Письма в ЖЭТФ, том 107, вып. 9, с. 606 – 609

Обменные флуктуации в неравновесном лоренц-газе

В. В. Афонин[1)], *С. В. Ганцевич*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 12 марта 2018 г.

В работе показано, что в неравновесном лоренц-газе (частицы взаимодействуют только с термостатом) работает корреляционный механизм, основанный на обменном взаимодействии и разрушающий связь между флуктуациями и откликом (соотношение Прайса). Физическая природа этого явления состоит в том, что в результате рассеяния частиц газа, находящихся в одном состоянии, на одной и той же частице термостата создается средний поток коррелированных пар, зависящий от вида неравновесной функции распределения, что и делает невозможным существование универсальной связи между флуктуациями и откликом.

DOI: 10.7868/S0370274X18090126

Как известно, в равновесном состоянии задача о флуктуациях сводится к задаче об отклике вследствие флуктуационно-диссипационной теоремы или, в более общем случае, соотношений Каллена–Вельтона [1]. В свое время было найдено [2, 3], что в неравновесном состоянии газа с парными столкновениями связь между откликом и флуктуациями разрушается из-за межчастичной корреляции, возникающей вследствие работы корреляционного механизма, связанного с этими столкновениями. При каждом таком столкновении одновременно заполняются или освобождаются два состояния, что и приводит к возникновению корреляции между числами заполнения этих состояний. Этот процесс описывается т.н. источником корреляции в уравнении для одновременной двухчастичной функции распределения:

$$(\partial_t + I_p + I_{p'})\varphi_{pp'}(t) = -\Pi_{pp'}(F(t), F(t)). \qquad (1)$$

Здесь I_p – одночастичный линеаризованный оператор столкновений, $F_p(t)$ – неравновесная одночастичная функция распределения (мы считаем ее известной), а $\varphi_{pp'}(t)$ – добавка к пуассоновскому члену в одновременной двухчастичной функции распределения:

$$\overline{F_p(t)F_{p'}(t)} - F_p(t)F_{p'}(t) = F_p(t)(1 \mp F_{p'}(t))\delta_{pp'} + \varphi_{pp'}(t). \qquad (2)$$

В стационарных условиях $\varphi_{pp'}$ не зависит от времени и производную по времени в (1) можно опустить. Источник корреляции $\Pi_{pp'}(F, F)$ – главный элемент теории неравновесных флуктуаций. Он представляет из себя сумму всех связных диаграмм для двухчастичной функции распределения. Выражение для источника корреляций многократно выводилось различными методами (см., например, [4–9]). В случае парных столкновений источник корреляции может быть легко написан из физических соображений:

$$\Pi_{pp'}(F, F) = \sum_{kk'} (W_{kk'}^{pp'} F_p F_{p'} - W_{pp'}^{kk'} F_k F_{k'}). \qquad (3)$$

Здесь $W_{pp'}^{kk'}$ – вероятность для двух частиц с импульсами k и k' приобрести импульсы p и p' после парного столкновения. В равновесии приход и уход пар равны, т.е. $\Pi_{pp'}(F, F) = 0$, и межчастичная корреляция исчезает. В лоренц-газе, частицы которого взаимодействуют только с термостатом, этот механизм классической корреляции отсутствует.

Примером неравновесного лоренц-газа могут служить горячие электроны полупроводника, релаксирующие только за счет столкновения с термостатом. Для такой системы в свое время было показано, что, несмотря на нарушение соотношения Найквиста, коррелятор токов на низких частотах выражается через неравновесный тензор диффузии [6, 9, 10]. Эту связь называют соотношением Прайса или, иногда, второй флуктуационно-диссипационной теоремой.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы обратить внимание на то, что наличие термостата является достаточным условием для существования корреляций в системе даже при отсутствии прямого межчастичного взаимодействия. А так как задача о корреляции частиц не может быть поставлена без термостата, то соотношение Прайса всегда нарушается. Этот механизм межчастичной корреляции связан с тождественностью частиц, т.е. имеет чисто квантово-механическую природу. Формально, их неразличимость всегда налагает условие анти-

