Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 7, с. 434 – 439 © 2018 г. 10 апреля

Точные локальные решения для формирования особенностей на свободной поверхности идеальной жидкости

Н. М. Зубарев[+*1)], Е. А. Карабут[#×]

[+]Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

[*]Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

[#]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

[×]Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 29 января 2018 г.
После переработки 12 февраля 2018 г.

Рассмотрена классическая задача о динамике свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины. В отсутствие внешних сил и капиллярности выявлена возможность реализации режима движения жидкости, при котором давление является квадратичной функцией компонент скорости. Показано, что для этой ситуации уравнения плоского потенциального течения линеаризуются в конформных переменных, а затем легко решаются аналитически. Найденное решение включает произвольную функцию, задающую исходную форму границы жидкости. Развиваемый подход впервые позволил локально описать формирование различного рода особенностей на поверхности жидкости – пузырей, капель, точек заострения.

DOI: 10.7868/S0370274X18070056

1. Введение. Удобным подходом к описанию потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в плоской двумерной постановке является использование метода конформных отображений: осуществляется преобразование занимаемой жидкостью области в полуплоскость [1–3], полосу [4, 5], либо круг [6]. Это позволяет свести исходную (2+1)-мерную задачу на движение жидкости к (1+1)-мерной задаче на движение ее границы. Получающиеся нелинейные уравнения, тем не менее, остаются достаточно сложными – для них до сих пор не развито эффективных методов построения решений.

В рамках метода конформных отображений движение свободной границы определяется движением особенностей комплексной скорости вне жидкости, а их выход на границу жидкости приводит к образованию на ней геометрических особенностей. Характерным типом особых точек (в них нарушается аналитичность комплексной скорости) являются корневые особенности [6, 7]. К аналогичному выводу относительно роли корневых особенностей приводит анализ динамики свободной поверхности [8], а также поверхности раздела жидкостей [9] в пренебрежении поверхностными силами и силой тяжести при помощи традиционной теории возмущений по малому параметру – углу отклонения поверхности от плоской. На границе образуются точки с бесконечной кривизной в результате приближения к ней корневых особенностей, движение которых описывается уравнением Хопфа на комплексную скорость. В серии недавних работ [10–12] было обнаружено, что и непосредственно уравнения Эйлера для движения жидкости со свободной границей допускают редукцию к комплексному уравнению Хопфа. Это позволило построить ряд многопараметрических точных локальных решений, описывающих различные нестационарные течения с образованием особенностей.

В настоящей работе мы объединили предложенный в [10] подход с методом конформных отображений. Это позволило выявить класс нестационарных течений жидкости со свободной границей в отсутствие внешних сил и капиллярности, для которого уравнения движения в конформных переменных становятся линейными и легко решаются аналитически. С использованием полученных точных локальных решений изучены различные сценарии взаимодействия особенностей комплексной скорости со свободной границей, приводящего к формированию за конечное время точек заострения, капель и пузырей. Так, при приближении к границе отдельной корневой особенности образуются заостренные лунки в

1)e-mail: nick@iep.uran.ru

поверхности. Капли “вырезаются” из основной массы жидкости парой корневых особенностей. Пузыри появляются при столкновении встречных потоков жидкости. Разнообразие выявленных режимов обусловлено тем обстоятельством, что построенное нами решение включает в себя произвольную функцию, определяющую форму границы в начальный момент времени.

Найденный класс точных локальных решений может иметь важное значение в контексте общей проблемы интегрируемости уравнений движения жидкости со свободной границей [13]. Ранее [4] были выявлены два предельных случая (малоугловое приближение и приближение большой кривизны границы), для которых уравнения движения жидкости со свободной границей удается проинтегрировать; построение точных локальных решений также оказывается возможным в присутствии электрического поля – см. [14, 15].

2. Исходные уравнения; невозмущенные решения. Выпишем уравнения движения для плоского потенциального течения идеальной жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью в отсутствие силы тяжести и капиллярности. Пусть жидкость исходно занимает полуплоскость $y \leq 0$ и $-\infty < x < +\infty$, т.е. невозмущенная граница жидкости – прямая $y = 0$. Отклонение поверхности от плоской задается функцией $\eta(x,t)$, т.е. форма возмущенной границы задается уравнением $y = \eta$.

