

# Поверхностные микрочастицы в жидком гелии. Квантовый закон Архимеда

А. М. Дюгаев<sup>+</sup>, Е. В. Лебедева<sup>\*1)</sup>

<sup>+</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

<sup>\*</sup>Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 31 октября 2017 г.

После переработки 3 ноября 2017 г.

Исследованы отклонения от закона Архимеда для сферических частиц радиуса  $R_0$ , выполненных из молекулярного водорода у поверхности жидкого  $\text{He}^4$ . Классический закон Архимеда имеет место, если  $R_0$  больше капиллярной длины гелия  $L_k \cong 500$  мкм. При этом величина возвышения частицы над жидкостью  $h_+ \sim R_0$ . В области  $30 < R_0 < 500$  мкм сила Архимеда подавляется силой поверхностного натяжения и  $h_+ \sim R_0^3/L_k^2$ . При  $R_0 < 30$  мкм частица находится под поверхностью жидкости. Здесь сила Архимеда конкурирует с силой Казимира, которая отталкивает частицу от поверхности вглубь жидкости. Расстояние частицы до поверхности  $h_- \sim R_c^{5/3}/R_0^{2/3}$ , если  $R_0 > R_c$ . Здесь  $R_c$  – масштаб, набранный, в основном, из мировых постоянных,  $R_c \approx \left(\frac{\hbar c}{\rho g}\right)^{1/5} \approx 1$  мкм ( $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_{\text{He}}$  – плотность гелия). Для очень маленьких частиц ( $R_0 < R_c$ ) расстояние до поверхности жидкости  $h_-$  не зависит от их размера,  $h_- = R_c$ .

DOI: 10.7868/S0370274X17240067

1. Известно, что микрочастицы в газовой фазе, находящейся в равновесии с жидким гелием, покрыты пленкой гелия толщиной  $\Delta_0$  [1]. Поверхностная энергия пленки  $E_V$  и  $\Delta_0$  связаны с радиусом частицы  $R_0$  и поверхностным натяжением гелия  $\sigma$  соотношениями

$$E_V = 4\pi\sigma R_0^2 \left(1 + 3\frac{\Delta_0}{R_0}\right), \quad \Delta_0 \ll R_0, \quad (1)$$

$$\Delta_0 = \left(\frac{R_0\varepsilon_0}{\alpha}\right)^{1/3},$$

где  $\varepsilon_0$  – энергия Ван-дер-Ваальса, определенная, например, в [1, 2].

Факт существования такой пленки оказывает влияние на свойства пылевой плазмы при гелиевых температурах. Так как  $\text{He}$  является хорошим диэлектриком и отталкивает электроны, то при понижении температуры пылевые частицы перестают заряжаться. Этот эффект обнаружен на опыте [3] и объяснен в [1]. Величина  $E_V$  (1) имеет смысл энергии сольватации частицы жидким гелием, так как перенос частицы из газа в жидкость приводит к исчезновению пленки на ее поверхности. Если частица крупная и легкая, то ее погружение в жидкость будет определяться конкуренцией выигрыша в поверхностной

энергии  $E_V$  и проигрыша в объемной энергии Архимеда. В жидком гелии могут плавать только частицы из молекулярного водорода  $\text{H}_2$  с плотностью  $\rho_{\text{H}_2} = 0.087$  г/см<sup>3</sup>, а также искусственные объекты типа полых стеклянных шариков (плотность жидкого  $\text{He}^4$   $\rho_{\text{He}} = 0.145$  г/см<sup>3</sup>). Наш интерес к исследованию поверхностных состояний микрочастиц связан с экспериментами по визуализации волнового и вихревого движения на поверхности жидкостей [4–6]. Квантование закона Архимеда представляет и общий интерес, как новая задача теоретической физики. Мы выбрали в качестве объекта гелий – самую простую из всех жидкостей, допускающую предел  $T \rightarrow 0$ .

