Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 5, с. 325 – 328

Долгоживущие квантовые вихревые узлы

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 12 января 2018 г.

После переработки 16 января 2018 г.

В рамках регуляризованного закона Био–Савара численно промоделирована динамика простейших квантовых вихревых узлов торического типа в сверхтекучей жидкости при нуле температуры (радиусы тора R_0 и r_0, характеризующие начальную конфигурацию вихревой нити, велики по сравнению с шириной кора вихря ξ). Вычисления времени существования узлов до момента их значительной деформации выполнены с мелким шагом по параметру $B_0 = r_0/R_0$ для различных значений параметра $\Lambda = \log(R_0/\xi)$. Обнаружено, что при $\Lambda \gtrsim 3$ открываются зоны квазиустойчивости в районе $B_0 \lesssim 0.2$, соответствующие долгому времени жизни узла и очень большому проходимому им расстоянию – вплоть до нескольких сотен R_0. Этот результат является новым и довольно неожиданным, поскольку ранее считалось, что максимальное время жизни торических узлов до момента перезамыкания не превышает нескольких характерных периодов. Появление квазиустойчивых "окон" при увеличении Λ связано с уменьшением ширины главных параметрических резонансов динамической системы по параметру B_0.

DOI: 10.7868/S0370274X18050089

Введение. В объеме сверхтекучей жидкости, помимо хорошо известных и экспериментально наблюдаемых квантовых вихревых колец, теоретически могут существовать (изменяясь во времени) также обособленные топологически нетривиальные возбуждения в виде вихревых узлов ([1–7] и ссылки там). Простейшими из них являются торические узлы $\mathcal{T}_{p,q}$, где p и q – взаимно простые натуральные числа. Соответствующий тор в начальный момент времени определяется двумя размерами – тороидальным (большим) радиусом R_0 и полоидальным (малым) радиусом r_0. Оба размера предполагаются большими по сравнению с шириной кора квантового вихря ξ. На основании имеющихся к настоящему времени численных результатов (см. цитируемую выше литературу) принято считать, что торические узлы нестабильны и перезамыкаются в течение всего нескольких характерных времен, проходя при этом расстояние в несколько R_0 (время жизни увеличивается при уменьшении отношения $B_0 = r_0/R_0$). Именно по этой причине такие узлы часто берутся в качестве начальных условий при исследовании процессов перезамыкания вихревых нитей. Упомянутые результаты были получены для не слишком больших отношений $R_0/\xi \lesssim 20$ и с очень крупным шагом (около 0.1) по параметру B_0.

В данной работе на примере узла-трилистника $\mathcal{T}_{2,3}$ показано, что на самом деле картина гораздо сложнее и интереснее. Именно при фиксированных значениях параметра $\Lambda = \log(R_0/\xi)$ зависимость времени жизни узла от B_0 оказывается резко немонотонной на достаточно малых $B_0 \lesssim 0.2$. Более того, при $\Lambda \gtrsim 3$ появляются зоны квазиустойчивости, в которых вихревой узел остается в среднем практически неизменным в течение многих десятков и даже сотен характерных времен (рис. 1). Обнаружение квазиустойчивых областей в пространстве параметров квантовых вихревых узлов представляется достаточно важным теоретическим результатом. Опишем далее способ, каким он был получен.

Модель. В пределе низких температур длинноволновую динамику квантовой вихревой нити в сверхтекучей жидкости можно с хорошей точностью аппроксимировать регуляризованным законом Био–Савара (см. [8–10] и многочисленные ссылки там) в сочетании с вкладом локальной индукции,

$$\mathbf{X}_t(\beta, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{X}'_1 \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)}{\mathrm{reg}_\xi |\mathbf{X} - \mathbf{X}_1|^3} d\beta_1 + \frac{\Gamma\Lambda_0}{4\pi} \varkappa \mathbf{b}, \quad (1)$$

где β – произвольный продольный параметр вдоль кривой, t – время, $\Gamma = 2\pi\hbar/m$ – квант циркуляции скорости (m – масса атома), $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(\beta_1, t)$, $\mathbf{X}'_1 = \partial \mathbf{X}(\beta_1, t)/\partial \beta_1$, Λ_0 – безразмерный положительный параметр, характеризующий потенциальную энергию кора вихря, $\varkappa$ – локальная кривизна нити, $\mathbf{b}$ – локальный единичный вектор бинормали. Способ регуляризации логарифмически расходящегося интеграла почти не влияет на динамику нити,