Поле скоростей определяется единственной функцией – потенциалом скорости φ. Для x- и y-компонент вектора скорости имеем: $u = \partial\varphi/\partial x$ и, соответственно, $v = \partial\varphi/\partial y$. Потенциал скорости несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

Не теряя общности, можно положить для давления на свободной границе:

$$p = 0 \quad \text{при} \quad y = \eta. \qquad (2)$$

Тогда условие непротекания жидкости через границу (кинематическое граничное условие) можно записать как

$$\frac{dp}{dt} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \eta. \qquad (3)$$

Уравнение Лапласа (1) при соответствующем выборе $p(x,y,t)$ совместно с нестационарным уравнением Бернулли

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2+v^2}{2} = -\frac{p}{\rho}, \qquad (4)$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости. Если это уравнение рассматривать лишь на границе $y = \eta$, где давление известно, то оно будет играть роль граничного (динамического) условия к (1).

Как правило, считается, что в невозмущенном состоянии жидкость покоится: реализуется тривиальное решение уравнений движения:

$$u = v = 0, \qquad p = 0. \qquad (5)$$

Тогда в задаче об эволюции возмущений границы глубокой воды на бесконечности (при $x^2 + y^2 \to \infty$) должны выполняться условия: $u \to 0$ и $v \to 0$.

Можно указать также нетривиальное невозмущенное решение уравнений (1)–(4):

$$\eta = 0, \qquad \varphi = (x^2 - y^2)/2t, \qquad p = -\rho y^2/t^2. \qquad (6)$$

Для описываемого этими формулами нестационарного течения исходно плоская поверхность жидкости остается неподвижной – на ней $v = 0$. При $t < 0$ жидкость движется вдоль границы к началу координат ($u > 0$ при $x < 0$ и $u < 0$ при $x > 0$), а при $t > 0$ – от начала координат. Это автомодельное решение теряет смысл в момент $t = 0$.

3. Редуцированные уравнения движения. Продемонстрируем, что рассматриваемая задача (1)–(4) совместна с предположением, что давление в жидкости (p) и y-компонента скорости (v) связаны простым соотношением:

$$p = -\rho v^2. \qquad (7)$$

Очевидно, что оба указанных невозмущенных решения (5) и (6) задачи удовлетворяют этому условию.

При выполнении (7) величины p и v обращаются в нуль одновременно. Тогда из условия (2) получим:

$$v = 0 \quad \text{при} \quad y = \eta, \qquad (8)$$

т.е. вертикальная компонента скорости на свободной границе отсутствует. Как следствие, автоматически выполняется кинематическое граничное условие (3):

$$\frac{dp}{dt} = -2\rho v\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad y = \eta. \qquad (9)$$

Убедимся теперь, что гипотеза (7) совместна с уравнениями Лапласа (1) и Бернулли (4). Подставляя (7) в (4), находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2 - v^2}{2} = 0. \qquad (10)$$

Удобно использовать комплексный потенциал скорости $\Phi(z,t) = \varphi + \mathrm{i}\psi$, который является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + \mathrm{i}y$ (здесь ψ – функция тока, гармонически сопряженная с φ). Уравнение (10) перепишется как

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}U^2\right) = 0,$$

где $U \equiv \partial\Phi/\partial z \equiv u - \mathrm{i}v$ – комплексная скорость. Это означает, что если Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}U^2 = 0, \tag{11}$$

то уравнение Бернулли (10) также будет выполняться. При этом уравнение (1) выполняется в силу аналитичности Φ.

Если продифференцировать (11) по z, получим уравнение Хопфа на комплексную скорость:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Как оказывается, оно описывает специальный класс течений жидкости, удовлетворяющий условию (7).

4. Преобразование годографа; точное локальное решение. В разд. 1 мы указывали, что при исследовании эволюции жидкости со свободной поверхностью удобно осуществить конформное отображение занимаемой жидкостью области в полуплоскость [1–3]. При этом исходная задача с неизвестной границей сводится к более простой задаче с границей, форма которой известна (в конформных переменных это – прямая).