2. Параметры задачи представлены на рис. 1. Частица плотностью  $\rho$  и радиусом  $R_0$  плавает на поверхности жидкого гелия:  $\rho_{\text{He}} > \rho$ . Возвышение частицы над жидкостью обозначено как  $h_+$ , толщина пленки – параметр  $\Delta$ , который находится с точностью до мелких краевых поправок минимизацией поверхностной энергии  $E_S$  [1]:

$$E_S = \pi\sigma(h_+ + \Delta)^2 + 2\pi R_0 h_+ \frac{\varepsilon_0}{\Delta^2}. \quad (2)$$

Предполагая  $h_+ > \Delta$ , из (2) получаем

$$E_S = \pi h_+^2 \sigma \left(1 + \frac{3\Delta}{h_+}\right), \quad \Delta = \left(\frac{2R_0\varepsilon_0}{\sigma}\right)^{1/3}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup>e-mail: lebedeva@issp.ac.ru

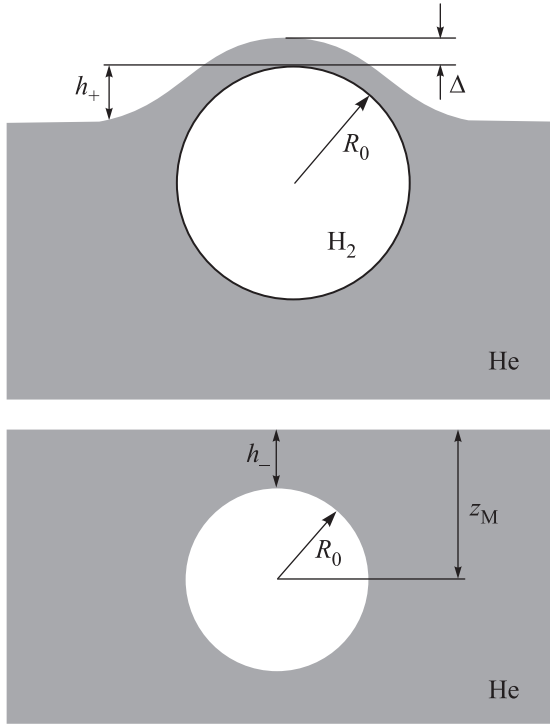


Рис. 1. Иллюстрация положения в жидком гелии больших и малых примесных частиц

Минимизируя сумму  $E_S + E_g + E_A$ , где  $E_g$  и  $E_A$  – энергии гравитации и Архимеда, нетрудно получить уравнение на параметр  $x = h_+/R_0$ :

$$\frac{x^3}{3} - x^2 - 2\frac{L_k^2}{R_0^2}x + \delta = 0, \quad \delta = \frac{4}{3} \left( \frac{\rho_{\text{He}} - \rho}{\rho_{\text{He}}} \right) - 3\frac{L_k^2 \Delta}{R_0^3},$$

$$L_k^2 = \frac{\sigma}{\rho_{\text{He}} g}. \quad (4)$$

Классический закон Архимеда следует из (4), если занулить капиллярную длину гелия  $L_k \cong 500$  мкм. При этом значение  $x_0 = h_+^0/R_0$  определяется параметром  $\delta_0$ :

$$\frac{x_0^3}{3} - x_0^2 + \delta_0 = 0, \quad \delta_0 = \frac{4}{3} \left( \frac{\rho_{\text{He}} - \rho}{\rho_{\text{He}}} \right). \quad (5)$$

Для молекулярного водорода из (5) получаем  $\delta_0 = 0.53$ ;  $x_0 = 0.86$ .

Интересен также случай полых стеклянных шариков, применявшихся в исследованиях [6], когда их усредненная плотность близка к плотности гелия, и параметр  $\delta_0$  мал (при  $\rho = 0.14$  г/см<sup>3</sup>  $\delta_0 = 0.046$ ). Здесь можно пренебречь членом  $x^3/3$  в (4):

$$x = \frac{h_+}{R_0} = -\frac{L_k^2}{R_0^4} + \left( \frac{L_k^4}{R_0^4} + \delta \right)^{1/2}. \quad (6)$$

При  $R_0 \ll L_k$  из (4), (6) получаем

$$h_+ = \frac{1}{2} \frac{R_0^3}{L_k^2} \delta. \quad (7)$$

Зависимость (7) имеет место до тех пор, пока не нарушено условие  $h_+ > \Delta$  (3), что дает ограничение на  $R_0$ :  $R_0 > R_L$ :

$$\frac{R_L}{L_k} = \left( \frac{2}{\delta_0} \right)^{3/8} \left( \frac{2\epsilon_0}{\sigma L_k^2} \right)^{1/8}, \quad \sigma = 0.274 \frac{K}{\text{Å}^2}. \quad (8)$$

