Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 8, с. 525 – 531

Симметрия пульсирующих рэтчетов

В. М. Розенбаум[a,b,c 1)], *И. В. Шапочкина*[a,b,d], *Ё. Тераниши*[a 2)], *Л. И. Трахтенберг*[e,f]

[a] *Institute of Physics, National Chiao Tung University, 1001 Hsinchu, Taiwan*

[b] *Institute of Atomic and Molecular Sciences, Academia Sinica, 106 Taipei, Taiwan*

[c] *Институт химии поверхности им. А.А. Чуйко НАН Украины, 03164 Киев, Украина*

[d] *Белорусский государственный университет, физический факультет, 220050 Минск, Беларусь*

[e] *Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, 119991 Москва, Россия*

[f] *ГНЦ "Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л.Я. Карпова", 105064 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2018 г.

Приведено простое доказательство недавно обнаруженной скрытой пространственно-временной симметрии Куберо–Рензони (D. Cubero, F. Renzoni, 2016) с использованием точного выражения для средней скорости движения безынерционных пульсирующих рэтчетов (pulsating ratchets). Выявлены условия отсутствия рэтчет-эффекта в системах с потенциальными энергиями, описываемыми произведением периодических функций координат и времени основных типов симметрии. В частности показано, что рэтчет-эффект отсутствует для временной зависимости универсального типа симметрии (объединяющего три стандартные симметрии), причем это ограничение снимается при учете инерции, если только координатная зависимость потенциальной энергии не относится к симметричным или к антисимметричным функциям.

DOI: 10.7868/S0370274X18080118

Броуновские моторы, называемые также рэтчетами, занимают особое место в ряду систем, моделирующих процессы возникновения упорядоченного направленного движения за счет флуктуаций различной природы. Это особое место связано с диффузионным характером движения, что позволяет использовать хорошо разработанную диффузионную динамику, описывающую неравновесные процессы, для выяснения влияния пространственно-временных изменений потенциальной энергии броуновской частицы на ее дрейф. Первоначально эти модели были призваны объяснить феномен функционирования белковых моторов [1–3], однако впоследствии оказалось, что они также весьма продуктивны для описания рэтчет-эффектов в небиологических системах, а именно движения частиц в растворах [4], вихрей в сверхпроводниках [5], атомов в диссипативных оптических решетках [6] и электронов в органических полупроводниках [7]. Одним из необходимых условий существования направленного движения является отсутствие зеркальной симметрии системы, в которой это движение происходит [8, 9]. Существуют, однако, и другие (менее очевидные) типы симметрий, регулирующие наличие или отсутствие рэтчет-эффекта, и умение их распознать совершенно необходимо для понимания механизмов диффузионного транспорта наночастиц, а также для конструирования наномашин. Выявление симметрийных свойств в рамках стандартного анализа симметрий, т.е. нахождения группы преобразований, оставляющих инвариантным уравнение движения, было проведено в работе [10].

Следует иметь в виду, что с операцией обращения времени, которая часто включается в анализ симметрийных свойств систем, сопряжена принципиальная трудность, поскольку законы механики, как известно, обратимы при обращении времени, тогда как законы статистической физики, которые, казалось бы, используют эти законы механики, необратимы. Поэтому трудно ожидать, что в диссипативных системах вероятности реализации (статистические веса) прямой и обратной траекторий частицы окажутся одинаковыми. Все это приводит к необходимости анализировать симметрию решений статистических уравнений, что является сложной задачей ввиду трудности нахождения этих решений, которые, к тому же, могут оказаться и весьма громоздкими для какого-либо анализа. Если все же анализ симметрийных свойств удается выполнить, то обнаруженные

1) e-mail: vik-roz@mail.ru

2) Y. Teranishi

типы симметрии называют скрытыми, подчеркивая тот факт, что они не могут быть получены в рамках стандартного симметрийного анализа. Существенный прогресс в обнаружении скрытых симметрий рэтчет-систем был достигнут в недавней работе Куберо и Рензони [11]. Выводы о существовании определенных скрытых симметрий следуют там из весьма громоздкого анализа симметрии пространственно-временных фурье-компонент резольвенты, представляющей формальное решение уравнения Смолуховского (см. дополнительные материалы к [11]). В данной статье мы приводим лаконичный вывод одного из результатов работы [11], который необходим для предлагаемого здесь анализа симметрий пульсирующих рэтчетов.

