

# Каскад квантовых переходов и магнетокалорические аномалии в открытой нанопроволоке

В. В. Вальков<sup>1)</sup>, В. А. Мицкан, М. С. Шустин

Институт физики им. Л.В. Киренского ФИЦ КНЦ СО РАН, 660036 Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 11 октября 2017 г.

После переработки 8 ноября 2017 г.

Предсказана серия магнетокалорических аномалий в открытой нанопроволоке со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания при изменении магнитного поля  $H$ . Природа аномалий связана с реализацией каскада квантовых переходов с последовательным изменением фермионной четности для основного состояния нанопроволоки при изменении магнитного поля. Показано, что критические значения  $H_c$  находятся в пределах области параметров, отвечающих нетривиальному значению  $Z_2$  топологического инварианта для соответствующего зонного 1D гамильтониана класса симметрии  $D$ . Продемонстрировано, что установленные особенности поведения открытой нанопроволоки сохраняются и при учете кулоновских взаимодействий.

DOI: 10.7868/S0370274X17240080

**1. Введение.** В последние годы топологические фазы сверхпроводящих систем привлекают значительное внимание в связи с возможностью реализации в них майорановских мод (ММ) [1, 2]. Перспективными объектами для реализации ММ являются полупроводниковые нанопроволоки с наведенной сверхпроводимостью в присутствии сильного спин-орбитального взаимодействия и однородного магнитного поля [3]. Другой класс систем представляют материалы с неоднородным внешним или обменным магнитным полем [4–6]. Майорановские моды могут реализовываться также в сверхтекучих квантовых жидкостях [7, 8] и двумерных фрустрированных спиновых системах [9, 10].

Обнаружение ММ в открытых фермионных системах связано с нахождением топологически нетривиальных фаз при периодических граничных условиях. Наиболее полная классификация топологических фаз для невзаимодействующих фермионов была получена в работах [11, 12]. Позднее были предложены методы классификации топологических фаз для 1D фермионных систем со взаимодействием [13, 14]. При этом исследовалось влияние одноузельных кулоновских корреляций на реализацию топологической фазы полупроводниковой нанопроволоки со спин-орбитальным взаимодействием [15]. Также в недавних работах [16, 17] были продемонстрированы возможности обнаружения топологической фазы, исходя из наблюдаемых характеристик нанопроволок.

Методами туннельной спектроскопии и микроскопии были поставлены эксперименты по обнаружению проявлений ММ в транспортных характеристиках полупроводниковых нанопроволок [18, 19] и спиновых цепочках [20]. Однако идентификация ММ, связанная с пиком дифференциальной проводимости при нулевом напряжении (zero-bias anomaly), остается проблемной до сих пор. Причина этого связана, например, с наличием нескольких механизмов аномальной проводимости [21, 22]. Интерпретацию данных по туннельной спектроскопии усложняет и то обстоятельство, что изучаемые нанопроволоки имеют длину  $L \sim 100$  нм, при которой реализуется некогерентный режим транспорта. Считается, что баллистический транспорт для таких структур имеет место при  $L \sim 20$  нм, однако подключение столь коротких нанопроволок к проводящим контактам в настоящее время технически затруднено.

Важно отметить, что соответствие между условиями реализации топологически нетривиальных фаз для систем с периодическими граничными условиями и реализацией топологически защищенных ММ в открытых системах (bulk-boundary correspondence) проявляется тогда, когда системы имеют достаточно большие пространственные размеры. Среди исследований эффектов конечных размеров квантовых проволок, в которых могут реализовываться ММ, можно выделить работы [23–28]. В частности, в работах [26, 27] обсуждалось осцилляционное поведение энергии расщепления между основным и первым возбужденным состояниями, как функции длины и параметров цепочек. Позднее, в работе [28] для модели конеч-

<sup>1)</sup>e-mail: vvv@iph.krasn.ru

ной цепочки Китаева [1] было показано, что осцилляции минимальной энергии возбуждения отвечают серии квантовых переходов (КП), сопровождающихся изменением фермионной четности основного состояния. Поскольку последняя модель описывает 1D ансамбль бесспиновых фермионов, вопрос о проявлении КП в термодинамических и магнитных характеристиках системы не обсуждался.

В данной работе показывается, что для открытой нанопроволоки длиной  $L \sim 10$  нм со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания, изменение параметров системы также приводит к реализации каскада КП, при которых изменяется как фермионная четность, так и спиновая структура основного состояния нанопроволоки. Следствием этого является аномальное поведение магнетокалорического эффекта в окрестности квантовых критических точек (ККТ). При этом в точке КП скорость изменения температуры при адиабатическом изменении магнитного поля обращается в бесконечность, а в левой и правой окрестностях КП имеет разные знаки. Отмеченный каскад КП конечной нанопроволоки реализуется в той области параметров фазовой диаграммы, для которой состояние бесконечной нанопроволоки является топологически нетривиальным. Также продемонстрировано, что наличие относительно слабых кулоновских взаимодействий качественно не изменяет отмеченных особенностей.