Для  $\text{H}_2$  (параметр  $\epsilon_0 \approx 3.2$  К, он определен ниже) получаем  $R_L = 25.5$  мкм. Из (8) следует, что зависимость  $R_L$  от  $\epsilon_0$  очень слабая, так как определяется степенью  $1/8$ . Это позволяет не различать  $\text{H}_2$  и стеклянные шарики, для которых из (8) следует оценка  $R_L = 64$  мкм. Близкие значения  $R_L$  можно получить и из (4), (7), пользуясь условием зануления параметра  $\delta$ :  $\delta(R_L) = 0$ . Для  $\text{H}_2$  находим  $R_L = 30$  мкм, для стеклянных шариков  $R_L = 75$  мкм.

Физическую причину появления большого масштаба  $R_L$  (8) можно понять, сравнив выражения для энергии сольватации  $E_V$  (1) и поверхностной энергии  $E_S$  (2), (3). Если частица левитирует над жидкостью, энергия пленки на ее поверхности является малой поправкой  $\sim \Delta_0/R_0$  к энергии поверхностного натяжения  $4\pi\sigma R_0^2$ . Если же частица почти погружена в жидкость, энергия поверхностного натяжения пропорциональна квадрату высоты выступающей над жидкостью части  $h_+$ :  $\pi\sigma h_+^2$ , а энергия пленки пропорциональна площади частицы, выступающей над поверхностью –  $2\pi R_0 h_+$ . Поэтому при малых  $h_+$  вклад пленки в  $E_S$  становится доминирующим.

**3.** Для примесных частиц с размером  $R_0 < R_L$  применимо приближение жесткой границы жидкость–пар, когда можно положить поверхностное натяжение  $\sigma = \infty$ . Равновесное положение  $z_M = R_0 + h_-$  определяется конкуренцией силы Архимеда с дисперсионной силой Казимира (см. рис. 1). Для микронных частиц взаимодействие атомов примеси с атомами He на больших расстояниях имеет вид [7]:

$$\mathcal{V}(r_A - r_{\text{He}}) = -\frac{23}{4\pi} \hbar c \frac{\alpha_A \alpha_{\text{He}}}{(r_A - r_{\text{He}})^7}, \quad (9)$$

где  $\alpha_A$  и  $\alpha_{\text{He}}$  – поляризуемости атомов примеси и атомов гелия,  $c$  – скорость света,  $\hbar$  – постоянная Планка.

Дисперсионные силы, теория которых предложена в [8–10], приводит к отталкиванию примеси вглубь жидкости с потенциалом

$$v_c(z) = V \frac{23}{640\pi^2} \hbar c \frac{(\epsilon_{\text{He}} - 1)(\epsilon_A - \epsilon_{\text{He}})}{(z^2 - R_0^2)^2}. \quad (10)$$

Выражение (10) отвечает интегрированию (9) по объему примеси ( $r_A$ ) и области, занятой паром над жидкостью ( $r_{He}$ ). В (10)  $\epsilon_{He} = 1.057$  – диэлектрическая проницаемость He,  $\epsilon_A$  – проницаемость примеси, для  $\epsilon_A = 1.286$  H<sub>2</sub>. Использована связь  $\epsilon$  и  $\alpha$ :  $\epsilon = 1 + 4\pi n\alpha$ , где  $n$  – плотность среды,  $V = 4\pi/3R_0^3$  – объем примеси.

Вывод (10) предполагает вычитание из  $\epsilon_A$  величины  $\epsilon_{He}$ . Если примесь является пузырьковым состоянием в гелии, то в (10) следует положить  $\epsilon_A = 1$ , при этом  $v_c(z)$  меняет знак. Взаимодействие пузырьков с поверхностью гелия рассмотрено в [8–10]. Равновесное значение  $z_M$  (рис. 1) находится минимизацией суммы  $v_c(z)$  с гравитационным потенциалом  $v_g$ :

$$v_g = V(\rho_{He} - \rho)gz, \quad (11)$$

$$z_M^2 - R_0^2 = z_M^{1/3} R_c^{5/3},$$

где  $R_c$  – квантовый масштаб, в котором удобно выделить мировые постоянные  $\hbar$ ,  $c$ ,  $g$ ,  $\rho_{He}$ :

$$R_c = \left( \frac{\hbar c}{\rho_{He} g} \right)^{1/5} \left( \frac{23}{120\pi^2} \frac{(\epsilon_{He} - 1)(\epsilon_A - \epsilon_{He})}{\delta_0} \right)^{1/5}. \quad (12)$$

Параметр  $\delta_0$  определен выше (5). Для молекулярного водорода H<sub>2</sub> –  $R_c = 0.4$  мкм.