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

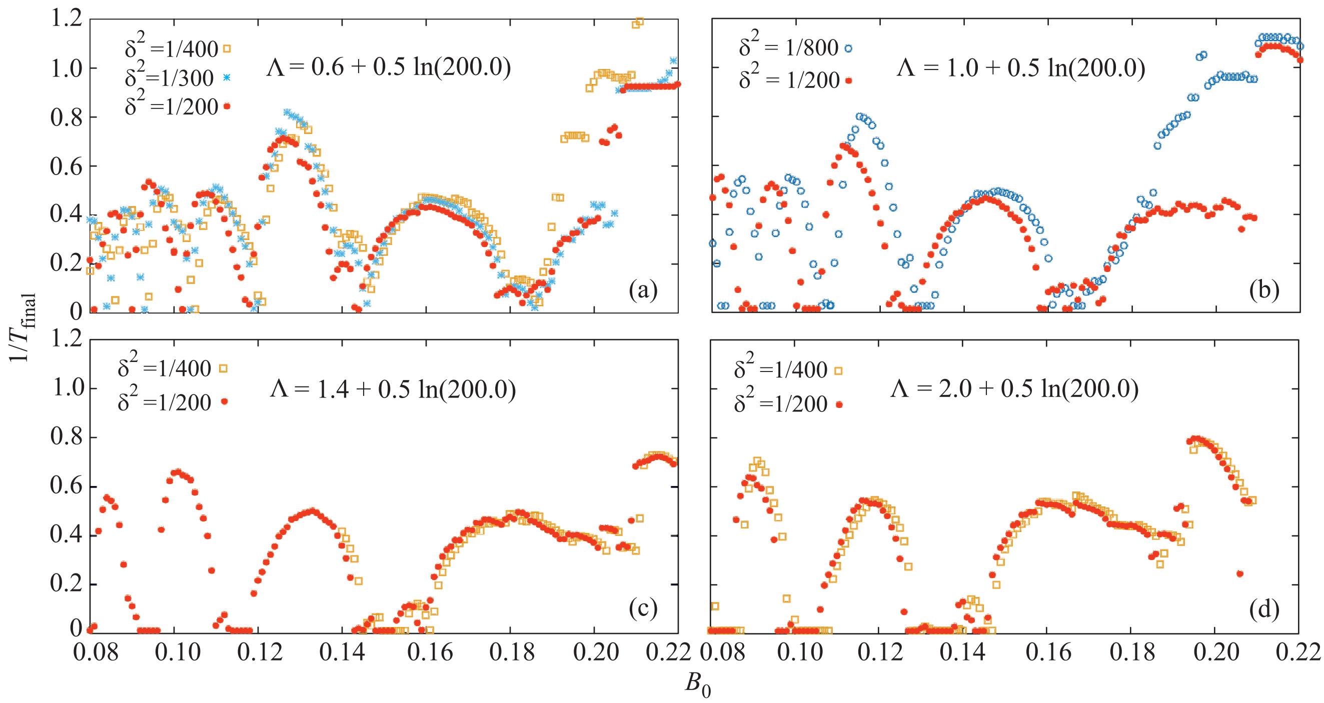

Рис. 1. (Цветной онлайн) Обратное время жизни вихревого узла-трилистника $\mathcal{T}_{2,3}$ при разных (a–d) параметрах

если параметр Λ_0 определяется согласованно. Часто выбирают

$$\text{reg}_\xi|\mathbf{X}-\mathbf{X}_1|^3=\sqrt{(|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|^2+\xi^2)^3}. \qquad (2)$$

В качестве дополнительного аргумента в пользу применимости уравнения (1) стоит сказать, что имеется ряд квазимикроскопических моделей сверхтекучей гидродинамики типа модифицированного уравнения Гросса–Питаевского [11–13]:

$$i\hbar\Psi_t=\delta H/\delta\Psi^* \qquad (3)$$

с различными гамильтонианами вида

$$H\{\Psi,\Psi^*\}=\int\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\Psi|^2d^3\mathbf{r}+W\{|\Psi|^2\}, \qquad (4)$$

