

Неустойчивость магнитного поля, вызванная аномальными магнитными моментами массивных фермионов и электрослабым взаимодействием с фоновым веществом

М. С. Дворников¹⁾

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН,
108840 Троицк, Москва, Россия*

Физический факультет, Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 24 октября 2017 г.

После переработки 15 ноября 2017 г.

Показано, что может возбуждаться электрический ток массивных фермионов вдоль внешнего магнитного поля в случае, когда частицы обладают аномальными магнитными моментами и электрослабо взаимодействуют с фоновым веществом. Этот ток вычисляется на основе точного решения уравнения Дирака во внешних полях. Показано, что магнитное поле становится неустойчивым, если данный ток учитывается в уравнениях Максвелла. Рассматривая частный случай вырожденного электронного газа, встречающегося в нейтронной звезде, обнаружено что затравочное магнитное поле может быть значительно усилено. Также обсуждается применение полученных результатов в астрофизике.

DOI: 10.7868/S0370274X17240031

Проблема неустойчивости магнитного поля важна, например, в контексте существования сильных астрофизических магнитных полей [1]. Помимо общепринятых МГД-механизмов для генерации магнитных полей в астрофизике, в последнее время обсуждаются подходы, использующие методы физики элементарных частиц. Данные подходы, главным образом, основаны на киральном магнитном эффекте (КМЭ) [2], который состоит в возникновении аномального тока безмассовых заряженных частиц вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B} ,

$$\mathbf{J}_{\text{СМЕ}} = \frac{e^2}{4\pi^2} (\mu_R - \mu_L) \mathbf{B}, \quad (1)$$

где e – заряд частиц, а $\mu_{R,L}$ – химические потенциалы правых и левых киральных фермионов.

Если $\mathbf{J}_{\text{СМЕ}}$ учитывается в уравнениях Максвелла, то затравочное магнитное поле становится неустойчивым и может быть значительно усилено. Приложения КМЭ для генерации астрофизических и космологических магнитных полей рассмотрены в книге [3].

Однако существование КМЭ в астрофизических средах является проблематичным. В работах [2, 4] показано, что $\mathbf{J}_{\text{СМЕ}}$ отличен от нуля, если только масса заряженных частиц, образующих ток, точно

равна нулю, т.е. киральная симметрия оказывается ненарушенной. Для электронов восстановление киральной симметрии за счет электрослабых взаимодействий маловероятно при разумных плотностях, которые встречаются в современной Вселенной [5]. Киральная симметрия может быть ненарушенной в кварковом веществе благодаря эффектам сильных взаимодействий [6]. Генерация магнитных полей в кварковом веществе, которое может существовать в недрах некоторых компактных звезд, обсуждалась в работах [7, 8]. Тем не менее подобный подход выглядит довольно экзотическим.

Таким образом, вопрос о существовании электрического тока $\mathbf{J} \sim \mathbf{B}$, который может привести к неустойчивости магнитного поля, для массивных частиц является весьма важным для построения моделей астрофизических магнитных полей. Подобный ток для массивных электронов, электрослабо взаимодействующих с неоднородным веществом был вычислен в работе [9]. Однако пространственный масштаб генерируемых магнитных полей ограничен масштабом неоднородности фонового вещества.

В настоящей работе рассмотрен альтернативный механизм неустойчивости магнитного поля в системе массивных фермионов. Он основан на учете электрослабого взаимодействия частиц с фоновым веществом наряду с ненулевыми аномальными магнитными моментами этих фермионов. Заметим, что элек-

¹⁾e-mail: maxdvo@izmiran.ru

трослабое взаимодействие само по себе подразумевает нарушение четности, которое может вносить вклад в неустойчивость магнитного поля.