Из (11) в двух предельных случаях,  $R_0 > R_c$  и  $R_0 < R_c$ , получаем:

$$R_0 > R_c : z_M = R_0 + h_-; \quad h_- \approx \frac{1}{2} R_c \left( \frac{R_c}{R_0} \right)^{2/3},$$

$$R_0 < R_c : z_M \cong R_c \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{R_0^2}{R_c^2} \right). \quad (13)$$

Параметр  $R_c$  (12) имеет гигантское значение в атомных единицах  $a$ :  $R_c \sim 10^4 \text{ \AA} \gg a$ . Здесь  $n_{He} = 1/a^3$ ,  $a = 3.5 \text{ \AA}$ . Это связано с тем, что слабые силы Казимира дают сильный эффект, пропорциональный объему примеси  $V$  (10). Так как гравитационный потенциал  $v_g$  также пропорционален  $V$ , квантовый масштаб  $R_c$  не содержит объема примеси. Более того, по той же причине для мелких примесей  $R_0 < R_c$  оптимальное  $z_M$  не зависит от  $R_0$ :  $z_M \approx R_c$  (13). Слабая зависимость  $R_c$  от характеристик материала примеси (степень 1/5) (12) дает основание считать, что оценка  $R_c = 0.1$  мкм применима и к полым стеклянным шарикам из [6].

**4.** Полезно проследить, как работает принцип соответствия, рассмотрев нерелятивистский предел, когда взаимодействие атомов имеет ван-дер-ваальсов вид

$$\mathcal{V}(r_A - r_{He}) = -\frac{c_6 e^2 r_B^5}{(r_A - r_{He})^6}. \quad (14)$$

Этот случай подробно исследован нами в [8, 9] для заряженных частиц – электронных пузырьков. Для квантового закона Архимеда с гравитационным потенциалом  $v_g$  (11) теперь конкурирует ван-дер-ваальсово отталкивание примеси от поверхности жидкости  $v_B$ :

$$v_+(z) = v_B(z) + v_g, \quad v_B(z) = \epsilon_B f_B(z),$$

$$f_B(z) = \frac{2zR_0}{z^2 - R_0^2} - \ln \frac{z + R_0}{z - R_0}. \quad (15)$$

Энергия  $\epsilon_B$  в (15) связана с безразмерными постоянными степенного закона взаимодействия двух атомов:  $C_{01}$  – атом гелия с атомом примеси,  $C_{00}$  – атом гелия с атомом гелия

$$\epsilon_B = \frac{\pi^2 e^2 r_B^5}{6} (C_{01} n_0 n_1 - C_{00} n_0^2), \quad (16)$$

где  $r_B$  – боровский радиус,  $n_0$  – плотность жидкого гелия,  $n_1$  – плотность вещества примеси.

Если примесь выполнена из молекулярного водорода H<sub>2</sub>, все постоянные в (16) известны [11]:

$$C_{01} = 4.22; \quad C_{00} = 1.47; \quad n_0 r_B^3 = 3.29 \cdot 10^{-3};$$

$$n_1 r_B^3 = 3.95 \cdot 10^{-3}; \quad \epsilon_B = 2.79 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} = 20.2 \text{ К}. \quad (17)$$

Параметр  $\epsilon_0$  в (2) отличается от  $\epsilon_B$  (17) численным множителем:  $\epsilon_B = 2\pi\epsilon_0$ . Для пузырьков в He в (16) следует положить  $C_{01} = 0$  и  $\epsilon_B$  меняет знак. Если же примесь выполнена из He:  $C_{01} = C_{00}$ ,  $n_1 = n_0$ , то, как и следовало ожидать,  $\epsilon_B = 0$ . Оптимальное значение  $z_M$  находится из условия  $\partial v_+(z)/\partial z = 0$  (15):

$$z_M^2 = R_0^2 + R_B^2; \quad R_B = \left( \frac{3\epsilon_B}{(\rho_{He} - \rho)\pi g} \right)^{1/4}. \quad (18)$$