**2. Фермионная четность основного состояния открытой нанопроволоки.** Будем считать, что на поверхности сверхпроводника  $s$ -типа находится полупроводниковая нанопроволока. Ее электронная подсистема, находящаяся во внешнем магнитном поле, при учете спин-орбитального взаимодействия Рашбы может быть описана посредством гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \left[ \Psi_n^+ \left( -\mu\tau_z + h\sigma_z - \frac{\Delta}{2}\tau_+ - \frac{\Delta^*}{2}\tau_- \right) \Psi_n \right] + \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \Psi_n^+ \left( -\frac{t}{2}\tau_z - i\frac{\alpha}{2}\tau_z\sigma_y \right) \Psi_{n+1} + h.c. \right], \quad (1)$$

где использовано стандартное представление Намбу:  $\Psi_n^+ = (a_{n\uparrow}^+, a_{n\downarrow}^+, a_{n\downarrow}, -a_{n\uparrow})$ , в котором  $a_{n\sigma}$  ( $a_{n\sigma}^+$ ) – оператор уничтожения (рождения) электрона на узле  $n$  с проекцией спина на ось квантования  $\sigma$ . посредством  $h$  обозначена энергия зеемановского расщепления,  $\mu$  – химический потенциал,  $t$  – амплитуда перескоков электронов между ближайшими соседями,  $\Delta$  – амплитуда сверхпроводящих спариваний  $s$ -типа симметрии,  $\alpha$  – константа спин-орбитального взаимодействия Рашбы. Действие матриц Паули  $\sigma_i$  и

$\tau_i$  определено в спиновом и электрон-дырочном подпространствах, соответственно,  $\tau_{\pm} = (\tau_x \pm i\tau_y)/2$ .

Гамильтониан (1) удобно переписать в форме Боголюбова–де Жена:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^+ \mathbf{H} \mathbf{C}, \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A_{\uparrow\uparrow} & A_{\uparrow\downarrow} & B_{\uparrow\uparrow} & B_{\uparrow\downarrow} \\ A_{\uparrow\downarrow}^+ & A_{\downarrow\downarrow} & -B_{\uparrow\downarrow}^T & B_{\downarrow\downarrow} \\ -B_{\uparrow\uparrow}^* & -B_{\uparrow\downarrow}^* & -A_{\uparrow\uparrow}^* & -A_{\uparrow\downarrow}^* \\ B_{\uparrow\downarrow}^+ & -B_{\downarrow\downarrow}^* & -A_{\uparrow\downarrow}^T & -A_{\downarrow\downarrow}^* \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{C}^+ = (\mathbf{a}_{\uparrow}^+, \mathbf{a}_{\downarrow}^+, \mathbf{a}_{\uparrow}^T, \mathbf{a}_{\downarrow}^T)$ ,  $\mathbf{a}_{\sigma} = (a_{1\sigma}, \dots, a_{N\sigma})^T$ . Матрицы  $\mathbf{A}_{\sigma,\sigma'}$ ,  $\mathbf{B}_{\sigma,\sigma'}$  имеют следующие ненулевые компоненты ( $A_{\sigma\sigma} = A_{\sigma\sigma}^+$ ,  $B_{\sigma\sigma} = 0$ ):

$$(A_{\uparrow\downarrow})_{n,n+1} = -(A_{\uparrow\downarrow})_{n+1,n} = -\frac{\alpha}{2}, \quad (B_{\uparrow\downarrow})_{n,n} = -\Delta^*, \\ (A_{\sigma\sigma})_{n,n} = -\mu + \sigma h, \quad (A_{\sigma\sigma})_{n,n+1} = -\frac{t}{2}. \quad (4)$$

Собственные вектора  $\mathbf{Y}_m = (\mathbf{u}_{\uparrow m}, \mathbf{u}_{\downarrow m}, \mathbf{v}_{\uparrow m}^*, \mathbf{v}_{\downarrow m}^*)^T$  гамильтониана Боголюбова–де Жена (3) описывают электро- и дырочноподобные волновые функции состояния с энергией возбуждения  $\varepsilon_m$ .

Гамильтониан (2) обладает электрон-дырочной симметрией, характеризуется нарушенной инвариантностью по отношению к инверсии времени и относится к классу симметрии D. Его топологические свойства классифицируются посредством  $Z_2$ -инварианта [12], который выражается через фермионную четность  $P$  основного состояния достаточно длинных замкнутых цепочек [1].

Для вычислений фермионной четности запишем матрицу (3) в представлении майорановских операторов:

$$\gamma_{A_{n\sigma}} = a_{n\sigma} + a_{n\sigma}^+, \quad \gamma_{B_{n\sigma}} = i(a_{n\sigma}^+ - a_{n\sigma}),$$

обладающих свойством самосопряженности  $\gamma_{A(B)n\sigma} = \gamma_{A(B)n\sigma}^+$ .