В данной работе обсуждаются следующие вопросы. Сначала рассматривается уравнение Дирака во внешнем магнитном поле для массивного фермиона, например для электрона, обладающего ненулевым аномальным магнитным моментом и электрослабо взаимодействующего с фоновым веществом. Используя ранее полученное решение этого уравнения Дирака, вычисляется электрический ток данных фермионов вдоль внешнего магнитного поля, который оказывается отличным от нуля. Затем рассматривается сильно вырожденный электронный газ, который может существовать внутри нейтронной звезды (НЗ). Наконец, полученные результаты применяются для описания усиления магнитного поля в НЗ и кратко обсуждаются некоторые приложения в астрофизике.

Рассмотрим фермион (электрон) с массой m и аномальным магнитным моментом μ . Допустим, что этот электрон электрослабо взаимодействует с неподвижным и неполяризованным фоновым веществом, состоящим из нейтронов и протонов, а также с внешним магнитным полем, направленным вдоль оси z : $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Описывая взаимодействие с веществом в рамках модели Ферми в приближении рассеяния вперед, получаем уравнение Дирака для электрона:

$$[\gamma_\mu P^\mu - m - \mu B \Sigma_3 - \gamma^0 (V_R P_R + V_L P_L)] \psi = 0, \quad (2)$$

где $P^\mu = i\partial^\mu + eA^\mu$, $A^\mu = (0, 0, Bx, 0)$ – векторный потенциал, $e > 0$ – абсолютное значение элементарного заряда, $P_{R,L} = (1 \pm \gamma^5)/2$ – киральные проекторы, а $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, и $\Sigma_3 = \gamma^0\gamma^3\gamma^5$ – матрицы Дирака. Эффективные потенциалы электрослабо взаимодействия электрона с веществом $V_{R,L}$ в уравнении (2) имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} V_R &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [n_n - n_p(1 - 4\xi)] 2\xi, \\ V_L &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [n_n - n_p(1 - 4\xi)] (2\xi - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $n_{n,p}$ – концентрации нейтронов и протонов, $G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$ – постоянная Ферми, а $\xi = \sin^2 \theta_W \approx 0.23$ – параметр Вайнберга.

Решение уравнения (2) было найдено в работе [11]:

$$\begin{aligned} \psi &= \exp(-iEt + ip_y y + ip_z z) \times \\ &\times (C_1 u_{n-1}, iC_2 u_n, C_3 u_{n-1}, iC_4 u_n)^T, \\ u_n(\eta) &= \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \frac{H_n(\eta)}{\sqrt{2^n n!}}, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где $-\infty < p_{y,z} < +\infty$, $H_n(\eta)$ – полиномы Эрмита, $\eta = \sqrt{eB}x + p_y/\sqrt{eB}$, а C_i , $i = 1, \dots, 4$, – спиновые коэффициенты. Для определенности ниже будет использоваться киральное представление для матриц Дирака. Удобно нормировать волновую функцию ψ в формуле (4) следующим образом:

$$\int d^3x \psi_{p_y p_z n}^\dagger \psi_{p'_y p'_z n'} = \delta(p_y - p'_y) \delta(p_z - p'_z) \delta_{nn'}, \quad (5)$$

в любой момент времени.

Уровни энергии E в (4) для $n > 0$ имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} E &= \bar{V} + \mathcal{E}, \\ \mathcal{E} &= \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2eBn + (\mu B)^2 + V_5^2 + 2sR^2}, \\ R^2 &= \sqrt{(p_z V_5 - \mu B m)^2 + 2eBn[V_5^2 + (\mu B)^2]}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $s = \pm 1$ – дискретное спиновое квантовое число, $\bar{V} = (V_L + V_R)/2$, а $V_5 = (V_L - V_R)/2$. При $n = 0$ энергетический спектр имеет форму:

$$E = \bar{V} + \sqrt{(p_z + V_5)^2 + (m - \mu B)^2}. \quad (7)$$

Следует отметить, что на самом низком энергетическом уровне спин электрона имеет только одно направление, так как $C_1 = C_3 = 0$. В формулах (6) и (7), приведено решение только для частиц (электронов), а не для античастиц (позитронов).

