксперименты по измерению g-фактора тяжелых ионов, ожидаемые в ближайшем будущем, предоставят уникальную возможность для тестирования КЭД-эффекта отдачи в сильно непертурбативном режиме, при условии что полные теоретические значения рассчитаны с требуемой точностью.

Известно [27, 28], однако, что погрешность от эффектов конечного размера и поляризации ядра быстро растет с увеличением Z и маскирует эффект отдачи для очень тяжелых ионов. В работах [29–32] было показано, что погрешности от этих эффектов могут быть значительно уменьшены в специальных разностях значений g-фактора для водородо-, литие- и бороподобных ионов, что дает возможность для прецизионных тестов КЭД связанных состояний в сильных полях. В данной работе мы вычисляем эффект отдачи ядра для g-фактора водородо- и литиеподобных ионов ^{208}Pb и ^{238}U и показываем, что в случае свинца КЭД-вклад эффекта отдачи в специальную разность на два порядка больше, чем погрешность, с которой может быть вычислено полное теоретическое значение этой разности. Это открывает уникальную возможность для тестирования КЭД в области сильной связи за рамками картины Фарри.

В статье используется релятивистская система единиц ($\hbar = c = 1$, $e < 0$).

2. Основные формулы. Замкнутая формула для поправки на отдачу к g-фактору водородоподобного иона в первом порядке по отношению масс электрона и ядра m/M и во всех порядках по αZ (α – постоянная тонкой структуры) была выведена в работе [33]. Как было отмечено в этой работе, полученная формула позволяет частично учесть поправку на конечный размер ядра к эффекту отдачи, если в ней заменить чисто кулоновский потенциал $V = -\alpha Z/r$ на потенциал протяженного ядра. Замена потенциала эффективным локальным потенциалом $V_{\rm eff}(r)$, который представляет собой сумму потенциала ядра и экранирующего потенциала, позволяет частично учесть поправки к одноэлектронному вкладу эффекта отдачи в литиеподобном ионе за счет экранирования валентного $2s$-электрона электронами $1s^2$-оболочки. В первом порядке по m/M одноэлектронный вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор состояния a можно представить в виде суммы вкладов низших и высших порядков по αZ, $\Delta g = \Delta g_{\rm L} + \Delta g_{\rm H}$, где

$$\begin{aligned}\Delta g_{\rm L} &= \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mathcal{H} m_a}\frac{1}{M}\langle\delta a|\Big[\mathbf{p}^2 - \frac{\alpha Z}{r}\Big(\boldsymbol{\alpha} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2}\Big)\cdot\mathbf{p}\Big]|a\rangle - \\ &- \frac{1}{m_a}\frac{m}{M}\langle a|\Big([\mathbf{r}\times\mathbf{p}]_z - \frac{\alpha Z}{2r}[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\alpha}]_z\Big)|a\rangle, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\Delta g_{\rm H} &= \frac{1}{\mu_0 \mathcal{H} m_a}\frac{1}{M}\frac{i}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\Big\{\langle\delta a|\Big(D^k(\omega) - \frac{[p^k, V]}{\omega + i0}\Big) \times \\ &\times G(\omega+\varepsilon_a)\Big(D^k(\omega) + \frac{[p^k, V]}{\omega + i0}\Big)|a\rangle + \\ &+ \langle a|\Big(D^k(\omega) - \frac{[p^k, V]}{\omega + i0}\Big)G(\omega+\varepsilon_a) \times \\ &\times \Big(D^k(\omega) + \frac{[p^k, V]}{\omega + i0}\Big)|\delta a\rangle + \\ &+ \langle a|\Big(D^k(\omega) - \frac{[p^k, V]}{\omega + i0}\Big)G(\omega+\varepsilon_a)(\delta V - \delta\varepsilon_a) \times \\ &\times G(\omega+\varepsilon_a)\Big(D^k(\omega) + \frac{[p^k, V]}{\omega + i0}\Big)|a\rangle\Big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь μ_0 – магнетон Бора, m_a – проекция углового момента для рассматриваемого состояния, $p^k = -i\nabla^k$ – оператор импульса, $V(r)$ – потенциал ядра или эффективный потенциал (см. выше), $|a\rangle$ – дираковская волновая функция в потенциале $V(r)$, ε_a – соответствующая энергия, $\delta V(\mathbf{r}) = -e\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}_{\rm cl}(\mathbf{r})$ описывает взаимодействие электрона с классическим однородным магнитным полем $\mathbf{A}_{\rm cl}(\mathbf{r}) = [\mathcal{H}\times\mathbf{r}]/2$, $G(\omega) = \sum_n |n\rangle\langle n|[\omega - \varepsilon_n(1-i0)]^{-1}$, $\delta\varepsilon_a = \langle a|\delta V|a\rangle$, $|\delta a\rangle = \sum_n^{\varepsilon_n\neq\varepsilon_a}|n\rangle\langle n|\delta V|a\rangle(\varepsilon_a - \varepsilon_n)^{-1}$, $D^k(\omega) = -4\pi\alpha Z\alpha^l D^{lk}(\omega)$,