причем функционал потенциальной энергии $W\{|\Psi|^2\}$ может быть и нелокальным. В этих моделях комплексный параметр порядка $\Psi=\sqrt{\rho_s/m}\exp(i\Phi)$ определяет собой сверхтекучую плотность ρ_s и сверхтекучую скорость $\mathbf{v}_s=(\hbar/m)\nabla\Phi$. Из результатов недавней работы [14] следует, что для таких динамических систем соответствующее уравнение движения вихревой нити в крупномасштабном пределе имеет гамильтонову неканоническую структуру

$$\Gamma[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}_t]\rho_0\approx\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{X}(\beta), \qquad (5)$$

где ρ_0 – равновесная плотность сверхтекучей жидкости вдали от вихря. Динамика (1) получается из этого уравнения при некотором виде продольной компоненты вектора $\mathbf{X}_t$, которая в рамках уравнения (5) остается неопределенной в соответствии с произволом в выборе продольного параметра β. Здесь подразумевается, что гамильтониан нити $\mathcal{H}$ равен сумме создаваемой вихрем кинетической энергии $\mathcal{K}=\int(\rho_s\mathbf{v}_s^2/2)d^3\mathbf{r}$ и эффективной потенциальной энергии $\mathcal{U}$ (с учетом квантового давления), причем последняя сосредоточена в коре вихря. Функционал $\mathcal{K}$ нелокален и при выборе регуляризации в форме (2) имеет вид

$$\mathcal{K}\{\mathbf{X}(\beta)\}=\frac{\rho_0\Gamma^2}{8\pi}\oint\oint\frac{(\mathbf{X}_1'\cdot\mathbf{X}_2')d\beta_1d\beta_2}{\sqrt{|\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2|^2+\xi^2}}. \qquad (6)$$

Функционал $\mathcal{U}$ пропорционален длине вихревой нити,

$$\mathcal{U}\{\mathbf{X}(\beta)\}=\frac{\rho_0\Gamma^2\Lambda_0}{4\pi}\oint|\mathbf{X}'|d\beta, \qquad (7)$$

с параметром Λ_0 порядка единицы, точное значение которого зависит от явного вида функционала W. Этот параметр придает жесткость предельно коротковолновым модам.

Заметим еще, что длинноволновая динамика этой системы слабо чувствительна к замене параметров регуляризованного гамильтонина $\xi\to\delta$, $\Lambda_0\to\Lambda_0+\log(\delta/\xi)$, где δ – произвольная величина порядка ξ,

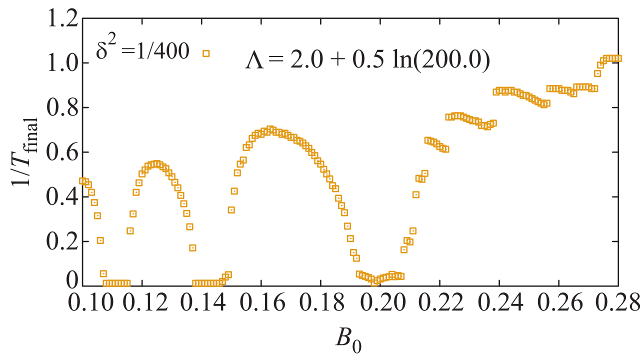

Рис. 2. (Цветной онлайн) Обратное время жизни вихревого узла $\mathcal{T}_{3,2}$

если только конфигурация нити достаточно далека от самопересечений. В частности, можно переопределить параметр ξ таким образом, что $\Lambda_0 = 0$. Это и будет предполагаться в дальнейшем. Данная замена оставляет неизменным полный параметр локальной индукции

$$\Lambda = \log(R_0/\xi) = \log(R_0/\delta) + \tilde{\Lambda}_0, \qquad (8)$$

где $\tilde{\Lambda}_0 = \log(\delta/\xi)$. Указанное свойство гамильтониана позволяет проводить компьютерное моделирование с меньшим массивом дискретных точек, чем того требовали бы малые значения ξ/R_0, если при этом брать δ больше нескольких ξ. В наших численных экспериментах основными параметрами были Λ и δ.