1) e-mail: vasili.afonin@mail.ioffe.ru

симметричности многочастичной волновой функции фермионов относительно перестановки двух частиц, т.е. должно учитываться даже для газа свободных частиц. За счет обмена в такой системе тоже возникают когерентные по фазе смешанные состояния [11, 12]. Однако разность фаз волновых функций частиц в этих состояниях быстро осциллирует во времени и в пространстве, и поэтому такая квантовая корреляция не дает вклада в корреляцию чисел заполнения газа. Для того, чтобы обменные эффекты дали вклад в источник корреляции $\Pi_{pp'}(F,F)$, требуется дополнительное взаимодействие. Этим взаимодействием у нас является рассеяние двух частиц на одной и той же частице термостата. В этом случае вклад в источник корреляции дают только связные диаграммы, в которых разность фаз волновых функций частиц в конечных состояниях равна нулю. Обратим внимание на то, что термостат в данном случае не подавляет межчастичную корреляцию (как это обычно происходит), а наоборот, – позволяет проявиться корреляционному эффекту. В отличии от классической корреляции через межчастичные столкновения, корреляция через обмен по своему смыслу чувствительна к поляризации частиц газа по спину. В полностью поляризованном газе в квантовой корреляции будут участвовать все частицы, тогда как при случайной поляризации в среднем – только их половина. Это обстоятельство можно, в принципе, использовать для разделения вкладов корреляции через обмен от обычной корреляции через столкновения в том случае, когда парными столкновениями нельзя принебречь.

Физическую природу обменной корреляции между числами заполнения с разными импульсами можно легко понять, изобразив процесс коррелляции с помощью диаграммной техники, применимой для систем, в которых эволюция полей описывается с помощью кинетического уравнения (типа уравнения (1)) и поэтому не требуется каждый раз использовать исходное уравнения Шредингера для его вывода, т.е. она работает при выполнении обычных условий применимости кинетического уравнения. Эта диаграммная техника не предполагает равновесности системы, а вычисления с ее помощью менее громоздки, чем в стандартной для неравновесных систем технике Келдыша.

Как уже отмечалось выше, в источник (правую часть уравнения (1)) входят только связные диаграммы рис. 1 (диаграммы b и d). Несвязные же диаграммы рис. 1 (a и c), как обычно, сокращаются вычитанием произведения средних значений функций распределения и не входят в корреляционную функцию $\Pi_{pp'}(F,F)$. На диаграммах (рис. 1) представлена эволюция во времени чисел заполнения $F(t)$ двух частиц с импульсами p и p'. Точки на линиях упорядочены по времени, начиная от исходных значений F_p и $F_{p'}$ при $t=0$. Жирная линия со стрелкой вверх описывает эволюцию электронной волновой функции $\hat{\psi}_p$ (входящей в F_p), со стрелкой вниз – комплексно-сопряженной, $\hat{\psi}_p^\dagger$. Пунктир со стрелкой описывает взаимодействие частиц газа с рассеивателями термостата, причем во всех вершинах выполняется закон сохранения импульса. Эволюция волновых функций определяется опережающей (или для эрмитово-сопряженых – запаздывающей) функцией Грина кинетического уравнения (более подробное изложение этой диаграмной техники дано, например, в [13, 14]). Симметричные диаграммы (например, в которых "собственно-энергетическая" вставка находится на линии ψ в левой части диаграммы, а не на $\psi^\dagger$, как это изображено на рис. 1a) на рисунках не изображены. Диаграммы (рис. 1 b, d) описывают переходы, в которых в результате взаимодействия с термостатом из двух чистых состояний с импульсами p и p' ($\hat{\psi}_p^\dagger\hat{\psi}_p$ и $\hat{\psi}_{p'}^\dagger\hat{\psi}_{p'}$) получились два смешанных состояния $\hat{\psi}_p^\dagger\hat{\psi}_{p'}$ и $\hat{\psi}_{p'}^\dagger\hat{\psi}_p$. Они не соответствуют числам заполнения (квазиклассическим функциям распределения F_p и $F_{p'}$) и поэтому описывают чисто квантовомеханический эффект. Т.о. в результате рассеяния на одной и той же частице термостата в электронной системе возникла корреляция, а ее вклад в источник корреляции, $\Pi_{pp'}(F,F)$, определяется связными диаграммами рис. 1 и симметричными им. Однако, как мы сейчас увидим, ответ для связных диаграмм легко понять, не обращаясь к вычислениям. Достаточно знать выражение для одночастичного интеграла столкновений, входящего в левую часть уравнения (1). Можно убедиться (просто сравнив аналитические ответы), что в нашем случае связная диаграмма (рис. 1b) совпадает (с точностью до знака для ферми-частиц и точно для бозе-частиц) с суммой несвязных диаграмм типа рис. 1a, а рис. 1d – с рис. 1c. Это происходит потому, что, как это часто бывает в квазиклассическом приближении, главный вклад в источник корреляции дают полюсные слагаемые функций Грина. Далее заметим, что уходный член одночастичного интеграла столкновений $I_p(F)$ описывался бы левой частью диаграммы (рис. 1a) (с учетом ненарисованной симметричной диаграммы), в которой по всем импульсам q, протекающим по пунктирной линии, производилось бы интегрирование (в нашем случае величина $q=p-p'$ – фиксирована). Таким образом для получения выражения суммы диаграмм типа (рис. 1a) достаточно снять сум-