$$\begin{aligned}D^{lk}(\omega,\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \times \\ &\times \Big\{\frac{\exp(i|\omega|r)}{r}\delta_{lk} + \nabla^l\nabla^k\frac{(\exp(i|\omega|r) - 1)}{\omega^2 r}\Big\}\end{aligned} \tag{3}$$

– поперечная часть фотонного пропагатора в кулоновской калибровке, $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор матриц Дирака, и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Вклад низших порядков $\Delta g_{\rm L}$, который может быть получен из уравнения Брейта, мы будем называть одноэлектронным брейтовским вкладом. Вклад высших порядков $\Delta g_{\rm H}$ определяется квантовой электродинамикой за рамками брейтовского приближения, мы будем называть его одноэлектронным КЭД-вкладом.

Таблица 1. Вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор $1s$-состояния водородоподобных ионов свинца и урана, выраженный в терминах функции $F(\alpha Z)$, определенной уравнением (5). Погрешности, главным образом, обусловлены приближенным характером учета поправки на конечный размер ядра к эффекту отдачи (см. текст).

Вклад	$^{208}\mathrm{Pb}^{81+}$	$^{238}\mathrm{U}^{91+}$
Отдача в приближении Брейта, точечное ядро	0.9632	0.9504
Отдача в приближении Брейта, протяженное ядро	0.8746	0.7583
КЭД-вклад в отдачу, точечное ядро	0.8619	1.4456
КЭД-вклад в отдачу, протяженное ядро	0.8564	1.3491
Полный вклад эффекта отдачи, точечное ядро	1.8251	2.3961
Полный вклад эффекта отдачи, протяженное ядро	1.731(15)	2.107(61)

Таблица 2. Вклад эффекта отдачи ядра в g-фактор $2s$ состояния литиеподобных ионов свинца и урана, выраженный в терминах функции $F(\alpha Z)$, определенной уравнением (5). Все значения получены для случая протяженного ядра. При оценке полных погрешностей принят во внимание приближенный характер учета эффектов электрон-электронного взаимодействия и конечного размера ядра (см. текст).

Вклад	$^{208}\mathrm{Pb}^{79+}$	$^{238}\mathrm{U}^{89+}$
Одноэлектронный вклад в приближении Брейта	0.2597	0.2471
Двухэлектронный вклад в приближении Брейта	−0.0072	−0.0061
Полная отдача в приближении Брейта	0.2525	0.2410
КЭД-вклад в отдачу, кулоновский потенциал	0.1585	0.2693
КЭД-вклад в отдачу, потенциал CH	0.1525	0.2598
КЭД-вклад в отдачу, потенциал LDF	0.1523	0.2597
КЭД-вклад в отдачу, потенциал PZ	0.1539	0.2622
Полный вклад эффекта отдачи	0.405(5)	0.501(17)

В случае многоэлектронного иона следует также рассмотреть двухэлектронные вклады в эффект отдачи. Для иона с одним электроном сверх заполненных оболочек двухэлектронные вклады легко могут быть получены в рамках одноэлектронного подхода путем переопределения электронного пропагатора [26, 29, 34, 35]. Для основного состояния литиеподобного иона двухэлектронные вклады в эффект отдачи обращаются в ноль в нулевом порядке по $1/Z$. Соответствующие поправки к g-фактору первого и более высоких порядков по $1/Z$ могут быть вычислены при помощи эффективных операторов отдачи, полученных в рамках брейтовского приближения [26].