Использовались обезразмеренные переменные, так что $\Gamma = 2\pi$, $R_0 = 1$. Таким образом, моделировалась динамическая система, эквивалентная уравнению

$$\mathbf{X}_t(\beta, t) = \frac{1}{2}\oint \frac{\mathbf{X}_1' \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)d\beta_1}{\sqrt{(|\mathbf{X} - \mathbf{X}_1|^2 + \delta^2)^3}} + \frac{\tilde{\Lambda}_0}{2}\varkappa\mathbf{b}, \qquad (9)$$

с начальными данными в виде слегка возмущенного торического узла-трилистника с $R_0 = 1$, $r_0 = B_0$. Заметим кстати, что это квазислучайное малое возмущение было в некотором смысле дополнительным, поскольку идеальный торический узел сам по себе не является в точности стационарной конфигурацией нашей динамической системы. Другими словами, стационарно вращающийся и движущийся узел, точную форму которого мы не знаем, лежал бы на некотором деформированном торе – тем более отличном от идеального, чем больше параметр B_0.

Нами применялась псевдоспектральная схема по переменной β и схема Рунге–Кутта 4-го порядка для интегрирования по времени. Продвижение по времени заканчивалось, если деформация узла становилась достаточно большой. При этом для каждого набора параметров фиксировалось достигнутое время T_{final}. Как показала практика вычислений, точный вид критерия завершения отдельного прогона не очень важен для нахождения квазиустойчивых конфигураций, поэтому мы здесь не приводим всех подробностей.

Результаты. Численно найденные зависимости времени жизни узла-трилистника от параметра B_0 показаны на рис. 1a–d. Видно, что при фиксированном Λ различие результатов, соответствующих разным δ, довольно невелико, в согласии со сделанным выше замечанием. Однако отличия все же имеются, так как из-за нелинейных взаимодействий на больших временах появляются коротковолновые возбуждения формы нити, несомненно чувствующие разницу между гамильтонианами с разными δ. Поэтому максимально аккуратное моделирование, по-видимому, требует использования оригинальных (непереопределенных) параметров ξ и Λ_0. Это замечание не отменяет основной вывод о наличии квазиустойчивых областей в плоскости параметров (B_0, Λ).

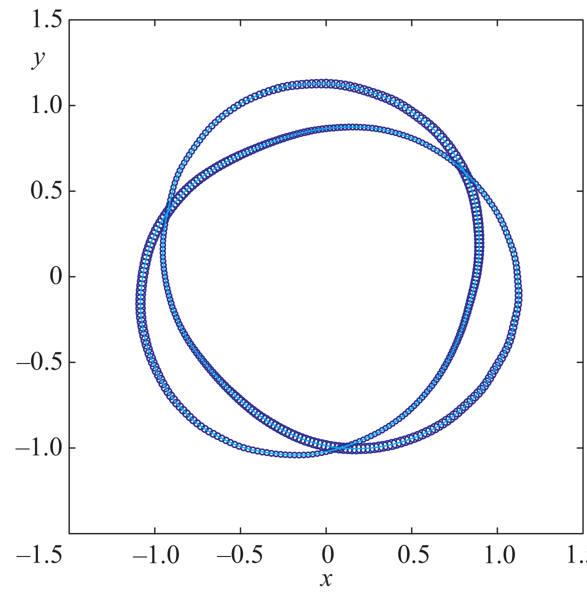

Рис. 3. (Цветной онлайн) Проекция вихревого узла $\mathcal{T}_{2,3}$ с параметрами $\Lambda = 1.4 + 0.5\log(200) \approx 4.05$, $\delta = 1/20$, $B_0 = 0.154$ на плоскость (x, y) при $t = 320$. Линия тем толще, чем больше локальная координата z

В целом, при увеличении Λ фрагменты графиков обратного времени жизни отчетливо напоминают сегменты эллипсов с центрами на горизонтальной оси B_0. Некоторые из эллипсов пересекаются, а некоторые разделены участками, где значения $1/T_{\text{final}}$ очень малы. Качественно похожие результаты име-