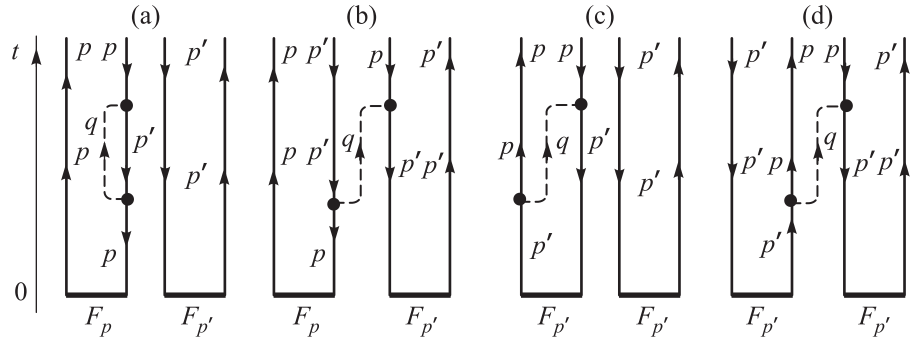

Рис. 1. Обменная корреляция при столкновении

мирование по всем импульсам в уходном члене интеграла столкновений, а учет правой части диаграммы (рис. 1a) сводится к умножению получившегося выражения на $F_{p'}$. Неизображенная же на рисунке связная диаграмма, в которой соединяются линии ψ_p и $\psi^\dagger_{p'}$ (а не $\psi^\dagger_p$ и $\psi_{p'}$, как изображено на рис. 1b), дает выражение, отличающееся от предыдущего заменой импульсов $p \leftrightarrow p'$. В итоге коррелированный вклад, получившийся из исходно некоррелированного состояния $F_pF_{p'}$, равен: $\pm[F_{p'}w_{p'p}F_p + F_pw_{pp'}F_{p'}]$ (здесь $w_{pp'}$ - вероятность перехода электрона из состояния p' в состояние p при взаимодействии с термостатом). Аналогично, диаграмма (рис. 1c) получается из приходного члена интеграла столкновений, и связная диаграмма (рис. 1d), запрещающая двум электронам находиться в одном исходном состоянии, оказывается равной $\mp[w_{p'p}F_p^2 + w_{pp'}F_{p'}^2]$.

В итоге, для источника корреляций получаем

$$\Pi^{(1)}_{pp'}(F,F) = \\ = \pm[F_{p'}w_{p'p}F_p + F_pw_{pp'}F_{p'} - w_{pp'}F^2_{p'} - w_{p'p}F^2_p]. \quad (4)$$

Так как взаимодействие не создает и не уничтожает частицы, левая часть уравнения (1) и источник корреляции должны обращаться в нуль при суммировании по индексам p и p' при произвольных числах заполнения. Выражение же (4) при таком суммировании тождественно в нуль не обращается. Причина этого состоит в выделенной роли конечных состояний с $p = p'$, которые, как всегда, нуждаются в отдельном обсуждении. В этом случае надо вспомнить о существовании пуассоновского члена в двухчастичной корреляционной функции (2).

В пуассоновский член обычно принято выделять не просто несвязные диаграммы, а вклад свободных частиц. Квадратичное же по функциям распределения слагаемое в $F_p(1 \mp F_{p'})\delta_{pp'}$ было введено для того, чтобы запретить переходы электронов в занятое конечное состояние. Однако теперь (в такой записи) в нем есть и вклады от обменного взаимодействия через термостат, отсутствующие в одночастичке $F_p\delta_{p,p'}$. Поэтому единственным способом запрета переходов частиц в занятое состояние теперь является сокращение вкладов из $F_pF_{p'}\delta_{pp'}$ и из $\varphi_{p,p}$, что требует согласования пуассоновского члена с выражением для источника корреляции при $p = p'$. Проще всего это сделать, добавив в двухчастичную функцию распределения квадратичное слагаемое (тогда все обменные эффекты были бы включены в одну двухчастичную функцию распределения, и уравнение (1) было бы обязано автоматически удовлетворять всем законам сохранения): $\tilde\varphi_{p,p'} = \varphi_{p,p'} \mp F_pF_{p'}\delta_{pp'}$. Это приведет к появлению в левой части уравнения (1) для старой двухчастичной функции распределения $\varphi_{p,p'}$ слагаемого $\pm(I_p + I_{p'})F_pF_{p'}\delta_{pp'} = \pm 2F_pI_p(F)$. Его надо перенести в источник корреляции. В итоге:

$$\Pi_{pp'}(F,F) = \Pi^{(1)}_{pp'}(F,F) + \Pi^{(2)}_{pp'}(F,F), \quad (5)$$

где

$$\Pi^{(2)}_{pp'}(F,F) = \pm 2\delta_{pp'}F_pI_p(F). \quad (6)$$

После этого последний удовлетворяет закону сохранения числа частиц. В равновесии $I_p(F) = 0$ и, соответственно, $\Pi_{pp'} = 0$. Отметим, что физический механизм корреляции и в этом случае продолжает работать, но не создается отличного от нуля среднего потока коррелированных частиц, что и позволяет связать флуктуации с одночастичными откликом. В неравновесном же состоянии этот источник создает средний поток коррелированных пар. Его величина определяется конкретным видом неравновесной функции распределения, что делает невозможным связать задачу об отклике с флуктуациями и не позволяет написать универсальное соотношения типа второй флуктуационно-диссипационной теоремы.

Появление источника дополнительной корреляции, возникшего за счет обменного взаимодействия, легко понять, исходя из принципа ослабления корреляций, сформулированного Н.Н. Боголюбовым и использующегося для расцепления цепочки многочастичных функций распределения. Действительно, выражения типа $F_{p'}I_p(F)$ в неравновесном состоянии отличны от нуля и входят как составные части в произведение неравновесных функций распределения $F_pF_{p'}$, которые выделяются из двухчастичной функции распределения $\overline{F_pF_{p'}}$ как ее главная часть. Но в последнем выражении (из-за тождественности частиц) не должно быть слагаемых, в котором фермионы имеют в (один момент времени) одни и те же квантовые числа (и наоборот: для бозонов такие слагаемые должны быть удвоены). Это и воспринимается как причина дополнительных флуктуаций функции распределения. Отметим, что термостат, обязательный для перехода системы к равновесию (обычно он служит для ослабления корреляций между частицами и расцепления цепочек на произведения одночастичных функций распределения) в нашем случае играет другую роль. Как мы видели, для возникновения корреляции необходимо, чтобы две частицы рассеялись на одной и той же частице термостата. В этом смысле можно сказать, что теперь термостат "исполняет роль прибора", позволяющего сравнить квантовые числа двух частиц и делающего эти частицы когерентными. В результате в системе возникает средний поток коррелированных частиц.

Итак, в работе найден новый механизм межчастичной квантовой корреляции в лоренц-газе, возникающий за счет обменного взаимодействия. Несмотря на чисто квантовую природу, этот эффект проявляется уже в квазиклассическом приближении. Эта корреляция разрушает связь отклик-флуктуации в неравновесном состоянии (соотношение Прайса). Для того, чтобы обменное взаимодействие давало вклад в источник корреляции, не требуется существования прямого межчастичного взаимодействия, – достаточно их взаимодействия с термостатом, которым никогда нельзя пренебречь при решении задачи о межчастичной корреляции.

1. H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
2. С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилюс, ФТТ **11**, 308 (1969) [Sov.Phys. Solid State **11**, 247 (1969)].
3. Ш. М. Коган, А. Я. Шульман, ЖЭТФ **56**, 862 (1969).
4. S. V. Gantsevich, V. L. Gurevich, and R. Katilius, Riv. Nuovo Cimento **2**(5), 1 (1979).
5. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, М. (1979).
6. В. Барейкис, Р. Катилюс, Р. Милюшите, *Флуктуационные явления в полупроводниках в неравновесных условиях*, серия "Электроны в полупроводниках", вып.8, ред. Ю. Пожела, Мокслас, Вильнюс (1989).
7. Ю. В. Климонтович, *Статистичесая физика*, Наука, М. (1982), гл. 24.
8. Sh. M. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
9. H. L. Hartnagel, R. Katilius, and A. Matulionis, *Microwave Noise in Semiconductor Devices*, Wiley, N.Y. (2001).
10. P. J. Price, *Fluctuations of hot electrons*, Fluctuation Phenomena in Solids, ed. by R. E. Burgess, Academic Press, N.Y. (1965), p. 393.
11. С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, ФТТ **90** 5 (2018).
12. S. V. Gantsevich and V. L. Gurevich, Theoretical Physics **2**, 63 (2017).
13. R. Katilius, S. V. Gantsevich, V. D. Kagan, and M. I. Muradov, Fluctuation and Noise Lett. **9**(4), 373 (2010).
14. M. Ramonas, R. Katilius, A. Matulios, and S. V. Gantsevich, Fluctuation and Noise Lett. **12**(4), 1350023 (2013).