3. Результаты и обсуждение. Согласно вышесказанному, поправка на отдачу ядра к g-фактору представляется в виде суммы вклада, отвечающего приближению Брейта, и КЭД-вклада. Для чисто кулоновского поля $V(r) = -\alpha Z/r$ одноэлектронный брейтовский вклад может быть вычислен аналитически [14]:

$$\Delta g_{\mathrm{L}}(\mathrm{p.n.}) = -\frac{m}{M}\frac{2\kappa^2\varepsilon_a^2 + \kappa m\varepsilon_a - m^2}{2m^2 j(j+1)}, \qquad (4)$$

где ε_a – дираковская энергия, и $\kappa = (-1)^{j+l+1/2}(j + 1/2)$ – релятивистское угловое квантовое число. В данной работе этот вклад был рассчитан по формуле (1) для протяженного ядра. Суммирование по промежуточным электронным состояниям было выполнено с использованием конечного базисного набора с базисными функциями, построенными из B-сплайнов [36] в рамках метода дуального кинетического баланса (ДКБ) [37]. Результаты расчетов для $Z = 82, 92$, выраженные в терминах функции $F(\alpha Z)$,

$$\Delta g = \frac{m}{M}(\alpha Z)^2 F(\alpha Z), \qquad (5)$$

представлены в табл. 1 и 2 для водородо- и литиеподобных ионов соответственно. Для водородоподобных ионов показаны результаты для точечных и протяженных ядер, в то время как для литиеподобных ионов рассмотрен только случай протяженных ядер. Среднеквадратичные зарядовые радиусы ядер взяты из [38]. Как уже было упомянуто выше, двухэлектронный вклад в эффект отдачи к g-фактору равен нулю для основного состояния литиеподобного иона, если ограничиться приближением независимых электронов. Данное приближение соответствует нулевому порядку по $1/Z$. В табл. 2 мы приводим двухэлектронные поправки на эффект отдачи, рассчитанные в рамках брейтовского приближения во всех порядках по $1/Z$, в соответствии с тем, как это описано в нашей недавней работе [26].

В случае точечного ядра численные расчеты одноэлектронного вклада в высших порядках (КЭД-

Таблица 3. Отдельные вклады в g-фактор основного состояния тяжелых литиеподобных ионов.

Вклад	$^{208}Pb^{79+}$	$^{238}U^{89+}$
Дираковское значение (точечное ядро)	1.932002904	1.910722624
Конечный размер ядра	0.00007857(14)	0.00024162(36)
Одноэлектронная КЭД	0.0024081(5)	0.0024427(8)
Экранированная КЭД	−0.00000191(4)	−0.00000218(6)
Межэлектронное взаимодействие	0.00213934(4)	0.00250005(6)
Брейтовский вклад в отдачу	0.000000239(2)	0.000000250(8)
КЭД-вклад в отдачу	0.000000144(3)	0.000000270(10)
Поляризация ядра	−0.00000004(2)	−0.00000027(14)
Полное теоретическое значение	1.9366273(5)	1.9159051(9)
Теоретическое значение из работы [45]	1.9366272(6)	1.9159048(11)

вклада) $\Delta g_{\rm H}$ были выполнены для $1s$- и $2s$-состояний в [26, 27]. В настоящей работе мы рассчитали этот вклад в случае протяженного ядра. С целью частичного учета влияния электрон-электронного взаимодействия на КЭД-вклад в эффект отдачи для литиеподобных ионов были также использованы остовный потенциал Хартри (CH), потенциал Пердью–Цунгера (PZ) и локальный потенциал Дирака–Фока (LDF). Методы построения и примеры использования данных потенциалов можно найти в работах [39–43]. Интегрирование по ω в уравнении (2) было выполнено аналитически для вклада, который не содержит оператор $D^k(\omega)$ ("кулоновский" вклад), и численно, после стандартного поворота Вика, для оставшихся вкладов (вклады с одним и двумя поперечными фотонами) [26, 27]. Суммирование по промежуточным электронным состояниям было осуществлено посредством применения конечного базисного набора ДКБ-сплайнов. Результаты расчетов для $Z = 82, 92$, выраженные в терминах функции $F(\alpha Z)$, которая определена уравнением (5), представлены в табл. 1 и 2 для водородо- и литиеподобных ионов соответственно. Следует отметить, что в случае ионов урана КЭД-вклад в эффект отдачи даже больше, чем вклад, полученный в приближении Брейта.