Значительно более наглядным и эффективным методом обнаружения скрытых симметрий в рэтчет-системах, функционирующих в высокотемпературном и адиабатическом режимах, оказался анализ явных аналитических выражений для средней скорости рэтчета [12–16]. На этом пути нами был, в частности, обнаружен ряд свойств броуновских моторов, обусловленных особенностями поведения их потенциальных энергий в пространстве и во времени (наличием или отсутствием той или иной симметрии). Показано, что два основных класса моторов – с дихотомными флуктуациями однородной силы (forced ratchets) и периодической потенциальной энергии (pulsating ratchets), – характеризуются различными аналитическими зависимостями их средней скорости от коэффициентов пространственной и временной асимметрии [12]. Если, например, потенциальный профиль является пространственно антисимметричным и адиабатически медленно изменяется со временем, то средние скорости таких пульсирующих рэтчетов не зависят от "траектории" этого изменения (вида временной зависимости) и определяются только начальным и конечным состояниями (формами) этого профиля [13]. Направление движения и возникновение точек остановки пульсирующего рэтчета с асимметричными дихотомными флуктуациями пространственно периодической потенциальной энергии определяются конкуренцией пространственной и временной асимметрии потенциальной энергии или исключительно особенностями временной асимметрии, если потенциальная энергия флуктуирует по знаку [14]. Кроме того, сравнительный анализ адиабатически медленного и быстрого режимов движения рэтчетов показал, что средняя скорость в них является четным и нечетным функционалом потенциальной энергии соответственно [15]. Наконец, обнаружено, что ограничение на возникновение безынерционного рэтчет-эффекта (отсутствие моторного эффекта для безынерционной броуновской частицы) при дихотомных адиабатически быстрых флуктуациях потенциальной энергии частицы по знаку снимается, когда переходят к инерционному рассмотрению, но только если потенциальный профиль не относится к классу симметричных и антисимметричных [16].

В данной статье мы приводим доказательство свойств симметрии пульсирующих рэтчетов с потенциальной энергией, мультипликативной по координате и времени, в общем виде, т.е. без наложения ограничений, связанных с рассмотрением только дихотомных изменений потенциальной энергии во времени или с использованием адиабатического и/или высокотемпературного приближений. Основными инструментами в доказательстве выступают хорошо известные векторная и сдвиговая симметрии (обусловленные, соответственно, векторным характером рассматриваемых величин и периодичностью функций), а также важная скрытая симметрия, которую мы доказываем, используя полученное в [12] явное решение уравнения Смолуховского с потенциальной энергией, являющейся периодической функцией координаты и времени. Общность полученных результатов достигается тем, что симметрия анализируемых пространственно-временных зависимостей потенциальной энергии здесь может определяться в терминах различных комбинаций четырех базовых типов симметрий, характерных для периодических функций, т.е. фактически, мы смогли классифицировать рэтчеты данного типа в терминах симметрий периодических функций, составляющих их потенциальную энергию. Это позволило сформулировать условия, налагаемые на симметрийные свойства рэтчет-систем, при которых не возникает направленного движения частиц с потенциальной энергией, описываемой произведением периодических функций координат и времени основных типов симметрии.

Рассмотрим, следуя работе [12], одномерную динамику броуновской частицы в вязкой среде, которая характеризуется функцией $x(t)$ (положение частиц), удовлетворяющей уравнению Ланжевена:

$$m\ddot{x} = -\zeta\dot{x} + F(x,t) + \xi(t). \qquad (1)$$

Здесь $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ – первая и вторая производные функции $x(t)$ по времени, m – масса частицы, ζ – коэффициент трения, $F(x,t) = -\partial U(x,t)/\partial x$ – соответствующая потенциальной энергии $U(x,t)$ приложенная сила, которая является периодической функцией координаты x и времени t, $F(x+L,t) = F(x,t+\tau) =$

$= F(x,t)$, где L и τ – пространственный и временной периоды. Тепловые флуктуации моделируются гауссовским белым шумом $\xi(t)$ со средним значением $\langle\xi(t)\rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = 2\zeta k_{\rm B}T\delta(t-t')$ ($k_{\rm B}$ – постоянная Больцмана, T – равновесная абсолютная температура).