Используя точное решение уравнения Дирака, можно вычислить электрический ток электронов в рассматриваемом веществе. Этот ток имеет форму [2]:

$$\mathbf{J} = -e \sum_{n=0}^{\infty} \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y dp_z \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi f(E - \chi), \quad (8)$$

где $f(E) = [\exp(\beta E) + 1]^{-1}$ – функция распределения Ферми–Дирака, $\beta = 1/T$ – обратная температура, а χ – химический потенциал.

Сначала заметим, что поперечные компоненты электрического тока $J_{x,y} \sim \bar{\psi} \gamma^{1,2} \psi$ равны нулю из-за ортогональности функций Эрмита $u_n(\eta)$ с разными индексами. Вклад самого низкого энергетического уровня с $n = 0$ в продольную компоненту тока $J_z \sim \bar{\psi} \gamma^3 \psi$ также исчезает: $J_z^{(n=0)} = 0$. Этот результат справедлив для произвольных параметров m , μ , V_5 , χ , β и B .

Вклад высших энергетических уровней с $n > 0$ в J_z можно получить, используя выражения для спиновых коэффициентов C_i , также найденных в статье [11]:

$$\begin{aligned} J_z^{(n>0)} &= -\frac{e^2 B}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{\mathcal{E}} \times \\ &\times \left[p_z \left(1 + s \frac{V_5^2}{R^2} \right) - s \frac{\mu B m V_5}{R^2} \right] f(E - \chi). \end{aligned} \quad (9)$$

Лидирующий ненулевой член в выражении (9) пропорционален μB и V_5 :

$$J_z = \mu m V_5 B^2 \frac{e^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dp}{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2} \times \left[\left(1 - \frac{3p^2}{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2} \right) \left(f' - \frac{f}{\mathcal{E}_{\text{eff}}} \right) + \frac{p^2}{\mathcal{E}_{\text{eff}}} f'' \right], \quad (10)$$

где $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \sqrt{p^2 + m_{\text{eff}}^2}$, а $m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + 2eBn}$. Аргумент функции распределения в формуле (10) равен $\mathcal{E}_{\text{eff}} + \bar{V} - \chi$.

Рассмотрим случай сильно вырожденного электронного газа. При этом $f = \theta(\chi - \bar{V} - \mathcal{E}_{\text{eff}})$, где $\theta(z)$ – функция Хевисайда. При этом можно пренебречь вкладом позитронов в J_z . Прямой расчет тока в (10) дает

$$J_z = -2\mu m V_5 B^2 \frac{e^2}{\pi^2 \tilde{\chi}^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\tilde{\chi}^2 - m_{\text{eff}}^2} \theta(\tilde{\chi} - m_{\text{eff}}), \quad (11)$$

где $\tilde{\chi} = \chi - \bar{V}$.

Видно, что J_z в формуле (11) отличен от нуля, если $B < \tilde{B}$, где $\tilde{B} = (\tilde{\chi}^2 - m^2)/2e$. Если магнитное поле относительно сильное и близко к \tilde{B} , то только первый энергетический уровень с $n = 1$ вносит вклад в J_z , приводя к $J_z = -8\mu m V_5 B^2 \alpha_{\text{em}} \sqrt{\tilde{\chi}^2 - m^2 - 2eB}/\pi \tilde{\chi}^3 \rightarrow 0$, где $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi \approx 7.3 \cdot 10^{-3}$ – постоянная тонкой структуры. В противоположной ситуации, когда $B \ll \tilde{B}$, получаем, что $J_z = -8\alpha_{\text{em}} \mu m V_5 B (\tilde{\chi}^2 - m^2 - 2eB)^{3/2}/3\pi e \tilde{\chi}^3 \approx -8\alpha_{\text{em}} \mu m V_5 B/3\pi e$, т.е. ток пропорционален напряженности магнитного поля.