Для водородоподобных ионов (см. табл. 1) погрешность определяется главным образом тем, что поправка на конечный размер ядра к эффекту отдачи для g-фактора учтена лишь приближенно. Мы предполагаем, что погрешность, связанная с использованием данного приближения, должна быть на том же уровне, что и соответствующий вклад в энергию связи, который был исследован в приближении Брейта в [44]. Согласно работе [44], данный вклад изменяет поправку на конечный размера ядра к эффекту отдачи на 16 % и 21 % для $1s$-состояния водородоподобных ионов свинца и урана соответственно.

Для литиеподобных ионов (см. табл. 2) в качестве окончательного теоретического значения для КЭД-вклада в эффект отдачи мы выбрали значение, полученное для потенциала LDF. Погрешность была оценена как сумма двух вкладов. Первый вклад обусловлен приближенным учетом поправки на межэлектронное взаимодействие к КЭД-эффекту отдачи. Чтобы оценить связанную с этим погрешность, мы также выполнили расчеты одноэлектронного брейтовского вклада в потенциале LDF и сравнили полученные результаты с полными значениями для отдачи в брейтовском приближении, представленными в табл. 2. Отношение полученной разницы к результату расчета брейтовского вклада в потенциале LDF было выбрано в качестве относительной погрешности для соответствующей поправки к КЭД-вкладу в эффект отдачи. Второй вклад в погрешность связан с приближенным учетом поправки на конечный размер ядра к эффекту отдачи. Он был оценен таким же образом, как это было сделано для водородоподобных ионов в табл. 1.

В табл. 3 представлены полные теоретические значения g-фактора для литиеподобных ионов свинца и урана. За исключением поправок на эффект отдачи, все остальные вклады были взяты из предыдущих компиляций [45–48]. По сравнению с работой [45] мы значительно уменьшили вторую по величине теоретическую погрешность, которая была связана с эффектом отдачи ядра. Как следует из табл. 3, погрешности поправок на конечный размер и поляризацию ядра маскируют КЭД-вклад в эффект отдачи. При этом погрешность поправки на конечный размер ядра была оценена как квадратичная сумма погрешности, полученной путем варьирования среднеквадратичного радиуса в пределах погрешности, указанной в статье [38], и разности результатов, полученных для двух моделей распределения заряда ядра: модели Ферми и модели однородно заряженного шара. Это довольно консервативная оценка для данной погрешности, которая может быть значительно уменьшена, если параметры распределения заряда ядра определены с хорошей точностью из экспериментов с соответствующими мюонными атомами.

Более фундаментальное ограничение точности связано с эффектом поляризации ядра. Для того, чтобы уменьшить погрешность, связанную с ядерными эффектами, в работе [29] было предложено исследовать специальную разность g-факторов литие- и водородоподобных ионов:

$$g' = g_{(1s)^2 2s} - \xi g_{1s}, \tag{6}$$

где параметр ξ выбирается так, чтобы сократить в данной разности поправки на конечный размер ядра. Можно показать [29, 30], что и параметр ξ, и данная разность очень стабильны по отношению к вариации ядерных параметров и модели ядра.

Для свинца параметр $\xi = 0.1670264$ [29]. Замена модели Ферми для распределения заряда ядра на модель однородно заряженного шара изменяет специальную разность g' на величину порядка $1 \cdot 10^{-9}$. Однако, как было отмечено выше, это очень консервативная оценка для данной погрешности. Если мы рассмотрим вариацию среднеквадратичного зарядового радиуса ядра в пределах удвоенного интервала, задаваемого погрешностью радиуса, то получим изменение g' только на величину порядка $0.1 \cdot 10^{-9}$. Поправка на поляризацию ядра в эту разность дает вклад $-0.13(6) \cdot 10^{-9}$ [28, 31]. В то же время, вклад КЭД-эффекта отдачи в специальную разность составляет $8.7 \cdot 10^{-9}$ и это означает, что тестирование КЭД-эффекта отдачи для g-фактора тяжелых ионов возможно на уровне 1–2 % при условии, что все КЭД-поправки и вклады от межэлектронного взаимодействия рассчитаны с требуемой точностью.