Для малых частиц в достаточно вязкой среде инерционный член $m\ddot{x}$ может быть опущен. Тогда для статистического описания такого (безынерционного) движения броуновской частицы можно использовать функцию распределения $\rho(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению Смолуховского [17]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t),\\ J(x,t) = -D\tfrac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) + \zeta^{-1}F(x,t)\rho(x,t),\end{gathered} \qquad (2)$$

и условию нормировки $\int_0^L \rho(x,t)dx = 1$. Здесь выражение для потока $J(x,t)$ содержит коэффициент диффузии $D = k_{\rm B}T/\zeta$. Для установившегося процесса, после того как система забывает начальное условие, искомое среднее значение скорости частицы (скорость мотора, являющаяся функционалом приложенной силы $F(x,t)$) определяется соотношением

$$\langle\nu\rangle = \nu\{F(x,t)\} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau dt\int\limits_0^L dxJ(x,t). \qquad (3)$$

Вследствие периодичности функции $F(x,t)$ как по координате так и по времени, для получения решений уравнения Смолуховского эффективно использовать двойное фурье-преобразование: $f(x,t) = \sum_{qj} f_{qj}\exp(ik_qx - i\omega_jt)$, $k_q = (2\pi/L)q$, $\omega_j = (2\pi/\tau)j$, где q и j – целые числа, k_q и ω_j волновые векторы и частоты, а $f(x,t) = f(x+L,t+\tau)$ – произвольная функция, которая в контексте рассматриваемой задачи может быть, например, силой или функцией распределения. Тогда дифференциальное уравнение (2) преобразуется в систему алгебраических уравнений для Фурье компонент ρ_{qj} функции распределения, через которые может быть найдена средняя скорость:

$$\begin{gathered}\rho_{qj} = L^{-1}\delta_{q,0}\delta_{j,0} - i\zeta^{-1}\frac{k_q}{Dk_q^2 - i\omega_j}\sum_{q'j'}F_{q'j'}\rho_{q-q',j-j'},\\ \nu\{F(x,t)\} = \zeta^{-1}L\sum_{qj}F_{qj}\rho_{-q,-j}.\end{gathered} \qquad (4)$$

Решение этой системы методом последовательных итераций можно представить в виде ряда по степеням обратного коэффициента трения, так же как затем – и искомую среднюю скорость мотора:

$$\nu\{F(x,t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n\zeta^{-n-1}\times \qquad (5)$$

$$\sum_{q_1j_1\ldots q_nj_n}\frac{k_{q_1}\ldots k_{q_1+\ldots+q_n}F_{q_1j_1}\ldots F_{q_nj_n}F_{-q_1-\ldots-q_n,-j_1-\ldots-j_n}}{(i\omega_{j_1}+Dk_{q_1}^2)\ldots(i\omega_{j_1+\ldots+j_n}+Dk_{q_1+\ldots+q_n}^2)}.$$

При записи выражения (5) учтено равенство $F_{00} = 0$, которое, согласно определению рэтчетов, исключает тривиальное движение частицы со скоростью $\zeta^{-1}F_{00}$ под действием постоянной приложенной силы F_{00}.

Соотношение (5) позволяет легко убедиться в справедливости утверждений о векторной и сдвиговой симметрии рэтчет-систем (существующей также при $m \neq 0$). Действительно, преобразованию переменных $x \to -x$ и $t \to -t$ соответствует преобразование индексов $q \to -q$ и $j \to -j$, так что $F(-x,-t) \to F_{-q,-j}$. Тогда Фурье компоненты $F_{-q,j}$ в записи вида (5) функционала $\nu\{F(-x,t)\}$ преобразуются в F_{qj} простой заменой переменных суммирования $q \to -q$. Такая замена также изменяет знаки волновых векторов, $k_{-q} = -k_q$, что и позволяет доказать векторную симметрию