В майорановском представлении матрица гамильтониана Боголюбова–де Жена  $\tilde{H}$  является вещественной и антисимметричной:

$$\tilde{H} = R^T H \Lambda R, \\ R = \begin{pmatrix} \hat{I} & -i\hat{I} \\ \hat{I} & i\hat{I} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\hat{I}$  – единичная матрица размерности  $2N \times 2N$ . Тогда фермионная четность основного состояния цепочки может быть вычислена как знак пфаффиана:

$$P = \text{sign} \left( Pf \left( \tilde{H} \right) \right) = \text{sign} \left( \det (W) \right). \quad (6)$$

Здесь  $W$  есть вещественная ортогональная матрица, приводящая  $\hat{H}$  к блочно-диагональной форме с ненулевыми диагональными блоками  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_m \\ -\varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $P = 1$  основное состояние цепочки описывается суперпозицией состояний с четным числом фермионов. Случаю  $P = -1$  соответствует основное состояние, парциальные вклады которого содержат нечетное число фермионов. Для достаточно длинных замкнутых цепочек с четным числом узлов (их длина много больше характерных пространственных масштабов краевых состояний в открытых цепочках<sup>2)</sup>), фермионную четность принято называть числом Майорана  $\mathcal{M}$ , она является  $Z_2$ -топологическим инвариантом [12].

**3. Осцилляции фермионной четности в открытой нанопроволоке.** Для открытой нанопроволоки результат вычисления фермионной четности позволяет построить фазовую диаграмму, показанную на рис. 1. Закрашенным областям соответствует

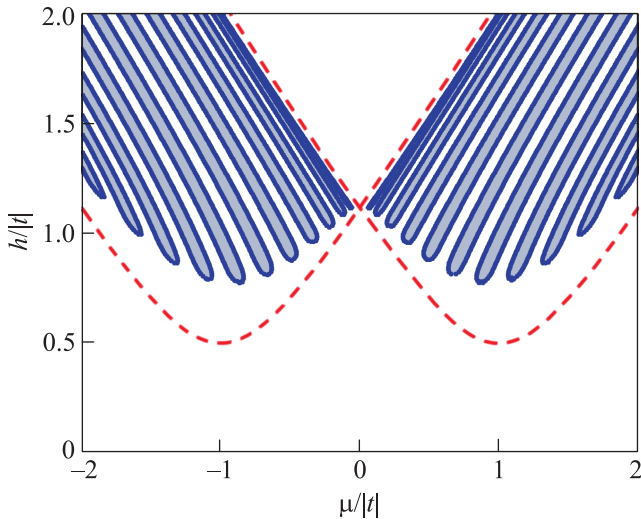


Рис. 1. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма открытой нанопроволоки ( $N = 30$ ) с наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания ( $\Delta = 0.5|t|$ ) и спин-орбитальным взаимодействием Рашбы ( $\alpha = 0.8|t|$ ). Закрашенные области соответствуют значениям параметров модели, для которых основное состояние содержит парциальные вклады с нечетным числом фермионов. Границами этих областей служат линии, для точек которых реализуется майорановская мода. Штриховыми линиями показаны границы реализации топологически нетривиальной фазы для замкнутой длинной нанопроволоки

<sup>2)</sup>Мы благодарны рецензенту за эти важные замечания.

значение  $P = -1$ . Границами этих областей служат параметрические линии, для которых основное состояние двукратно вырождено и, как следствие, минимальная энергия возбуждения равна нулю.

Заметим, что для замкнутой бесконечно длинной цепочки топологически нетривиальная область (с  $\mathcal{M} = -1$ ) описывается неравенствами

$$\sqrt{|\Delta|^2 + (\mu - |t|)^2} < |h| < \sqrt{|\Delta|^2 + (\mu + |t|)^2}.$$

Границы этой области на рис. 1 показаны штриховыми линиями. Соответствие с разомкнутой цепочкой с конечным числом узлов  $N$  проявляется в том, что все закрашенные области находятся внутри топологически нетривиальной области параметров. При возрастании  $N$  число линий смены четности увеличивается, и в пределе  $N \rightarrow \infty$  они формируют квазиконтинуум в области параметров с  $\mathcal{M} = -1$ .

Нулевые моды, реализуемые на линиях смены фермионной четности  $P$ , описываются волновыми функциями, локализованными вблизи краев цепочки. Характеристики этих функций можно проанализировать, рассмотрев поведение квазичастичной моды с минимальной неотрицательной энергией  $\varepsilon_0$ , описываемой оператором  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1; \sigma}^N (w_{n\sigma,0} \gamma_{A n \sigma} + z_{n\sigma,0} \gamma_{B n \sigma}),$$

$$w_{n\sigma,0} = u_{n\sigma,0}^* + v_{n\sigma,0}, \quad z_{n\sigma,0} = i(u_{n\sigma,0}^* - v_{n\sigma,0}). \quad (7)$$

На рис. 2 сверху продемонстрирована модификация зависимости величины  $w = \sum_{\sigma} |w_{n\sigma,0}|^2$  от номера узла при изменении внешнего магнитного поля  $h$  для открытой цепочки из 30 узлов. Параметры модели (2) выбраны те же, что и на рис. 1, но с фиксированным значением химпотенциала  $\mu = 0.5|t|$ . Из рис. 2 следует, что амплитуда волновых функций, нулевых мод, реализуемых на линиях смены четности  $P$ , имеет наибольшие значения вблизи краев цепочки и экспоненциально мала в ее середине. При этом имеется слабая гибридизация волновых функций двух майорановских связанных состояний (МСС)  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_B$ , локализованных вблизи разных краев цепочки, чьи волновые функции описываются коэффициентами  $w_{n\sigma,0}$  и  $z_{n\sigma,0}$  соответственно (рис. 2 снизу). С увеличением  $N$  степень гибридизации волновых функций МСС уменьшается, это хорошо известно из литературы (см., например, [26, 27]).