4. Заключение. В данной работе мы исследовали эффект отдачи ядра для g-фактора водородо- и литиеподобных ионов ^{208}Pb и ^{238}U для потенциала протяженного ядра и для эффективных потенциалов, которые частично учитывают эффекты межэлектронного взаимодействия в литиеподобных ионах. В результате, значительно уменьшен второй по величине вклад в погрешность теоретических значений g-фактора ионов $^{208}\mathrm{Pb}^{79+}$ и $^{238}\mathrm{U}^{89+}$. Вклад КЭД-эффекта отдачи в специальную разность g-факторов водородо- и литиеподобных ионов сопоставлен с погрешностями поправок на конечный размер и поляризацию ядра. Показано, что КЭД-эффект отдачи для g-фактора может быть исследован в высокоточных экспериментах с тяжелыми ионами, открывая уникальную возможность для тестирования КЭД в новой области: области сильной связи за рамками картины Фарри.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект # 17-12-01097).

1. Th. Stöhlker, P. H. Mokler, F. Bosch, R. W. Dunford, F. Franzke, O. Klepper, C. Kozhuharov, T. Ludziejewski, F. Nolden, H. Reich, P. Rymuza, Z. Stachura, M. Steck, P. Swiat, and A. Warczak, Phys. Rev. Lett. **85**, 3109 (2000).
2. A. Gumberidze, Th. Stöhlker, D. Banaś, K. Beckert, P. Beller, H. F. Beyer, F. Bosch, S. Hagmann, C. Kozhuharov, D. Liesen, F. Nolden, X. Ma, P. H. Mokler, M. Steck, D. Sierpowski, and S. Tashenov, Phys. Rev. Lett. **94**, 223001 (2005).
3. J. Schweppe, A. Belkacem, L. Blumenfeld, N. Claytor, B. Feinberg, H. Gould, V. E. Kostroun, L. Levy, S. Misawa, J. R. Mowat, and M. H. Prior, Phys. Rev. Lett. **66**, 1434 (1991).
4. C. Brandau, C. Kozhuharov, A. Müller et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **91**, 073202 (2003).
5. P. Beiersdorfer, H. Chen, D. B. Thorn, and E. Träbert, Phys. Rev. Lett. **95**, 233003 (2005).
6. D. A. Glazov, Y. S. Kozhedub, A. V. Maiorova, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, A. V. Volotka, C. Kozhuharov, G. Plunien, and Th. Stöhlker, Hyp. Interact. **199**, 71 (2011).
7. A. V. Volotka, D. A. Glazov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, Ann. Phys. (Berlin) **525**, 636 (2013).
8. I. Klaft, S. Borneis, T. Engel, B. Fricke, R. Grieser, G. Huber, T. Kühl, D. Marx, R. Neumann, S. Schröder, P. Seelig, and L. Völker, Phys. Rev. Lett. **73**, 2425 (1994).
9. J. R. Crespo López-Urrutia, P. Beiersdorfer, D. W. Savin, and K. Widmann, Phys. Rev. Lett. **77**, 826 (1996).
10. J. R. Crespo López-Urrutia, P. Beiersdorfer, K. Widmann, B. B. Birkett, A.-M. Mårtensson-Pendrill, and M. G. H. Gustavsson, Phys. Rev. A **57**, 879 (1998).
11. P. Seelig, S. Borneis, A. Dax et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **81**, 4824 (1998).
12. P. Beiersdorfer, S. B. Utter, K. L. Wong, J. R. Crespo López-Urrutia, J. A. Britten, H. Chen, C. L. Harris, R. S. Thoe, D. B. Thorn, E. Träbert, M. G. H. Gustavsson, C. Forssén, and A.-M. Mårtensson-Pendrill, Phys. Rev. A **64**, 032506 (2001).
13. J. Ullmann, Z. Andelkovic, A. Dax et al. (Collaboration), J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **48**, 144022 (2015).
14. V. M. Shabaev, A. N. Artemyev, V. A. Yerokhin, O. M. Zherebtsov, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **86**, 3959 (2001).
15. J. Ullmann, Z. Andelkovic, C. Brandau et al. (Collaboration), Nat. Commun. **8**, 15484 (2017).