Для того, чтобы исследовать эволюцию магнитного поля в присутствии дополнительного тока (11), перейдем в (11) к векторным обозначениям,

$$\mathbf{J} = \Pi \mathbf{B}, \quad \Pi = -8\mu m V_5 B \frac{\alpha_{\text{em}}}{\pi \tilde{\chi}^3} \sum_{n=1}^N \sqrt{\tilde{\chi}^2 - m_{\text{eff}}^2}, \quad (12)$$

где N – максимальное целое число, для которого $\tilde{\chi}^2 - m^2 - 2eBn \geq 0$, и учтем ток (12) в уравнениях Максвелла наряду с обычным омическим током $\mathbf{J}_{\text{Ohm}} = \sigma_{\text{cond}} \mathbf{E}$, где σ_{cond} – удельная проводимость, а \mathbf{E} – электрическое поле.

Рассматривая МГД приближение, при котором $\sigma_{\text{cond}} \gg \omega$, где ω – характерная частота изменения электромагнитных полей, получаем модифицированное уравнение Фарадея для эволюции магнитного поля,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma_{\text{cond}}} \nabla \times (\Pi \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma_{\text{cond}}} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (13)$$

в котором пренебрегаем зависимостью σ_{cond} от координат.

Рассмотрим эволюцию модельного магнитного поля, представляющего из себя волну Черн–Саймонса, соответствующую максимальной отрицательной магнитной спиральности: $\mathbf{B}_{\text{CS}}(z, t) = B(t)(\mathbf{e}_x \cos kz + \mathbf{e}_y \sin kz)$, где $k = 1/L$ – волновое число, определяющее масштаб длины магнитного поля L , а $B(t)$ – амплитуда волны, которая может зависеть от времени. В этой ситуации можно пренебречь координатной зависимостью Π в (13) и уравнение для $B(t)$ принимает вид

$$\dot{B} = -\frac{k}{\sigma_{\text{cond}}} (k + \Pi) B. \quad (14)$$

Поскольку Π в формуле (12) отрицательно, то магнитное поле, удовлетворяющее уравнению (14), может быть неустойчивым, так как $\dot{B} > 0$.

Применим уравнение (14) для описания усиления магнитного поля в плотном вырожденном веществе, которое может существовать в НЗ. В этой ситуации $n_n = 1.8 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ и $n_p \ll n_n$. Используя (3), получаем $V_5 = G_{\text{F}} n_n / 2\sqrt{2} = 6 \text{ эВ}$. Известно, что плотность электронов может достигать нескольких процентов от плотности нуклонов в НЗ. Примем, что $n_e = 9 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3}$, откуда следует, что $\chi = (3\pi^2 n_e)^{1/3} = 125 \text{ МэВ}$ [12]. Таким образом, электроны являются ультрарелятивистскими, и можно считать, что $\tilde{\chi} \approx \chi$. Изучим эволюцию магнитного поля в НЗ в интервале времен $t_0 < t < t_{\text{max}}$, где $t_0 \sim 10^2$ лет и $t_{\text{max}} \sim 10^6$ лет. В этом случае НЗ остывает от $T_0 \sim 10^8 \text{ К}$, главным образом, из-за излучения нейтрино [13]. В этой ситуации проводимость вещества в уравнении (14) становится зависящей от времени $\sigma_{\text{cond}}(t) = \sigma_0(t/t_0)^{1/3}$ [12], где $\sigma_0 = 2.7 \cdot 10^5 \text{ ГэВ}$.

Рассмотрим усиление затравочного магнитного поля $B_0 = 10^{12} \text{ Гс}$, характерного для молодого пульсара. В работах [14, 15] было найдено, что в подобных сильных магнитных полях аномальный магнитный момент электрона становится зависимым от напряженности магнитного поля. Аппроксимируем μ следующим образом:

$$\mu = \frac{e}{2m} \frac{\alpha_{\text{em}}}{2\pi} \left(1 - \frac{B}{B_c} \right), \quad (15)$$

где $B_c = m^2/e = 4.4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$. Заметим, что в формуле (15) учитывается изменение знака μ при $B \approx B_c$, предсказанное в работах [14, 15].