$$\nu\{F(-x,t)\} = -\nu\{-F(x,t)\}, \qquad (6)$$

т.е. свойство изменения знака всех векторных величин в функционале $\nu\{F(x,t)\}$ при преобразовании $x \to -x$. Сдвиговая симметрия отражает тот факт, что средняя скорость не изменяется при сдвиге начала координат и времени:

$$\nu\{F(x+x_0,t+t_0)\} = \nu\{F(x,t)\}. \qquad (7)$$

Этот результат также легко следует из выражения (5), если учесть, что каждая из Фурье-компонент F_{qj} при сдвигах на x_0 и t_0 приобретает фазовый сомножитель $\exp(ik_qx_0 - i\omega_jt_0)$, но при этом значение произведения этих сомножителей, возникающее в выражении $F_{q_1j_1}\ldots F_{q_nj_n}F_{-q_1-\ldots-q_n,-j_1\ldots-j_n}$, равно единице.

Общность выражения (5), которое использует точное решение уравнения Смолуховского с произвольной силой $F(x,t)$, периодической по координате и времени, позволяет также легко доказать наличие у рассматриваемых рэтчет-систем скрытой симметрии Куберо–Рензони (см. статью [11] и громоздкое доказательство в дополнительных материалах к ней)

$$\nu\{F(x,t)\} = \nu\{F(-x,-t)\}. \qquad (8)$$

Для доказательства симметрии (8) введем в (5) новые (штрихованные) переменные суммирования

$$\begin{cases} q_1 = \sum\limits_{l=1}^{n} q'_l, \quad j_1 = \sum\limits_{l=1}^{n} j'_l, \\ q_l = q'_{n+2-l},\ j_l = j'_{n+2-l},\ l = 2,\ldots,n, \end{cases} \qquad (9)$$

и используем вытекающие из (9) соотношения

$$\sum_{l=1}^{m} q_l = -\sum_{l=1}^{n-m+1} q'_l,\ \sum_{l=1}^{m} j_l = -\sum_{l=1}^{n-m+1} j'_l,\ m = 1,\ldots,n. \qquad (10)$$

Тогда справедлива следующая цепочка преобразований:

$$\nu\{F(x,t)\} = \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\zeta^{-n-1}\sum_{q'_1 j'_1 \ldots q'_n j'_n}\frac{k_{q'_1}\ldots k_{q'_1+\ldots+q'_n}F_{q'_1 j'_1}\ldots F_{q'_n j'_n}F_{-q'_1-\ldots-q'_n,-j'_1-\ldots-j'_n}}{(-i\omega_{j'_1}+Dk^2_{q'_1})\ldots(-i\omega_{j'_1+\ldots k'_n}+Dk^2_{q'_1+\ldots+q'_n})} \underset{q'_l j'_l \to -q_l,-j_l}{=}$$

$$\underset{q'_l j'_l \to -q_l,-j_l}{=} \sum_{n=1}^{\infty} i^n\zeta^{-n-1}\sum_{q_1 j_1 \ldots q_n j_n}\frac{k_{q_1}\ldots k_{q_1+\ldots+q_n}F_{-q_1,-j_1}\ldots F_{-q_n,-j_n}F_{q_1+\ldots+q_n,j_1+\ldots+j_n}}{(i\omega_{j_1}+Dk^2_{q_1})\ldots(i\omega_{j_1+\ldots j_n}+Dk^2_{q_1+\ldots+q_n})} =$$

$$= \nu\{F(-x,-t)\}, \tag{11}$$

которая и доказывает скрытую симметрию (8).