16. A.V. Volotka, D.A. Glazov, O.V. Andreev, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. **108**, 073001 (2012).
17. J.-P. Karr, Nature Physics **13**, 533 (2017).
18. H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H. J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth, Phys. Rev. Lett. **85**, 5308 (2000).
19. J. Verdú, S. Djekić, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, T. Beier, H. J. Kluge, and W. Quint, Phys. Rev. Lett. **92**, 093002 (2004).
20. S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski, Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C. H. Keitel, and K. Blaum, Phys. Rev. Lett. **107**, 023002 (2011).
21. A. Wagner, S. Sturm, F. Köhler, D. A. Glazov, A.V. Volotka, G. Plunien, W. Quint, G. Werth, V.M. Shabaev, and K. Blaum, Phys. Rev. Lett. **110**, 033003 (2013).
22. D. von Lindenfels, M. Wiesel, D. A. Glazov, A.V. Volotka, M.M. Sokolov, V.M. Shabaev, G. Plunien, W. Quint, G. Birkl, A. Martin, and M. Vogel, Phys. Rev. A **87**, 023412 (2013).
23. S. Sturm, A. Wagner, M. Kretzschmar, W. Quint, G. Werth, and K. Blaum, Phys. Rev. A **87**, 030501(R) (2013).
24. S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski, A. Wagner, Z. Harman, G. Werth, W. Quint, C. H. Keitel, and K. Blaum, Nature **506**, 467 (2014).
25. F. Köhler, K. Blaum, M. Block, S. Chenmarev, S. Eliseev, D. A. Glazov, M. Goncharov, J. Hou, A. Kracke, D. A. Nesterenko, Yu. N. Novikov, W. Quint, E. M. Ramirez, V. M. Shabaev, S. Sturm, A. V. Volotka, and G. Werth, Nat Commun. **7**, 10246 (2016).
26. V.M. Shabaev, D.A. Glazov, A.V. Malyshev, and I. I. Tupitsyn, Phys. Rev. Lett., accepted for publication.
27. V. M. Shabaev and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. Lett. **88**, 091801 (2002).
28. A. V. Nefiodov, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **89**, 081802 (2002).
29. V.M. Shabaev, D.A. Glazov, M.B. Shabaeva, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A **65**, 062104 (2002).
30. V.M. Shabaev, D.A. Glazov, N.S. Oreshkina, A. V. Volotka, G. Plunien, H. J. Kluge, and W. Quint, Phys. Rev. Lett. **96**, 253002 (2006).
31. A. V. Volotka and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. **113**, 023002 (2014).
32. V. A. Yerokhin, E. Berseneva, Z. Harman, I. I. Tupitsyn, and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **116**, 100801 (2016).
33. V. M. Shabaev, Phys. Rev. A **64**, 052104 (2001).
34. V. M. Shabaev, Phys. Rep. **356**, 119 (2002).
35. A. A. Shchepetnov, D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, J. Phys. Conf. Ser. **583**, 012001 (2015).
36. J. Sapirstein and W. R. Johnson, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **29**, 5213 (1996).
37. V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, V.A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **93**, 130405 (2004).
38. I. Angeli and K. P. Marinova, At. Data Nucl. Data Tables **99**, 69 (2013).
39. J. P. Perdew and A. Zunger, Phys. Rev. B **23**, 5048 (1981).
40. J. Sapirstein and K. T. Cheng, Phys. Rev. A **66**, 042501 (2002).
41. V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, K. Pachucki, G. Plunien, and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. A **72**, 062105 (2005).
42. J. Sapirstein and K. T. Cheng, Phys. Rev. A **83**, 012504 (2011).
43. A.V. Malyshev, D.A. Glazov, A.V. Volotka, I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev, G. Plunien, and Th. Stöhlker, Phys. Rev. A **96**, 022512 (2017).
44. I. A. Aleksandrov, A. A. Shchepetnov, D. A. Glazov, and V. M. Shabaev, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **48**, 144004 (2015).
45. A.V. Volotka, D.A. Glazov, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. **112**, 253004 (2014).
46. D. A. Glazov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, A. V. Volotka, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A **70**, 062104 (2004).
47. D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Lett. A **357**, 330 (2006).
48. D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. A **81**, 062112 (2010).