Эволюция магнитного поля для выбранных начальных условий показана на рис. 1 для разных пространственных масштабов. Можно видеть, что маг-

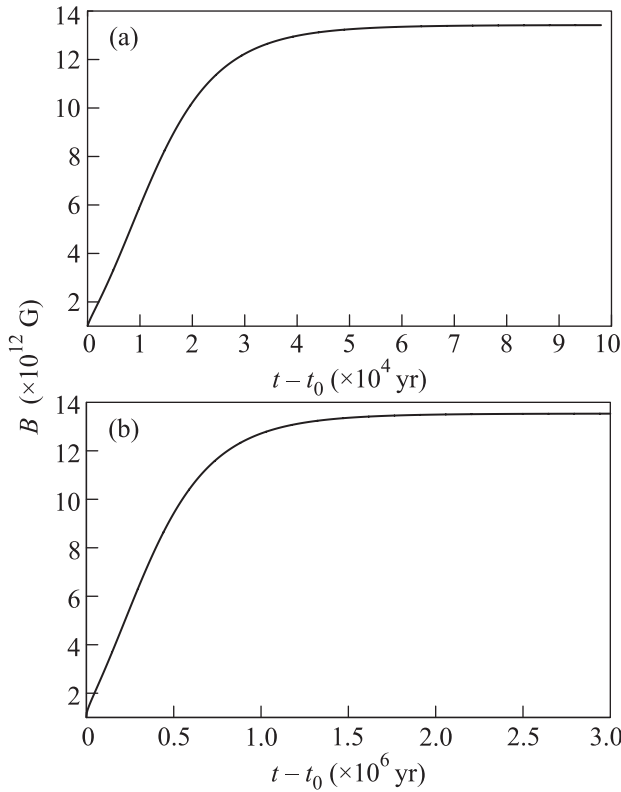


Рис. 1. Эволюция магнитного поля, полученная путем численного решения уравнения (14) для разных пространственных масштабов. (a) – $L = 10^2$ см и (b) – $L = 10^3$ см

нитное поле возрастает от $B_0 = 10^{12}$ Гс до напряженности $B_{\text{sat}} \approx 1.3 \cdot 10^{13}$ Гс. Таким образом, оба множителя в формулах (12) и (15), ограничивающие рост поля, оказывают влияние на эволюцию магнитного поля. На рис. 1 видно, что крупномасштабное магнитное поле растет медленнее. Дальнейшее увеличение масштаба магнитного поля по сравнению с $L = 10^3$ см, показанного на рис. 1b, нецелесообразно, так как время роста будет значительно превышать 10^6 лет. При таких длительных временах эволюции, НЗ охлаждается за счет излучения фотонов с поверхности звезды, а не из-за излучения нейтрино [13].

В качестве источника энергии, обеспечивающего рост магнитного поля, показанного на рис. 1, может служить вращение звезды. Чтобы описать механизм передачи энергии от вращательного движения вещества к магнитному полю, следует учитывать адвекционное слагаемое $\nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ в правой части уравнения Фарадея (13). Здесь \mathbf{v} – скорость вещества.

Кроме того, следует предположить дифференциальное вращение НЗ [16]. Замедление вращения НЗ за счет роста поля может быть оценено из сохранения полной энергии звезды: $I\Omega^2/2 + B^2V/2 = \text{const}$,

где I – момент инерции НЗ, Ω – ее угловая скорость, а V – объем НЗ.