Заметим, что равенство (8) формально следует из уравнения Ланжевена (1): при заменах $x \to -x$ и $t \to -t$ в нем $\dot{x}(t)$ не меняет знак, а $\ddot{x}(t)$ меняет, поэтому при $m = 0$ получаются равенства $\langle \dot{x} \rangle = \zeta^{-1}\langle F(x,t)\rangle = \zeta^{-1}\langle F(-x,-t)\rangle$. Однако данное наблюдение не может служить строгим доказательством, поскольку, как отмечено выше, в диссипативных системах прямые и обратные траектории движения частицы дают вклады в ее среднюю скорость с различными статистическими весами. Поэтому для выявления и доказательства скрытых симметрий нельзя обойтись без анализа явных решений уравнения Смолуховского. Единственная польза от такого сопоставления исходного и трансформированного заменой $x \to -x$ и $t \to -t$ уравнения Ланжевена состоит в том, что оно дает следующий вывод: нельзя ожидать сохранения рассматриваемого свойства симметрии (8) при $m \neq 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению важных следствий, вытекающих из соотношений (6)–(8) при различных типах симметрии функции $F(x,t)$, которые определяют различные типы симметрии пульсирующих рэтчетов. Основные выводы здесь будут получены для мультипликативной формы $F(x,t) = g(x)\sigma(t)$, в которой $g(x)$ и $\sigma(t)$ периодические функции координат и времени (следствия для аддитивной формы $F(x,t)$, т.е. для рэтчетов с флуктуирующей силой, были проанализированы в [11], открыв характерные для них новые скрытые симметрии). Будем следовать классификации периодических функций из работы [10], согласно которой существует три типа симметрии функций: две – связанные с наличием в системе определенных элементов симметрии, а именно, плоскости либо центра симметрии, а третья – симметрия сдвига на полпериода с обращением знака функции. Определения перечисленных типов симметрий дадим на примере функции $\sigma(t)$:

$$\sigma_s(t-t_s) = \sigma_s(-t-t_s), \quad \sigma_a(t-t_a) = -\sigma_a(-t-t_a),$$

$$\sigma_{sh}(t+\tau/2) = -\sigma_{sh}(t), \tag{12}$$

где t_s и t_a задают, соответственно положения плоскости и центра симметрии, а $\tau/2$ сдвиг на полпериода. Здесь и далее индексы s, a, и sh обозначают симметричные, антисимметричные и обладающие сдвиговой симметрией функции (последние назывались суперсимметричными в [8, 9]). Выбором начала координат в точке, соответствующей имеющемуся в системе элементу симметрии (t_s или t_a), s- и a-функции становятся, соответственно, четными или нечетными. Важно отметить, что существует класс функций, которые обладают всеми тремя перечисленными типами симметрий, то есть являются одновременно s-, a- и sh-функциями. Простейшим примером является синусоида, которая определенным сдвигом начала координат может быть "превращена" как в четную, так и в нечетную функцию, а также демонстрирует симметрию sh-типа: сдвиг ее на полпериода и сопровождающее сдвиг изменение знака приводит к той же кривой. Мы рассматриваем такие функции как отдельный класс функций с универсальным типом симметрии и вводим для него обозначение u. Важность этого (универсального) класса состоит в том, что все свойства, присущие по отдельности рэтчетам с симметриями s, a, и sh, одновременно присущи рэтчетам с симметрией u-типа в пространственно-временных зависимостях потенциальной энергии. Это приводит к ряду интересных и не всегда очевидных выводов, представленных ниже.

Примеры функций четырех перечисленных типов симметрий представлены на рис. 1. Для создания кривых в левой части рисунка использован один и тот же фрагмент произвольной кривой (шаблон), который путем сдвигов, сжатий и отражений (для реализации перечисленных выше элементов симметрий) достраивает вид требуемой функции на всем периоде. Исходя из такого подхода, конкретизирующего преобразования, но не исходную кривую (исход-

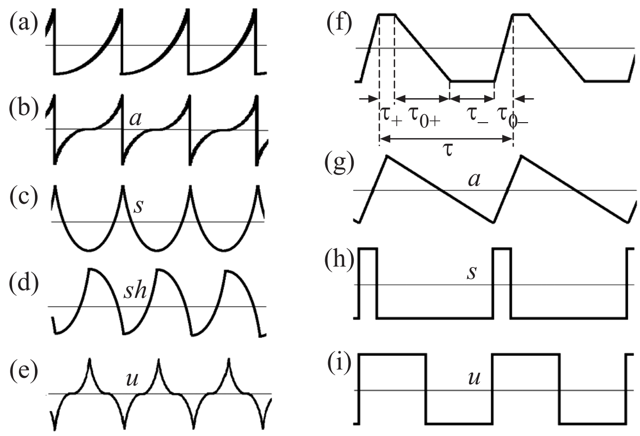

Рис. 1. Примеры периодических функций: (a), (f) – несимметричные функции, (b), (g) – антисимметричные функции, (c), (h) – симметричные функции, (d) – сдвиговосимметричная функция, (e), (i) – универсально симметричные функции, одновременно принадлежащие к a-, s- и sh-видам симметрии.