Подчеркнем, что для короткой открытой цепочки  $\varepsilon_0 \cong 0$  только в окрестности линий смены фермионной четности. Соответственно, реализуемые на таких линиях нулевые моды не являются устойчивыми по отношению к случайным флуктуациям пара-

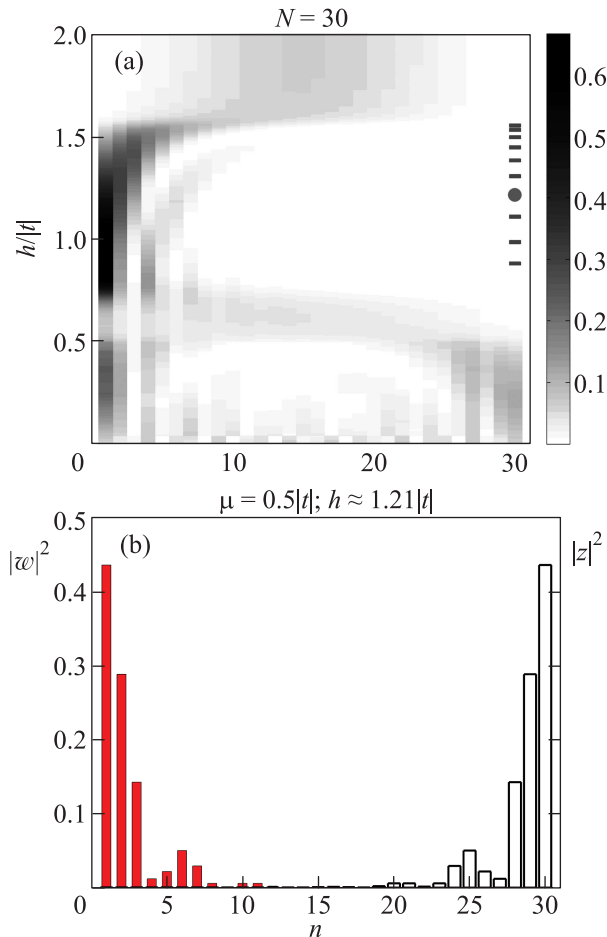


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Зависимость  $|w|^2 = |\sum_{\sigma} w_{n\sigma,0}|^2$  от магнитного поля  $h$  и индекса  $n$ , нумерующего узлы. Соответствие между значениями  $|w|^2$  и цветом на карте приведено справа от рисунка.  $\mu = 0.5|t|$ , остальные параметры соответствуют рис. 1. Поведение  $|z|^2 = |\sum_{\sigma} z_{n\sigma,0}|^2$  аналогично поведению  $|w|^2$ , если провести замену  $n \rightarrow N - n + 1$ . Штрихами и точкой справа отмечены значения  $h$  при которых реализуются состояния с нулевой энергией возбуждения. (б) – Поведение  $|w|^2$  и  $|z|^2$  при значениях  $h$ , отвечающем точке на (а)

метров<sup>2</sup>). Это принципиальным образом отличает короткие цепочки от длинных, для которых минимальная энергия возбуждений (ввиду экспоненциальной малости  $\varepsilon_0 \sim \exp(-N)$ ) может быть сколь угодно близкой к нулю в широкой области параметров, отвечающей нетривиальному значению  $Z_2$ -инварианта:  $\mathcal{M} = -1$ . Существенно, однако, что параметрические линии, для которых реализуются нулевые моды в коротких открытых цепочках, соответствуют области с  $\mathcal{M} = -1$ . Поэтому идентификация линий смены фермионной четности с помощью термодинамических характеристик в короткой открытой нанопроволоке, может служить индикатором той области

параметров, для которой в бесконечно длинной открытой нанопроволоке реализуются топологически защищенные ММ.