Квантовый параметр  $R_B$  содержит постоянную Планка неявно, через боровский радиус  $r_B$  в (16). Для молекулярного водорода из (18) имеем  $R_B = 0.83$  мкм, что только в два раза отличается от  $R_c = 0.4$  мкм (12). Есть качественное согласие и с предельными зависимостями (13):

$$z_M = R_0 + \frac{1}{2} \frac{R_B^2}{R_0}; \quad R_0 > R_B,$$

$$z_M = R_B + \frac{1}{2} \frac{R_0^2}{R_B}; \quad R_0 < R_B. \quad (19)$$

Интересен вопрос о температурной ширине распределения примесных частиц  $W(z)$  по координате  $z$ . Для классических частиц

$$W(z) \sim \exp \left[ -\frac{T_B}{T} \left( \frac{z - z_M}{z_M} \right)^2 \right], \quad (20)$$

где характерная энергия  $T_B$  связана со второй производной потенциала  $v_+(z)$  (15):

$$T_B = \frac{v_+''}{2} z_M^2 = 8\varepsilon_B \left( \frac{R_0}{R_B} \right)^6 \left( 1 + \frac{R_B^2}{R_0^2} \right)^{3/2}. \quad (21)$$

В предельных случаях из (21) имеем

$$\begin{aligned} R_0 < R_B : \quad T_B &= 8\varepsilon_B \left( \frac{R_0}{R_B} \right)^3; \\ R_0 > R_B : \quad T_B &= 8\varepsilon_B \left( \frac{R_0}{R_B} \right)^6. \end{aligned} \quad (22)$$

Распределение  $W(z)$  (20) перестает быть  $\delta$ -образным только для мелких примесей, когда  $\frac{8\varepsilon_B}{T} \left( \frac{R_0}{R_B} \right)^3 < 1$ . Для характерной гелиевой температуры  $T = 2$  К это дает ограничение:  $R_0 < 0.2R_B$ .

5. В опытах исследуются не только нейтральные, но и заряженные примеси [12], которые можно прижать электрическим полем к поверхности жидкости. Энергия сольватации примеси, т.е. выигрыш в энергии при переходе частицы из газовой фазы в жидкую, в этом случае только увеличивается. Аргументируем это утверждение на простейшем примере катиона  $He^+$ . В газовой фазе он образует вокруг себя макроскопическую каплю жидкого гелия радиусом  $R_0 \approx 9 \text{ \AA}$  [13], а в жидкости окружен сферой твердого гелия [14]. Разница энергий этих двух объектов, т.е. энергия сольватации, кроме поверхностного содержит еще и поляризационный вклад

$$E_V = 4\pi R_0^2 + \frac{e^2(\varepsilon - 1)}{2R_0}. \quad (23)$$

Оптимальный радиус капли в газовой фазе находится из условия  $\partial E_V / \partial R_0 = 0$ :

$$R_0^{\text{opt}} = \left( \frac{e^2(\varepsilon - 1)}{16\pi\sigma} \right)^{1/3} = 8.9 \text{ \AA}. \quad (24)$$

Энергия сольватации капли, отвечающая оптимальному радиусу  $R_0^{\text{opt}}$  в 3 раза больше поверхностного вклада в формуле (23):

$$E_V^{\text{opt}} = 12\pi\sigma R_0^2 \approx 806 \text{ К}. \quad (25)$$

Большая энергия  $E_V^{\text{opt}}$  объясняет, почему даже в сильных электрических полях  $E \sim 10^5$  В/см, прижимающих катион  $He^+$  изнутри к поверхности жидкости, не происходит его переход из жидкой в газовую фазу гелия. Теория для заряженных примесных частиц вблизи поверхности гелия предложена в [15, 16].

6. Основным результатом работы является установление характерных масштабов для радиуса  $R_0$

примесных частиц в жидком гелии, при которых изменяется классический вид закона Архимеда. Этот закон нарушается, если  $R_0 < L_k$ , где  $L_k$  – капиллярная длина. При  $R_0 < R_L$  (8) примесная частица погружена в жидкость, а ее расстояние до поверхности определяется соотношением между  $R_0$  и квантовым масштабом  $R_c$  (12).