Для рассматриваемой нами ситуации подобное отображение имеет чрезвычайно простую интерпретацию. Оно соответствует преобразованию годографа, когда переменная z выбирается в качестве новой неизвестной функции, а функция U – в качестве новой независимой переменной. Иными словами, мы будем использовать в качестве независимых переменных компоненты вектора скорости u и v, а декартовы координаты x и y станут неизвестными функциями. Такое преобразование, в силу аналитичности U, является конформным. Оно, как ясно из (8), естественным образом отображает границу жидкости $y = \eta(x,t)$ в прямую $v = 0$.

Итак, осуществим отображение $z \to U$ для жидкости со свободной границей, течение которой описывается уравнением (12). Входящие в него производные выражаются через новую функцию $z(U,t)$ как

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^{-1}, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^{-1}.$$

В итоге получим простейшее линейное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = U.$$

Его общим решением, очевидно, является

$$z = Ut + F(U), \tag{13}$$

где F – некоторая комплексная функция. В вырожденном случае $F = 0$ решение (13) превращается в автомодельное решение (6) задачи. Тогда (формально) решение (13) допускает интерпретацию как описывающее развитие неустойчивости течения (6). В пределах $t \to \pm\infty$ решение (13) превращается в тривиальное решение (5).

Будем считать, что $F \to 0$ при $|U| \to \infty$. В такой ситуации решение (13) удовлетворяет следующему условию на бесконечности:

$$z \to Ut \quad \text{при} \quad |U| \to \infty.$$

Тогда при $t < 0$ преобразование годографа является конформным отображением в верхнюю полуплоскость комплексной переменной U (т.е. в область $v \le 0$ и $-\infty < u < +\infty$), а при $t > 0$ – в нижнюю полуплоскость ($v \ge 0$ и $-\infty < u < +\infty$). Понятно, что функция $F(U)$ должна быть аналитической в соответствующей полуплоскости.

На свободной поверхности, как следствие (8), имеем $U = u$. Тогда ее эволюция задается выражением $z = ut + F(u)$, или, если разделить вещественную и мнимую части, явными выражениями

$$x = ut + \mathrm{Re}\,F(u), \qquad y = \mathrm{Im}\,F(u), \tag{14}$$

где x-компонента скорости u играет роль параметра. Решение содержит произвольную функцию F, выбор которой определяет форму границы.

Для решения (13) в общем случае имеется ненулевой поток жидкости через окружность бесконечного радиуса. Изменение количества жидкости (S) со временем определяется простым выражением

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\,F(u)\,du.$$

Условием неизменности S тогда является:

$$Q \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\,F(u)\,du = 0. \tag{15}$$

Отметим, что это требование не вносит принципиальных ограничений на функцию F. Если оно не выполняется при выбранном F, то всегда можно добавить к F вспомогательную функцию F_0, обеспечивающую реализацию (15), но не влияющую существенно на эволюцию системы. Так, если соответствующий интеграл – финитен, можно, например, взять $F_0 = Q/(\pi U + \mathrm{i}a)$ и затем устремить константу a в бесконечность, исключив тем самым влияние добавки F_0 на динамику границы.

Для описываемого решением (13) течения компоненты вектора скорости при $x^2 + y^2 \to \infty$ являются линейными функциями координат: $u \to x/t$ и $v \to -y/t$. В таком случае кинетическая энергия и импульс системы – формально бесконечны. В разд. 5 и 6 мы обсудим, какие ограничения это может накладывать на использование полученных решений для описания эволюции систем с конечной энергией.

5. Движение особых точек. Наиболее интересные и сложные для описания явления в жидкостях со свободной поверхностью связаны с образованием геометрических особенностей. Для понимания механизмов формирования особенностей важно исследовать движение (в комплексной плоскости z) особых точек, в которых нарушается аналитичность комплексной скорости U. Положение таких точек определяется из условия $\partial z/\partial U = 0$, или, для полученного нами точного локального решения (13), из условия $F'(U) = -t$, где штрих обозначает производную по аргументу. Это выражение задает некую траекторию (или траектории) $U_0(t)$ в комплексной плоскости U:

$$F'(U_0(t)) = -t. \tag{16}$$

Траектория движения особенности в плоскости z определяется выражением, следующим из (13):

$$z_0(t) = tU_0(t) + F(U_0(t)). \tag{17}$$

Найдем распределение скорости в окрестности особой точки. Введем обозначения: $\delta z = z - z_0(t)$ и $\delta U = U - U_0(t)$. Раскладывая (13) по малым δz и δU, получим в случае общего положения ($F'' \neq 0$) в основном порядке:

$$\delta z = F''(U_0(t))\,\delta U^2/2 + \ldots, \tag{18}$$

где мы учли (16) и (17). Разрешая (18) относительно δU, находим для распределения скорости в окрестности особых точек:

$$U(z,t) \approx \dot z_0 + \sqrt{2\ddot z_0(z_0 - z)}, \tag{19}$$

где $\dot z_0$ и $\ddot z_0$ – скорость и, соответственно, ускорение особой точки:

$$\dot z_0(t) \equiv \frac{dz_0}{dt} = U_0(t), \qquad \ddot z_0(t) \equiv \frac{d\dot z_0}{dt} = -\frac{1}{F''(U_0(t))}.$$

Таким образом, в случае общего положения мы имеем дело с движением корневых особенностей комплексной скорости (см. также [8, 9, 16, 17]). Пусть для определенности $t < 0$. Тогда особенности могут находиться только в нижней полуплоскости комплексной переменной $U \equiv u - \mathrm{i}v$, т.е. при $v > 0$. При выходе особых точек на вещественную ось $v = 0$ аналитичность U нарушается, что будет проявляться как формирование геометрических особенностей на свободной поверхности жидкости. В частности, если особенность близка к границе и вблизи нет других особенностей, то, вследствие (8), эволюция границы будет описываться выражением:

$$\mathrm{Im}\left[\dot z_0 + \sqrt{2\ddot z_0(z_0 - z)}\right] \approx 0. \tag{20}$$

Взаимодействие корневых особенностей вида (19) с границей носит локальный характер – на него не влияет распределение скорости на периферии. Важно также, что выход сингулярности на границу не требует локализации кинетической энергии системы: при конечных $\dot z_0$ и $\ddot z_0$ энергия и импульс в окрестности особой точки, где $\delta U \sim \sqrt{\delta z}$, будут конечными. Тогда можно ожидать, что полученные решения будут локально описывать формирование геометрических особенностей на свободной поверхности для систем с конечными энергией и импульсом.

6. Формирование точек заострения, пузырей, капель. Полученное в настоящей работе точное локальное решение (13) позволяет описать процессы в жидкости со свободной поверхностью, связанные с существенными изменениями ее топологии. Проиллюстрируем на нескольких примерах сценарии формирования особенностей на свободной границе.

Выберем функцию F виде

$$F = 1/(U + i), \tag{21}$$

т.е. она имеет полюс в точке $U = -i$. Анализ решения (13) тогда показывает, что комплексная скорость имеет две особые точки $z_{1,2}(t) = -it \pm 2i\sqrt{-t}$, которые двигаются по комплексной оси. При $t = -1$ одна из сингулярностей выходит на границу жидкости. Форма поверхности в этот момент в окрестности особой точки определяется формулой $y \approx -1 + |x|^{2/3}$, что соответствует точке заострения (рис. 1). Подобное поведение системы полностью описывается выведенным в разд. 5 общим выражением (20).

Далее, пузырь будет образовываться при, например, следующем выборе функции F:

$$F = -\frac{3/2 - 2i}{U - 3 + i} - \frac{3/2 + 2i}{U + 3 + i}. \tag{22}$$

Она содержит пару полюсов в точках $U = \pm 3 - i$. Эволюция границы, соответствующая (22), показана на рис. 2. Видно, что в момент времени $t = -3/4$ два разных участка свободной границы сталкиваются друг с другом в начале координат $x = 0$ и

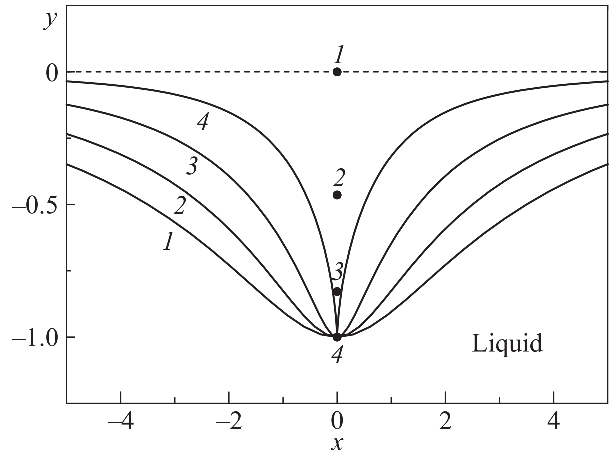

Рис. 1. Форма границы жидкости для (21) в последовательные моменты времени $t=-4,\ -3,\ -2,\ -1$ (кривые *1–4*); штриховая линия – невозмущенная граница. Точками показаны соответствующие этим моментам положения особой точки. При выходе особенности на границу образуется точка заострения