**4. Магнетокалорические аномалии как индикатор линий смены фермионной четности.** При нулевой температуре изменение параметров, характеризующих нанопроволоку (как открытую, так и замкнутую), ведет к серии квантовых фазовых переходов с изменением фермионной четности. При конечных температурах идентификация КП в магнитных системах может быть проведена посредством анализа магнетокалорического эффекта (magnetocaloric effect – МСЕ) [29, 30], который проявляется в изменении температуры системы при адиабатическом изменении магнитного поля:

$$\left(\frac{dT}{dh}\right)_{S,\mu} = -\frac{(\partial S/\partial h)_{T,\mu}}{(\partial S/\partial T)_{h,\mu}} = -T \frac{(\partial \langle S^z \rangle / \partial T)_{h,\mu}}{C(h,T)}, \quad (8)$$

$$\partial \langle S^z \rangle / \partial T = \frac{1}{2T^2} \sum_{m=1}^{2N} B_m \varepsilon_m f(\varepsilon_m) (1 - f(\varepsilon_m)), \quad (9)$$

$$C(h,T) = \frac{1}{T^2} \sum_{m=1}^{2N} \varepsilon_m^2 f(\varepsilon_m) (1 - f(\varepsilon_m)), \quad (10)$$

где

$$B_m = \sum_{n=1}^N (|u_{n\uparrow,m}|^2 - |u_{n\downarrow,m}|^2 + |v_{n\downarrow,m}|^2 - |v_{n\uparrow,m}|^2).$$

Из рассмотрения (8)–(10) видно, что при низких температурах, в окрестности линий нулевых мод (где  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ), величина МСЕ порядка  $1/\varepsilon_0$  и расходится на линиях нулевых мод. Также, данная характеристика меняет знак при прохождении линий КП. Зависимость МСЕ от внешнего магнитного поля для цепочки из тридцати узлов и параметров, отвечающих рис. 2, приведена на рис. 3. Штриховые линии отражают зависимость МСЕ замкнутой цепочки, для случая  $\mu = 0.5|t|$ , когда имеется два КП, сопровождающихся изменением фермионной четности. Для цепочки с открытыми границами реализуется описанный выше каскад квантовых переходов с изменением  $P$ , в окрестности которых проявляются аномалии МСЕ (сплошные кривые на рис. 3). Таким образом, аномалии МСЕ могут служить инструментом обнаружения таких параметров, при которых, в случае коротких открытых нанопроволок, реализуются КП с изменением фермионной четности основного состояния, а в случае замкнутых длинных нанопроволок реализуются топологические переходы.

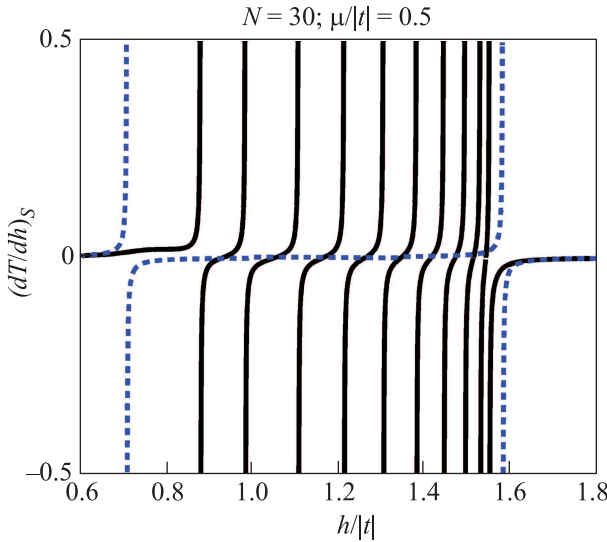


Рис. 3. (Цветной онлайн) Полевая зависимость магнетокалорического эффекта цепочки из 30 узлов.  $T = 10^{-3}|t|$ , остальные параметры такие же, что и на рис. 2. Из сопоставления с рис. 1 видно, что величина МСЕ характеризуется аномальным поведением в окрестности квантовых переходов с изменением фермионной четности основного состояния нанопроволоки

**5. Устойчивость линий смены фермионной четности при включении слабых кулоновских взаимодействий.** Решение задачи о структуре основного состояния нанопроволоки при учете одноузельных ( $\mathcal{H}_U$ ) и межузельных ( $\mathcal{H}_V$ ) кулоновских взаимодействий

$$\mathcal{H}_U = U \sum_{n=1}^N a_{n\uparrow}^+ a_{n\downarrow}^+ a_{n\downarrow} a_{n\uparrow}, \quad U > 0,$$

$$\mathcal{H}_V = V \sum_{n=1, \sigma, \sigma'}^{N-1} a_{n\sigma}^+ a_{n+1\sigma'}^+ a_{n+1\sigma'} a_{n\sigma}, \quad V > 0 \quad (11)$$

осуществлялось двумя методами.

В первом подходе использовалась точная диагонализация гамильтониана цепочки, содержащей небольшое число узлов. Затем на основе представления Лемана [31]

$$-i \langle T_i \tilde{a}_{n\sigma}^+(t) \tilde{a}_{n'\sigma'}(t') \rangle_\omega = \sum_{s=1}^{4N} \left( \frac{(a_{n\sigma}^+)_{0s} (a_{n'\sigma'})_{s0}}{\omega - E_s + E_0 + i\delta} + \frac{(a_{n'\sigma'})_{0s} (a_{n\sigma}^+)_{s0}}{\omega + E_s - E_0 - i\delta} \right) \quad (12)$$

находились энергии фермиевских возбуждений и определялись их минимальные значения. Эти точные результаты применялись в качестве теста для проверки корректности приближенного подхода, позволяющего рассчитывать свойства нанопроволоки не только с малым, но и с большим числом узлов.