Опытное изучение поверхностных примесных частиц, выполненных из водорода  $H_2$ , смеси  $H_2$  с дейтерием  $D_2$ , возможно по хорошо известной методике внедрения кластеров в жидкий гелий [17, 18]. Кластеры, выполненные из смеси  $H_2$  с  $D_2$ , интересны тем, что можно менять их среднюю плотность  $\rho$  и рассмотреть случай  $(\rho - \rho_{He})/\rho_{He} \ll 1$ , когда они почти тонут в гелии.

Согласно нашим оценкам (8) полые стеклянные шарики радиусом  $R_0 < 70$  мкм локализованы под поверхностью гелия, что согласуется с утверждениями экспериментальной работы [6] для шариков  $R_0 \approx \approx 30$  мкм. Мелкие заряженные кластеры также локализуются под поверхностью [12]. Разделение на поверхностные и подповерхностные состояния примесных микрочастиц согласуется и с механизмом их самосборки. Крупные объекты собираются, как правило, в трейсеры из большого числа частиц с ближним порядком, это – эффект уменьшения поверхностной энергии при сближении плавающих частиц, который имеет место и для объектов, плавающих в воде. Мелкие подповерхностные частицы собираются в низко-размерные объекты типа нитей и снежинок [19, 20], это – эффект поляризационных сил и слабых дальнедействующих парных сил Казимира (9).

Выражаем признательность Л.П. Межову-Деглину за обсуждение работы. Один из авторов (А.М. Дюгаев) выражает благодарность врачу О.А. Мельниченко за удачную методику лечения.

Работа поддержана грантом РФФИ #13-02-00178.

1. А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, Е. В. Лебедева, Физика Низких Температур **38**(11), 1269 (2012).
2. J. Frenkel, *Kinetic Theory of Liquids*, Dover, N.Y. (1959), Ch. 7.
3. N. Uotami, J. Kubota, W. Sekine, M. Chikasue, M. Shindo, and O. Ishihara, *J. Plasma Fusion Res. Series* **9**, 404 (2010).
4. С. В. Филатов, С. А. Алиев, А. А. Левченко, Д. А. Храмов, Письма в ЖЭТФ **104**(10), 714 (2017).
5. С. В. Филатов, Д. А. Храмов, А. А. Левченко, Письма в ЖЭТФ **106**(5), 305 (2017).
6. А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, А. А. Пельменев, Письма в ЖЭТФ **106**(4), 233 (2017).

7. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1989).
8. А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, Е. В. Лебедева, *Письма в ЖЭТФ* **89**(3), 165 (2009).
9. Е. В. Лебедева, А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, *ЖЭТФ* **137**(4), 789 (2010).
10. А. М. Дюгаев, П. Д. Григорьев, Е. В. Лебедева, *Физика Низких Температур* **37**(9), 1008 (2011).
11. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Справочник по атомной и молекулярной физике*, Атомиздат, М. (1980).
12. P. Moroshkin, R. Batulin, P. Leiderer, and K. Kono, *RSSP* **18**, 26444 (2016).
13. G. Akinici and J. A. Northby, *PRL* **42**(9), 573 (1979).
14. K. R. Atkins, *Phys. Rev.* **116**, 1339 (1959).
15. A. M. Dyugaev, P. D. Grigoriev, and P. Wyder, *Phys. Stat. Sol. (b)* **237**, 260 (2003).
16. E. V. Lebedeva, A. M. Dyugaev, and P. D. Grigor'ev, *JETP* **98**(2), 441 (2004).
17. P. Savich and A. Shalnikov, *J. Phys. USSR* **10**, 299 (1946).
18. L. P. Mezhov-Deglin and A. M. Kokotin, *Low Temp. Phys.* **119**, 385 (2000).
19. Е. Б. Гордон, А. В. Карабулин, В. И. Матюшенко, В. Д. Сизов, И. И. Ходос, *ФНТ* **36**(7), 740 (2010).
20. E. B. Gordon, R. Nishida, R. Nomura, and Y. Okuda, *Pis'ma v ZhETF* **85**(11), 710 (2007).