$y=0$ (встречные потоки жидкости движутся со скоростями $u=\pm\sqrt{6}$). В результате происходит формирование пузыря. Примечательно, что этот процесс не связан с выходом особенностей потенциала скорости на границу (это происходит позже, в момент $t=-12/25$, когда граница уже самопересекается).

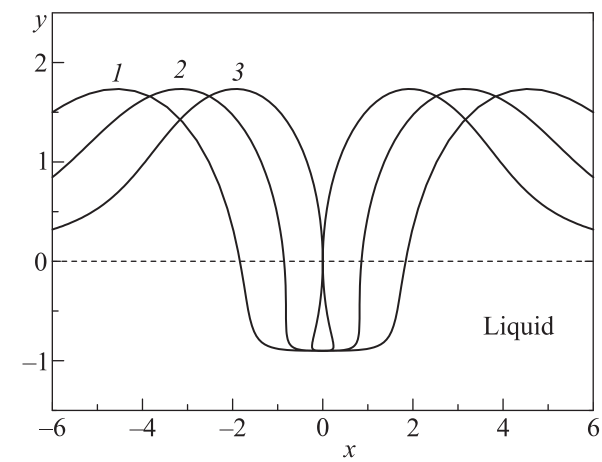

Рис. 2. Форма границы жидкости для (22) в моменты времени $t=-1.5,\ -1.1,\ -0.75$ (кривые *1–3*); штриховая линия – невозмущенная граница. Как видно, в момент $t=-0.75$ два различных участка свободной границы соприкасаются, и образуется пузырь

Отметим, что для этих сценариев формирования особенностей (оба включают в себя, как видно из рис. 1 и 2, столкновение встречных потоков жидкости) энергия ограничена в окрестности сингулярности. Это позволяет сделать вывод, что соответствующие точные локальные решения могут использоваться для локального описания образования геометрических особенностей на свободной поверхности жидкости при условии затухания скорости на бесконечности.

Можно указать и противоположный пример. Так, рассмотрим образование капли. Положим

$$F=-1/(U+i), \tag{23}$$

что отличается от (21) лишь знаком. Комплексная скорость в этом случае имеет пару особенностей в точках $z_{1,2}(t)=-it\pm 2\sqrt{-t}$. Особые точки двигаются к свободной поверхности, одновременно выходя на нее к моменту $t=0$ в начале координат $z=0$. Поверхность при $t\to 0$ вырождается в прямую $y=0$ и касающуюся ее окружность $x^2+y^2=y$ единичного диаметра (рис. 3). Таким образом, капля “вырезается” из основной массы жидкости парой корневых особенностей. Сталкиваясь, они образуют полюс: получим для $t=0$ из (13) и (23): $U=-1/z-i$. В таком случае кинетическая энергия жидкости логарифмически расходится в особой точке. Это означает, что в реальной ситуации, когда энергия системы (W) ограничена, корневые особенности могут сближаться по описанному сценарию лишь до расстояния $\varepsilon\sim\exp(-W)$. На масштабе меньшем ε следует ожидать замедления их движения.