Второй метод соответствует обобщенному приближению среднего поля (ОПСП). Его методическая сторона связана с применением преобразования Боголюбова к четырехфермионным операторам с последующим проведением процедуры нормализации операторных слагаемых [32, 33]. В результате такого подхода уравнения для коэффициентов преобразования приобретают форму нелинейных уравнений, поскольку эффективная квадратичная форма гамильтониана становится зависящей от параметров преобразования.

В нашем случае ренормировка введенных ранее матриц может быть представлена в виде ( $A_{\sigma\sigma} = A_{\sigma\sigma}^+$ ;  $B_{\sigma\sigma} = -B_{\sigma\sigma}^T$ )

$$\begin{aligned} (A_{\sigma\sigma})_{n,n} &= -\mu + \sigma h + U \langle a_{n,\bar{\sigma}}^+ a_{n,\bar{\sigma}} \rangle + \\ &+ V \left( \sum_{\sigma'} \langle a_{n-1,\sigma'}^+ a_{n-1,\sigma'} \rangle + \langle a_{n+1,\sigma'}^+ a_{n+1,\sigma'} \rangle \right), \\ (A_{\sigma\sigma})_{n+1,n} &= -\frac{t}{2} - V \langle a_{n\sigma}^+ a_{n+1,\sigma} \rangle, \\ (A_{\uparrow\downarrow})_{n,n} &= -U \langle a_{n\downarrow}^+ a_{n\uparrow} \rangle, \\ (A_{\uparrow\downarrow})_{n,n+1} &= -\frac{\alpha}{2} - V \langle a_{n+1\downarrow}^+ a_{n\uparrow} \rangle, \\ (A_{\uparrow\downarrow})_{n+1,n} &= \frac{\alpha}{2} - V \langle a_{n\downarrow}^+ a_{n+1\uparrow} \rangle, \\ (B_{\sigma\sigma})_{n+1,n} &= -V \langle a_{n+1\sigma} a_{n\sigma} \rangle, \\ (B_{\uparrow\downarrow})_{n,n} &= -\Delta^* + U \langle a_{n\downarrow} a_{n\uparrow} \rangle, \\ (B_{\uparrow\downarrow})_{n,n+1} &= V \langle a_{n+1\downarrow} a_{n\uparrow} \rangle, \\ (B_{\uparrow\downarrow})_{n+1,n} &= -V \langle a_{n+1\uparrow} a_{n\downarrow} \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Входящие в эти выражения средние нелинейным образом связаны с искомыми параметрами преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned} \langle a_{n\sigma}^+ a_{n'\sigma'} \rangle &= \sum_{m=1}^{2N} \left[ u_{n\sigma,m} u_{n'\sigma',m}^* f\left(\frac{\varepsilon_m}{T}\right) + \right. \\ &\left. + v_{n\sigma,m} v_{n'\sigma',m}^* \left(1 - f\left(\frac{\varepsilon_m}{T}\right)\right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle a_{n\sigma}^+ a_{n'\sigma'}^+ \rangle &= \sum_{m=1}^{2N} \left[ u_{n\sigma,m} v_{n'\sigma',m} f\left(\frac{\varepsilon_m}{T}\right) + \right. \\ &\left. + v_{n\sigma,m} u_{n'\sigma',m} \left(1 - f\left(\frac{\varepsilon_m}{T}\right)\right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $f(x)$  – функция Ферми–Дирака. В данном подходе возникает такой алгоритм, когда значения коэффициентов преобразования находятся в результате решения системы самосогласованных нелинейных уравнений.

Для коротких цепочек ( $N = 6$ ) сопоставление результатов расчетов, полученных двумя описанными выше методами, показало, что при  $U, V \lesssim |t|$  низкоэнергетические ветви спектра возбуждений  $\varepsilon_m$  и

соответствующие им одночастичные волновые функции совпадают с точностью до нескольких процентов. Соответственно этому, параметрические линии смены фермионной четности основного состояния также хорошо воспроизводятся в рамках среднего подхода. Описанные утверждения демонстрируются на рис. 4 для случая  $U = 0.5|t|$ ,  $V = 0.3|t|$ .