Полагая радиус НЗ $R \sim 10$ км и начальный период вращения $P_0 \sim 10^{-3}$ с, получаем, что для $B_{\text{sat}} \approx 1.3 \cdot 10^{13}$ Гс, показанного на рис. 1, относительное изменение периода $(P - P_0)/P_0 \sim 10^{-9}$. Следовательно, только малая часть начальной энергии вращения может быть передана растущему магнитному полю.

Полученные результаты могут быть использованы для объяснения вспышек магнитаров в недавно предложенной модели термопластической волны [17], которая может быть возбуждена мелкомасштабными, с $L \sim (10^2 - 10^3)$ см, флуктуациями магнитного поля с напряженностью $B \gtrsim 10^{13}$ Гс [7]. Эволюция полей с подобными характеристиками показана из рис. 1.

В заключение интересно сравнить возникновение нового тока вдоль магнитного поля в формуле (10) с КМЭ [2], в который, как известно, дают вклад только безмассовые заряженные фермионы на нулевом уровне Ландау во внешнем магнитном поле. Поскольку левые безмассовые электроны на нулевом уровне Ландау движутся вдоль магнитного поля, а правые частицы – против поля, то ток в (1) будет отличен от нуля, пока заселенность нулевого уровня Ландау левыми и правыми частицами различная, т.е. пока $\mu_R \neq \mu_L$. Электроны на более высоких уровнях Ландау могут двигаться произвольно по отношению к магнитному полю. Таким образом КМЭ обусловлен несимметричным движением безмассовых заряженных частиц вдоль внешнего магнитного поля.

Если рассматриваются массивные электроны с ненулевыми аномальными магнитными моментами, электрослабо взаимодействующие с фоновым веществом, то, в отличие от КМЭ, движение таких частиц на низшем энергетическом уровне с $n = 0$ симметрично по отношению к внешнему магнитному полю, т.е. для них $-\infty < p_z < +\infty$ (это видно, если в формуле (7) заменить $p_z \rightarrow p_z - V_5$). Напротив, энергия более высоких энергетических уровней с $n > 0$ в (6) не является симметричной относительно преобразования $p_z \rightarrow -p_z$. Симметрия относительно подобного отражения не может быть восстановлена никаким преобразованием p_z . Поэтому электроны с $p_z > 0$ и $p_z < 0$ будут иметь разные энергии и, следовательно, разные скорости $v_z = p_z/\mathcal{E}$. Значит, $J_z \sim \langle v_z \rangle \neq 0$, причем только высшие энергетические уровни дают вклад в этот ток. Интересно отметить, что член в (6), который нарушает симметрию по отношению к $p_z \rightarrow -p_z$, пропорционален $\mu B m V_5$. Именно этому множителю и пропорционален J_z в формуле (10). Таким образом видно, что ненулевой ток $\mathbf{J} \sim \mathbf{B}$ вызван

несимметричным движением частиц вдоль \mathbf{B} , однако эта асимметрия вызвана одновременным наличием трех факторов: ненулевыми m и μ , а также электрослабым взаимодействием с фоновым веществом $\sim V_5$.

Необходимо отметить, что помимо электрослабого взаимодействия между электронами и фоновыми фермионами, учтенного в формулах (2), (3) и приводящего к электрическому току $\mathbf{J} \sim \mathbf{B}$ в (12), электроны также взаимодействуют с фоновыми протонами и нейтронами электромагнитным образом. Рассматривая, для определенности, электромагнитное взаимодействие между электронами и неподвижным газом протонов с постоянной и однородной плотностью, находим, что в левой части уравнения (2) появится дополнительный член $\sim [\dots + e^2 \gamma^0 f_0] \psi$, где $f_0 \sim n_p / \omega_p^2$ – величина, пропорциональная нулевой компоненте тока протонов, а ω_p – плазменная частота в рассматриваемом веществе.