ный шаблон может быть любой), можно заключить, что мощности множеств функций s-, a-, sh- и u-типов, одинаковы. Этот вывод представляется принципиально важным, отражая тот факт, что в принципе может существовать огромное число рэтчетов с потенциальной энергией любой из симметрий. В правой части рисунка приводятся примеры конкретных реализаций обсуждаемых типов симметрий в кусочно-линейных функциях. Такие функции широко используются в теории броуновских моторов, в том числе и для получения аналитических результатов. Вид кривой на рисунке (f) иллюстрирует наиболее общий случай, который не относится ни к одной из рассматриваемых симметрий (подобно кривой (a)), однако при определенном выборе определяющих параметров сводится к кривой, обладающей симметрией перечисленных типов: s-тип имеет место при $\tau_{0+} = \tau_{0-}$, a-тип – при $\tau_+ = \tau_-$, u-тип – при одновременном выполнении равенств $\tau_+ = \tau_-$ и $\tau_{0+} = \tau_{0-}$ (sh-тип сам по себе не реализуется). Форма кривой (g) (частный случай (f) при $\tau_+ = \tau_- = 0$) часто встречается в моделях рэтчетов с пилообразными координатными зависимостями потенциальных энергий (пилообразными потенциалами). Наконец, ступенчатыми функциями (h) и (i) описываются, соответственно, асимметричные (с симметрией s-типа) и симметричные (с симметрией u-типа) детерминистические дихотомные процессы изменения потенциальной энергии со временем (известные также как модель двух состояний, в которой подразумевается, что каждое состояние не зависит от времени).

Теперь мы готовы к рассмотрению различных симметрий, которыми могут обладать пульсирующие рэтчеты, и их проявления в характеристиках последних. Методически полезно начать с применения нашего подхода для воспроизведения двух известных свойств [8, 9]. Прежде всего докажем отсутствие рэтчет-эффекта в пространственно симметричных системах. Потенциальная энергия частицы в таких системах очевидно обладает s-симметрией $[U(x - x_s, t) = U(-x - x_s, t)]$, поэтому соответствующая сила $F(x,t) = -\partial U(x,t)/\partial x$ оказывается a-симметричной $[F(x - x_a, t) = -F(-x - x_a, t)$, причем положение плоскости симметрии $x = x_s$ для потенциала становится центром симметрии $x = x_a$ для силы], и справедлива следующая цепочка равенств:

$$\nu\{F(x,t) \underset{(7)}{=} \nu\{F(x - x_a, t)\} = \nu\{-F(-x - x_a, t)\} \underset{(7)}{=} \underset{(7)}{=} \nu\{-F(-x, t)\} \underset{(6)}{=} -\nu\{F(x,t)\} \tag{13}$$

(здесь и далее номера под знаками равенств указывают на формулы, которые обеспечивают используемое свойство), из которой следует, что $\nu\{F(x,t)\} = 0$. Поскольку обращение времени не входит в рассмотренные преобразования и скрытая симметрия (8) не используется, то сделанный вывод не ограничен лишь мультипликативной формой функции $F(x,t)$ и справедлив и при учете инерции. Отметим, что для рэтчетов с флуктуирующей силой скорость рэтчета становится равной нулю не только в статических s-симметричных потенциалах, но и при обращении силы с обращением координаты. Если же такое обращение внешней (наклоняющей потенциальный профиль) силы не предполагается, то вклады в среднюю скорость, пропорциональные нечетным степеням флуктуирующей силы, могут оказаться и отличными от нуля [12].