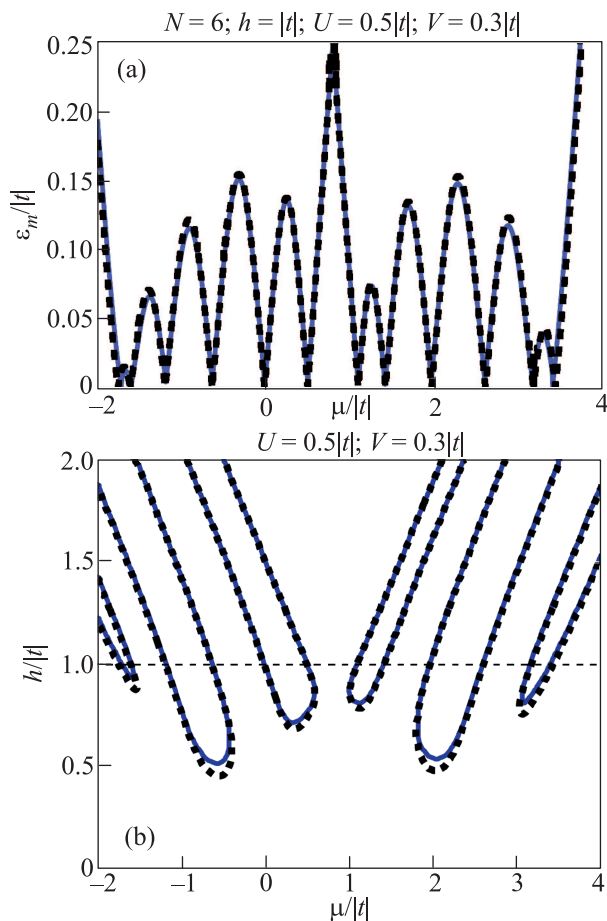


Рис. 4. (Цветной онлайн) (а) – Зависимость минимальной энергии возбуждения открытой нанопроволоки с кулоновскими взаимодействиями при  $N = 6$ ,  $h = |t|$ ,  $U = 0.5|t|$ ,  $V = 0.3|t|$  от значения химпотенциала (верхний рисунок). Сплошная линия отражает зависимость, вычисленную в рамках ОПСП. Штриховая линия отражает зависимость минимальной энергии, найденную с помощью точной диагонализации и представления Лемана. (б) – Границы фаз (при тех же параметрах) с отрицательной фермионной четностью для нанопроволоки при учете кулоновских взаимодействий. Сплошные линии – приближение ОПСП, штриховые кривые получены на основе точных расчетов. Не указанные здесь значения остальных параметров выбирались такими же, как и на рис. 1

Расчет спектральных свойств и характеристик основного состояния нанопроволок с большим числом узлов при учете кулоновских взаимодействий

проводился в рамках ОПСП. Оказалось, что при учете электрон-электронных взаимодействий, отмеченные в предыдущих разделах особенности системы сохраняются: для бесконечных замкнутых цепочек имеется область параметров, для которой реализуется топологически нетривиальная фаза. При изменении параметров внутри данной области, для открытой короткой цепочки реализуется каскад КП с изменением фермионной четности основного состояния, сопровождающийся магнетокалорическими аномалиями.

Пример карты фермионной четности открытой короткой цепочки и линий топологических переходов замкнутой длинной цепочки для случая  $U = 0.5|t|$ ,  $V = 0.3|t|$  и остальных параметрах, отвечающих рис. 1, приведены на рис. 5. Видно, что КП сохраня-

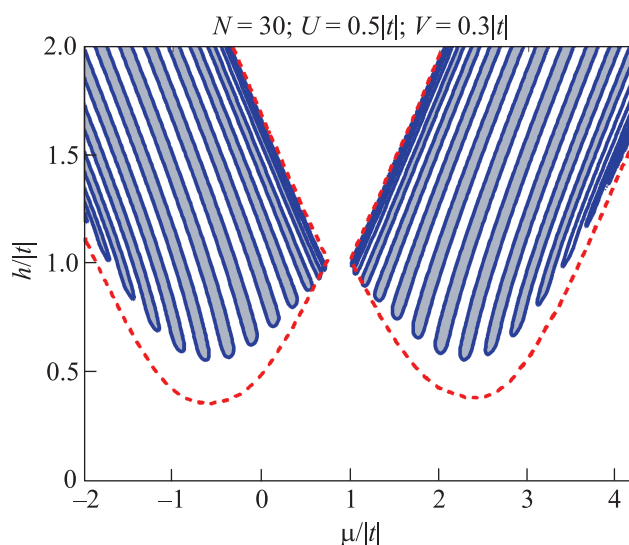


Рис. 5. (Цветной онлайн) Карта фермионной четности открытой цепочки, состоящей из 30 узлов, а также границы топологических фаз (штриховые кривые) замкнутой бесконечно длинной цепочки при учете электронных корреляций:  $U = 0.5|t|$ ,  $V = 0.3|t|$ . Остальные параметры такие же, как на рис. 1. При параметрах, отвечающих закрашенным областям, основное состояние открытой цепочки содержит парциальные вклады с нечетным числом фермионов

ются при учете электронных корреляций, хотя линии квантовых критических точек изменяют свое положение на фазовой диаграмме системы.

**6. Заключение.** Основной результат работы связан с предсказанием аномального поведения магнетокалорического эффекта в открытых коротких ( $L \sim 10 \div 100$  нм) полупроводниковых нанопроволоках с большим спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания. Такое поведение возникает в том интервале значений магнитного поля, для которого то-

пологический индекс замкнутой бесконечной нанопроволоки (число Майорана) отрицателен, и состояние последней соответствует топологически нетривиальной фазе.