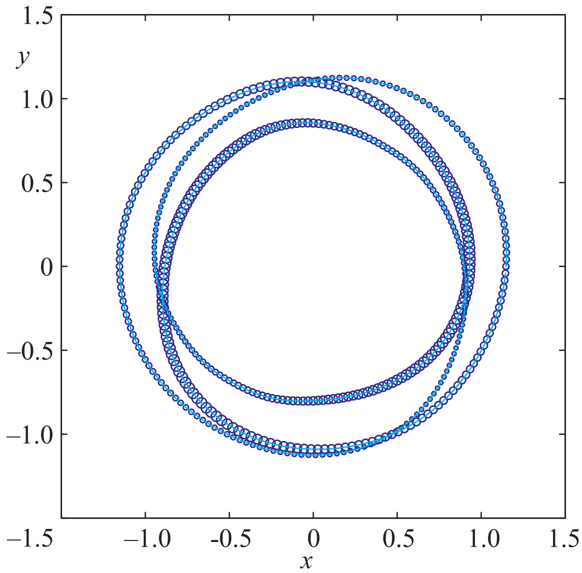

Рис. 4. (Цветной онлайн) Проекция вихревого узла $\mathcal{T}_{3,2}$ с параметрами $\Lambda = 2.0 + 0.5\log(200) \approx 4.65$, $\delta = 1/20$, $B_0 = 0.198$ на плоскость (x, y) при $t = 70$

ют место и для узла $\mathcal{T}_{3,2}$ (см. рис. 2). Фактически, на рисунках представлена лишь нижняя оценка времени жизни, поскольку в окнах квазиустойчивости вычисления завершались при фиксированном, хотя и достаточно большом $T_{\max}$ – задолго до сильной деформации узла. Поэтому пока не ясно, обращается ли там инкремент неустойчивости точно в нуль, или же всегда остается конечным, хоть и чрезвычайно малым. В дополнительных численных экспериментах в некоторых случаях время жизни трилистника превосходило 300, а пройденное им расстояние превышало 1200 (рис. 3). Гамильтониан при этом сохранялся по меньшей мере до семи десятичных цифр, что свидетельствует о хорошем качестве численного моделирования. Пример узла $\mathcal{T}_{3,2}$ с большим, но заведомо конечным временем жизни показан на рис. 4.

Если грубо считать, что полученное обратное время жизни пропорционально инкременту главной неустойчивости, то такая картина свидетельствует о наличии в системе параметрических резонансов, ширины которых уменьшаются с увеличением Λ, а положения центров сдвигаются в сторону меньших B_0.

Заключение. Таким образом, в данной работе теоретически предсказаны чрезвычайно долгоживущие квантовые вихревые узлы. Этот результат существенно обогащает наше знание о динамике вихревых нитей. Задачей на будущее является подробное аналитическое исследование и объяснение структуры параметрических резонансов, характерных для торических узлов как гамильтоновых систем.

1. R. L. Ricca, D. C. Samuels, and C. F. Barenghi, J. Fluid Mech. **391**, 29 (1999).
2. F. Maggioni, S. Alamri, C. F. Barenghi, and R. L. Ricca, Phys. Rev. E **82**, 026309 (2010).
3. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, Phys. Rev. E **85**, 036306 (2012).
4. D. Kleckner and W. T. M. Irvine, Nature Physics **9**, 253 (2013).
5. D. Proment, M. Onorato, and C. F. Barenghi, J. Phys.: Conf. Ser. **544**, 012022 (2014).
6. P. Clark di Leoni, P. D. Mininni, and M. E. Brachet, Phys. Rev. A **94**, 043605 (2016).
7. D. Kleckner, L. H. Kauffman, and W. T. M. Irvine, Nature Physics **12**, 650 (2016).
8. K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).
9. M. Tsubota, T. Araki, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. B **62**, 11751 (2000).
10. A. W. Baggaley and C. F. Barenghi, Phys. Rev. B **83**, 134509 (2011).
11. N. G. Berloff and P. H. Roberts, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 5611 (1999).
12. N. G. Berloff, M. Brachet, and N. P. Proukakis, Proc. National Academy of Sciences **111**, 4675 (2014).
13. S. K. Adhikari and L. Salasnich, Phys. Rev. A **77**, 033618 (2008).
14. M. D. Bustamante and S. Nazarenko, Phys. Rev. E **92**, 053019 (2015).