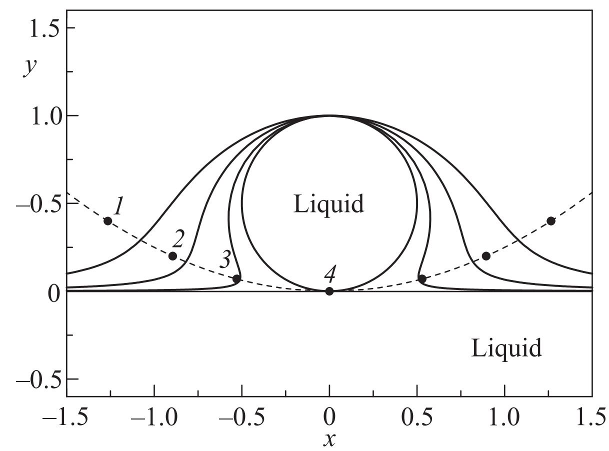

Рис. 3. Форма границы для (23) в последовательные моменты времени $t=-0.4,\ -0.2,\ -0.07,\ -10^{-6}$ (кривые *1–4*). Точками показаны соответствующие этим моментам положения особых точек (штриховые линии – их траектории). К моменту $t=0$ две корневые особенности одновременно выходят на границу, “вырезая” каплю из основной массы жидкости

Нетрудно построить и более сложные, чем (21)–(23), примеры, используя другие представления для функции F. Так, к примеру, можно взять функцию, содержащую произвольное число полюсов (это позволяет аппроксимировать произвольное исходное возмущение границы жидкости).

7. Заключение. Для плоских стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей точные локальные решения могут быть найдены с помощью метода Кирхгофа – см., например, [18]. Что же касается нестационарных течений, универсального метода построения решений не существует. Известен лишь открытый Дирихле [19] класс точных локальных решений – течения с линейным полем скоростей (u и v являются линейными функциями от x и y). Свободная поверхность в этом случае может быть параболой, эллипсом, гиперболой, или, в вырожденном случае, прямой линией [20].

В настоящей работе построен новый, широкий класс точных локальных решений в задаче о движении жидкости со свободной границей в отсутствие силы тяжести и капиллярности. Этот класс решений описывает нелинейную эволюцию возмущений исходного течения с линейным полем скоростей, для которого область, занимаемая жидкостью, первоначально представляет собой полуплоскость. В рамках полученных решений впервые удалось аналитически описать формирование за конечное время пузырей, капель, острий на поверхности жидкости.

Отметим, что в недавней работе [21] было найдено автомодельное решение трехмерного уравнения Эйлера для неограниченной жидкости, для которого поле скоростей на периферии линейно по координатам, при этом, как было численно продемонстрировано, это решение локально реализуется при начальных условиях общего вида (см. также [22]). Можно предположить, что и в нашем случае выявленные сценарии формирования особенностей окажутся универсальными: полученные решения будут локально описывать эволюцию свободной границы при тривиальных условиях ($u \to 0$ и $v \to 0$) на бесконечности.

Работа выполнена в рамках темы гос. задания 0389-2015-0023 при поддержке РАН (программы Президиума РАН №2 “Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения” и УрО РАН “Физические модели, теории, устройства”, проект 18-2-2-15) и РФФИ (проекты # 17-08-00430 и 16-08-00228).

1. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
2. А. И. Дьяченко, ДАН **376**(1), 27 (2001).
3. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, Europ. J. Mech. B. **21**, 283 (2002).
4. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Физика плазмы **22**, 916 (1996).
5. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **70**, 066302 (2004).
6. S. Tanveer, Proc. R. Soc. Lond. A **435**, 137 (1991).
7. P. M. Lushnikov, J. Fluid Mech. **800**, 557 (2016).
8. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. E **49**, 1283 (1994).
9. N. M. Zubarev and E. A. Kuznetsov, J. Exp. Theor. Phys. **119**, 169 (2014).
10. Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева, ДАН **458**, 656 (2014).
11. E. A. Karabut and E. N. Zhuravleva, J. Fluid Mech. **754**, 308 (2014).
12. Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева, ДАН **469**, 295 (2016).
13. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **190**, 144 (1994).
14. N. M. Zubarev, JETP Lett. **71**, 367 (2000).
15. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **89**, 317 (2009).
16. N. M. Zubarev, Phys. Lett. A **243**, 128 (1998).
17. N. M. Zubarev, J. Exp. Theor. Phys. **87**, 1110 (1998).
18. М. И. Гуревич, *Теория струй идеальной жидкости*, Наука, М. (1979).
19. G. L. Direchlet, J. Reine Angew. Math. **58**, 181 (1861).
20. M. S. Longuet-Higgins, J. Fluid. Mech. **55**(3), 529 (1972).
21. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, J. Fluid Mech. **813**, R1 (2017).
22. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Письма в ЖЭТФ **104**, 695 (2016).