Индукция аномального поведения определяется тем, что при рассмотрении открытой нанопроволоки с конечным числом узлов область параметров, для которой состояние бесконечной проволоки являлось топологически нетривиальным, разбивается на конечное число подобластей, в каждой из которых фермионная четность основного состояния отрицательна. Границами таких подобластей являются линии, для точек которых основное состояние двукратно вырождено, а среди возбуждений присутствует нулевая мода. Пересечение каждой границы сопровождается квантовым фазовым переходом со сменой фермионной четности основного состояния.

Существенно, что отмеченный квантовый переход сопровождается сменой знака величины магнетокалорического эффекта, а в квантовой критической точке магнетокалорический эффект обращается в бесконечность. Такой сценарий повторяется при каждом пересечении квантовой критической точки. Этим объясняется происхождение каскада квантовых переходов для конечной нанопроволоки при изменении магнитного поля.

Показано, что каскад квантовых переходов имеет место при учете электрон-электронных взаимодействий в нанопроволоке. При этом положение его квантовых критических точек на фазовой диаграмме системы также может быть найдено путем изучения магнетокалорических аномалий.

Важная практическая сторона предсказываемого каскада квантовых переходов связана с возможностью проведения идентификации параметрической области, соответствующей топологически нетривиальной фазе замкнутой бесконечной нанопроволоки с сильным спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания на основе изучения особенностей поведения магнетокалорического эффекта открытой короткой нанопроволоки.

Авторы выражают признательность А.Д. Федосееву и А.О. Злотникову за полезные замечания и обсуждения результатов. Работа выполнена при поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научных проектов # 16-42-243056р, 16-42-243057, 17-42-240441, а также поддержана РФФИ (проект # 16-02-00073).

1. A. Yu. Kitaev, Phys. Usp. **44**, 131 (2001).

2. M. Sato and S. Fujimoto, J. Phys. Soc. J. **85**, 072001 (2016).
3. E. M. Stoudenmire, J. Alicea, O. A. Starykh, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **84**, 014503 (2011).
4. T.-P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **84**, 195442 (2011).
5. Y.-M. Lu and Z. Wang, Phys. Rev. Lett. **110**, 096403 (2013).
6. J. Li, H. Chen, I. K. Drozdov, A. Yazdani, B. A. Bernevig, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **90**, 235433 (2014).
7. G. E. Volovik, JETP Lett. **90**, 398 (2009).
8. M. A. Silaev and G. E. Volovik, JETP **146**, 1192 (2014).
9. A. Yu. Kitaev, Ann. Phys. **321**, 2 (2006).
10. V. V. Val'kov, A. O. Zlotnikov, A. D. Fedoseev, and M. S. Shustin, J. Magn. Magn. Mat. **440**, 37 (2017).
11. A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).
12. A. Yu. Kitaev, AIP Conf. Proc. **22** (2009).
13. A. M. Turner, F. Pollmann, and E. Berg, Phys. Rev. B **83**, 075102 (2011).
14. L. Fidkowski and A. Yu. Kitaev, Phys. Rev. B **83**, 075103 (2011).
15. E. M. Stoudenmire, J. Alicea, O. A. Starykh, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **84**, 014503 (2011).
16. M. Guigou, N. Sedlmayr, J. M. Aguiar-Hualde, and C. Bena, EPL **115**, 47005 (2016).
17. P. Szumniak, D. Chevallier, D. Loss, and J. Klenovaja, Phys. Rev. B **96**, 041401(R) (2017).
18. V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, Science **336**, 1003 (2012).
19. A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman, Nature Physics **8**, 887 (2012).
20. S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, J. Li, H. Chen, S. Jeon, Ju. Seo, A. H. MacDonald, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, Science **346**, 602 (2014).
21. F. Pientka, G. Kells, A. Romito, P. W. Brouwer, and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **109**, 227006 (2012).
22. J. Liu, A. C. Potter, K. T. Law, and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **109**, 267002 (2012).
23. N. Sedlmayr and C. Bena, Phys. Rev. B **92**, 115115 (2015).
24. N. Sedlmayr, J. M. Aguiar-Hualde, and C. Bena, Phys. Rev. B **93**, 155425 (2016).
25. O. Dmytruk and J. Klenovaja, arXiv:1710.01671v1 (2017).
26. F. Pientka, A. Romito, M. Duckheim, Y. Oreg, and F. von Oppen, New J. Phys. **15**, 025001 (2013).
27. A. A. Zvyagin, Low Temp. Phys. **41**, 806 (2015).
28. S. Hegde and S. Vishveshwara, Phys. Rev. B **94**, 115166 (2016).
29. L. Zhu, M. Garst, A. Rosch, and Q. Si, Phys. Rev. Lett. **91**, 066404 (2003).
30. M. Garst and A. Rosch, Phys. Rev. B **72**, 205129 (2005).
31. H. Lehmann, Nuovo Cimento **11**, 342 (1954).
32. Б. Г. Кухаренко, ЖЭТФ **69**, 632 (1975).
33. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, ЖЭТФ **99**, 1881 (1991).