Иная ситуация возникает при доказательстве отсутствия рэтчет-эффекта в суперсимметричном потенциале $U(x,t) = -U(x + L/2, -t)$ с sh-симметричной координатной зависимостью (соответствующей такой же sh-симметричной координатной зависимости силы) и с s-симметричной зависимостью от времени. Поскольку для такого типа рэтчетов доказательство предполагает операцию обращения времени и (за счет этого) использование скрытой симметрии (8), а именно

$$\nu\{F(x,t)\} = \nu\{-F(x + L/2, -t)\} \underset{(7)}{=} \nu\{-F(x, -t)\} \underset{(8)}{=} \underset{(8)}{=} \nu\{-F(-x, t)\} \underset{(6)}{=} -\nu\{F(x,t)\}, \tag{14}$$

то следующий из этой цепочки равенств результат $\nu\{F(x,t)\} = 0$ имеет место только в системах без учета инерции (overdamped limit). Мультипликативная форма функции $F(x,t)$ по-прежнему не требуется в цепочке (14), так как операция $t \to -t$ не приводит к изменению функции $U(x,t)$ и изменению ее знака (знак $U(x,t)$ изменяется за счет sh-симметрии ее координатной составляющей).

Перейдем к доказательству двух новых свойств симметрии пульсирующих рэтчетов с мультипликативной формой приложенной силы $F(x,t) = g(x)\sigma(t)$. В первом случае функция $\sigma(t)$ является a-симметричной, тогда как координатная зависимость $g(x)$ – произвольна. Тогда

$$\nu\{F(x,t)\} \underset{(7)}{=} \nu\{F(x,t-t_a)\} = \nu\{-F(x,-t-t_a)\} \underset{(7)}{=}$$

$$\underset{(7)}{=} \nu\{-F(x,-t)\} \underset{(8)}{=} \nu\{-F(-x,t)\} \underset{(6)}{=} -\nu\{F(x,t)\}, \tag{15}$$

и равенство $\nu\{F(x,t)\} = 0$ реализуется, причем только в безинерционной динамике. Во втором случае рэтчет-эффект будет отсутствовать для sh-симметричной временной зависимости $\sigma(t)$ и функций координат $g(x)$, являющихся s- или a-симметричными. Действительно, для s-симметричной $g(x)$ имеем тогда:

$$\nu\{F(x,t)\} = \nu\{-F(x,t+\tau/2)\} \underset{(7)}{=} \nu\{-F(x,t)\} \underset{(6)}{=}$$

$$\underset{(6)}{=} -\nu\{F(-x,t)\} \underset{(7)}{=} -\nu\{F(-x-x_s,t)\} =$$

$$= -\nu\{F(x-x_s,t)\} \underset{(7)}{=} -\nu\{F(x,t)\}. \tag{16}$$

Доказательство для a-симметричной $g(x)$ уже, фактически, выполнено в цепочке равенств (13), построенной для антисимметричной $F(x,t)$ общего вида, т.е. обсуждаемая симметрия системы с мультипликативной силой такова, что антисимметрия $g(x)$ "позволяет" функции $\sigma(t)$ быть даже произвольной симметрии (а не только sh-симметричной). Скрытая симметрия (8) в доказательствах (13) и (16) не используется, а, значит, отсутствие рэтчет-эффекта во втором случае [sh-симметричной $\sigma(t)$ и s- или a-симметричной $g(x)$] имеет место и в инерционной динамике.

Доказанные два новых свойства симметрии пульсирующих рэтчетов вырождаются в одно нетривиальное свойство в случае, если функция $\sigma(t)$ является u-симметричной (т.е. одновременно принадлежит к a- и sh-типам, задействованных в (15) и (16)). А именно, для пульсирующих рэтчетов с мультипликативным потенциалом, временная зависимость которого обладает u-симметрией, средняя скорость равна нулю в отсутствие инерции, но может отличаться от нуля (т.е. не запрещается симметрийными свойствами) при ее учете, если координатная зависимость потенциала при этом не является s- или a-симметричной. Такое снятие ограничения на рэтчет-эффект при переходе от безынерционной динамики к инерционной было предсказано нами ранее для частного случая обсуждаемой здесь общей ситуации – для дихотомных адиабатически быстрых флуктуаций потенциальной энергии по знаку [16]. Действительно, таким типам флуктуаций соответствуют функции $\sigma(t)$, изображенные на рис. 1h и i: флуктуации по знаку реализуются выбором $\sigma(t) = \pm 1$, а различие между асимметричными и симметричными дихотомными процессами стирается в адиабатическом приближении.