Интенсивность электромагнитного взаимодействия гораздо выше, чем у электрослабого, $e^2 f_0 \gg G_F n_p$, поскольку в вырожденном веществе $\omega_p^2 \sim \alpha_{\text{em}} \chi^2$ [18] и $e^2 f_0 \sim 10^2 (\text{ГэВ}^{-2}) \times n_p$ при $\chi \sim 10^2 \text{ МэВ}$ (см. выше). Тем не менее, дополнительный вклад электромагнитного взаимодействия в уравнении (2) можно устранить калибровочным преобразованием $\psi \rightarrow \psi' = \exp(-ie^2 f_0 t) \psi$ в случае вещества с постоянной плотностью, $f_0 \sim n_p = \text{const}$. Вклад электрослабого взаимодействия в уравнении (2), $\gamma^0 (V_R P_R + V_L P_L) \rightarrow \gamma^0 \gamma^5 V_5$, нельзя устранить никаким калибровочным преобразованием из-за наличия матрицы γ^5 , указывающей на нарушение пространственной четности в электрослабых взаимодействиях. Аналогично можно показать, что электромагнитное взаимодействие между электронами и нейтронами, благодаря наличию у нейтронов магнитного формфактора [19], не приводит к возникновению тока $\mathbf{J} \sim \mathbf{B}$ в случае однородного, неподвижного и неполяризованного нейтронного вещества с постоянной плотностью.

Необходимость наличия вклада взаимодействия, нарушающего пространственную четность, при генерации тока $\mathbf{J} = \mathbf{P}\mathbf{B}$ в (12) в системе массив-

ных фермионов следует также из того, что параметр Π должен быть псевдоскаляром. Электромагнитное взаимодействие, как известно, не нарушает пространственную четность. Именно поэтому оно не дает вклада в Π в рассматриваемой системе.

Работа была поддержана программой повышения конкурентоспособности ТГУ и РФФИ (грант # 15-02-00293).

-
1. H. C. Spruit, Proc. Int. Astron. Union **4**, 61 (2008).
 2. A. Vilenkin, Phys. Rev. D **22**, 3080 (2008).
 3. G. Sigl, *Astroparticle Physics: Theory and Phenomenology*, Atlantis Press, Paris (2017).
 4. M. Dvornikov, Phys. Lett. B **760**, 406 (2016).
 5. V. A. Rubakov, Prog. Theor. Phys. **75**, 366 (1986).
 6. M. Buballa and S. Carignano, Eur. Phys. J. A **52**, 57 (2016).
 7. M. Dvornikov, Nucl. Phys. B **913**, 79 (2016).
 8. M. Dvornikov, Int. J. Mod. Phys. D (2017), doi: 10.1142/S021827181750184X.
 9. V. B. Semikoz and D. D. Sokoloff, Phys. Rev. Lett. **92**, 131301 (2004).
 10. M. Dvornikov and V. B. Semikoz, Phys. Rev. D **91**, 061301 (2015).
 11. И. А. Баланцев, А. И. Студеникин, И. В. Токарев, ЯФ **76**, 526 (2013).
 12. M. Dvornikov and V. B. Semikoz, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05**, 032 (2015).
 13. D. G. Yakovlev and C. J. Pethick, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **42**, 169 (2004).
 14. И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. А. Бордовицын, О. Ф. Дорофеев, Изв. вузов, сер. физика, вып. 11, 17 (1968).
 15. И. М. Тернов В. Г. Багров, В. А. Бордовицын, О. Ф. Дорофеев, ДАН СССР **183**, 810 (1968).
 16. F. Galeazzi, S. Yoshida, and Y. Eriguchi, Astron. Astrophys. **541**, A156 (2012).
 17. A. M. Beloborodov and Yu. Levin, Astrophys. J. Lett. **794**, L24 (2014).
 18. E. Braaten and D. Segel, Phys. Rev. D **48**, 1478 (1993).
 19. C. F. Perdrisat, V. Punjabi, and M. Vanderhaeghen, Prog. Part. Nucl. Phys. **59**, 694 (2007).