Таким образом, в данной статье развит предложенный в [11] подход к анализу симметрий рэтчетов на примере пульсирующих рэтчетов весьма широкого и практически интересного класса – с мультипликативной формой потенциальной энергии частицы. Успех, достигнутый в этом направлении, стал возможным благодаря итерационному представлению средней скорости рэтчета в виде ряда по степеням обратного коэффициента трения [12] (которое оказалось многообещающим с точки зрения симметрийного анализа), ранее разработанным приближенным подходам, описывающим функционирование рэтчетов на основе их симметрийных свойств [12–17], а также [18]. Отметим, что предложенный подход пригоден не только для анализа рассмотренных рэтчет-систем, но сможет получить продолжение и для более сложных законов изменения потенциальной энергии частицы, симметрийные свойства которых предстоит выяснить.

В.М.Р. выражает благодарность Дэвиду Куберо (David Cubero) за полезные обсуждения. Ё.Т. благодарит Министерство науки и технологии Тайваня за финансовую поддержку (грант # MOST104-2112-M-009-019). Л.И.Т. признателен ФАНО России за финансовую поддержку в рамках государственного задания 0082-2018-0003 (регистрационный номер АААА-А18-118012390045-2). В.М.Р. и И.В.Ш. благодарят Институт физики Чиао-Тунг университета за финансовую поддержку и Институт атомных и молекулярных наук за любезное гостеприимство.

1. R. D. Astumian and M. Bier, Phys. Rev. Lett. **72**, 1766 (1994).
2. F. Jülicher, A. Ajdari, and J. Prost, Rev. Mod. Phys. **69**, 1269 (1997).
3. Y. Okada and N. Hirokawa, Science **283**, 1152 (1999).
4. J. Rousselet, L. Salome, A. Ajdari, and J. Prost, Nature (London) **370**, 446 (1994).

5. C. C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, M. Morelle, and V. V. Moshchalkov, Nature (London) **440**, 651 (2006).
6. R. Gommers, S. Bergamini, and F. Renzoni, Phys. Rev. Lett. **95**, 073003 (2005).
7. O. Kedem, B. Lau, and E. A. Weiss, Nano Lett. **17**, 5848 (2017).
8. P. Reimann, Phys. Rev. Lett. **86**, 4992 (2001).
9. P. Reimann, Phys. Rep. **361**, 57 (2002).
10. S. Denisov, S. Flach, and P. Hänggi, Phys. Rep. **538**, 77 (2014).
11. D. Cubero and F. Renzoni, Phys. Rev. Lett. **116**, 010602 (2016).
12. В. М. Розенбаум, ЖЭТФ **137**, 740 (2010) [JETP **110**, 653 (2010)].
13. В. М. Розенбаум, И. В. Шапочкина, Письма в ЖЭТФ **92**, 124 (2010) [JETP Lett. **92**, 120 (2010)].
14. V. M. Rozenbaum, T. Ye. Korochkova, A. A. Chernova, and M. L. Dekhtyar, Phys. Rev. E **83**, 051120 (2011).
15. V. M. Rozenbaum, Y. A. Makhnovskii, I. V. Shapochkina, S.-Y. Sheu, D.-Y. Yang, and S. H. Lin, Phys. Rev. E **85**, 041116 (2012).
16. V. M. Rozenbaum, Yu. A. Makhnovskii, I. V. Shapochkina, S.-Y. Sheu, D.-Y. Yang, and S. H. Lin, Phys. Rev. E **89**, 052131 (2014).
17. H. Riskin, *The Fokker-Plank Equation. Methods of Solution and Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
18. Переписка с Д. Куберо (D. Cubero) 31 декабря 2017.