Письма в ЖЭТФ, том 108, вып. 1, с. 35 – 41

Метастабильность при потере морфологической устойчивости движущейся границы жидкости[1)]

Л. М. Мартюшев[+*2)], Р. Д. Бандо[+], Е. А. Червонцева[+]

[+]Уральский федеральный университет, 620002 Екатеринбург, Россия

[*]Институт промышленной экологии Уральского отделения РАН, 620219 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 26 апреля 2018 г.
После переработки 23 мая 2018 г.

В работе рассмотрена задача о морфологической устойчивости поверхности раздела двух жидкостей в случае, когда одна из них вытесняет другую в радиальной ячейке Хеле–Шоу. С помощью численного расчета впервые показано, что критический размер устойчивости уменьшается с увеличением амплитуды возмущений границы раздела и достигает значения, которое ранее было независимо аналитически определено с помощью расчетов термодинамического производства энтропии и принципа максимума производства энтропии. Данный результат является важным аргументом в обоснование гипотезы, что именно производство энтропии позволяет предсказывать неравновесные фазовые переходы в гидродинамических системах (т.е. является аналогом термодинамического потенциала). Другими словами, производство энтропии определяет кинетическую бинодаль – границу метастабильной области в случае возмущений произвольной амплитуды.

DOI: 10.1134/S0370274X18130076

1. Введение Возникновение структур при неравновесных процессах, сопровождаемое появлением ряда новых свойств, наблюдается в природе очень часто. Например, это переход от ламинарного течения к турбулентному, от растущих кристаллов правильной формы к дендритам или образование различных структур при конвективном переносе тепла. Подобные неравновесные (кинетические) переходы происходят в некоторых ограниченных областях управляющих параметров (характерного размера, градиента давления, концентрации, температуры и т.д.). Это позволяет построить так называемые фазовые диаграммы с областями, в которых могут существовать, а иногда и сосуществовать различные морфологии (неравновесные фазы) (см., например, [1, 2]). Экспериментально построить подобную диаграмму не представляет принципиальной сложности. Однако на основании каких принципов и расчетов ее теоретически можно предсказать? В случае равновесных переходов подобные задачи решаются с помощью анализа термодинамического потенциала и хорошо изучены (например, теория фазовых переходов Ландау). В случае неравновесных переходов на роль подобного потенциала в последние время стало претендовать производство энтропии. Первые подобные предложения стали появляться примерно тридцать лет назад (см., например, [3, 4]) и выглядели как интуитивные и оригинальные гипотезы. Однако после ряда работ [5, 6], в которых была показана связь подобных идей с принципом максимума производства энтропии ("*Maximum Entropy Production Principle*" – MEPP), представления о том, что производство энтропии является важнейшей характеристикой управляющей неравновесными явлениями, получили существенное подкрепление. Суть MEPP, имеющего опору как на классическую кинетической теорию, так и на термодинамику неравновесных процессов, достаточно проста [7–10]: неравновесная система стремиться развиваться так, чтобы максимизировать производство энтропии. В случае рассмотрения неравновесных переходов, согласно MEPP, та неравновесная фаза будет более устойчивой, которая обладает большим производством энтропии. Таким образом, получив выражения для производства энтропии каждой из неравновесных фаз и приравнивая их, можно аналитически определить бинодаль перехода – границу областей, в которых абсолютно устойчиво к возмущениям произвольной амплитуды существуют неравновесные фазы. Если вблизи границы бинодали в системе нет возмущений достаточной амплитуды, то неравновесные структуры могут сосуществовать некоторое время, при этом од-

[1)]См. доп.материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

[2)]e-mail: leonidmartyushev@gmail.com

на из сосуществующих структур будет иметь большее, а другая меньшее производство энтропии. Вторая структура является в этом случае метастабильной. Чем дальше система оказывается от границы бинодали, тем меньшие возмущения способны перевести систему из метастабильного состояния в состояния стабильное (устойчивое), т.е. в состояние с максимальным производством энтропии. В предельном случае возмущение, вызывающее переход, может оказаться бесконечно малым. Этот случай, как известно, находится с помощью классической линейной теории возмущений. На языке теории фазовых переходов – этот предел является спинодалью рассматриваемой неравновесной системы, т.е. границей, начиная с которой, фаза с меньшим производством энтропии становиться абсолютно неустойчивой. Описанный выше алгоритм теоретического расчета морфологических диаграмм из-за математической сложности большинства задач (в частности, их нелинейности) был ранее рассмотрен в полном объеме аналитически лишь для двух случаев.

Первая задача – расчет начальной стадии потери морфологической устойчивости поверхности частицы (шаровой либо цилиндрической формы), растущей благодаря диффузионному осаждению вещества [5, 6, 11]. Аналитически полученные при этом значения бинодалей и спинодалей, в силу сделанных при выводе приближений, оказалось очень сложно сравнить с имеющимися экспериментальными результатами. Поэтому для проверки корректности расчетов были проведены численные исследования данной системы при наличии возмущений поверхности частицы произвольной амплитуды [11–13]. Было обнаружено, в частности, что критический размер устойчивости частицы уменьшается с увеличением амплитуды возмущений и стремиться к значению бинодали, которое было ранее независимо определено на основе MEPP, т.е. методом, принципиально отличным от прямого численного решения. Расхождение при наличии достаточной неравновесности на границе, растущей частицы, составляло менее 10 %.

Вторая задача – расчет устойчивости фронта при вытеснении одной жидкостью другой в радиальной ячейке Хеле–Шоу (см. рис. 1) [14–16]. Полученные при расчетах выводы о морфологической устойчивости движущегося фронта двух жидкостей и областях сосуществования неравновесных фаз качественно и количественно удалось частично сравнить с результатами специально проведенных экспериментов по вытеснению воздухом и водным раствором глицерина силиконового масла [17–19]. Результаты экспериментов и теории согласовывались. Однако экспериментальные исследования предоставляют очень ограниченные возможности по проверке теории в силу многочисленных технических сложностей, в частности, при создании на фронте жидкостей контролируемых одиночных возмущений заданной амплитуды и формы. Для достижения полной проверки аналитических расчетов (прежде всего значения бинодалей) [16] необходим численный расчет, подобный проведенному при проверке решения первой задачи. Решение этой задачи и составило цель настоящей работы.

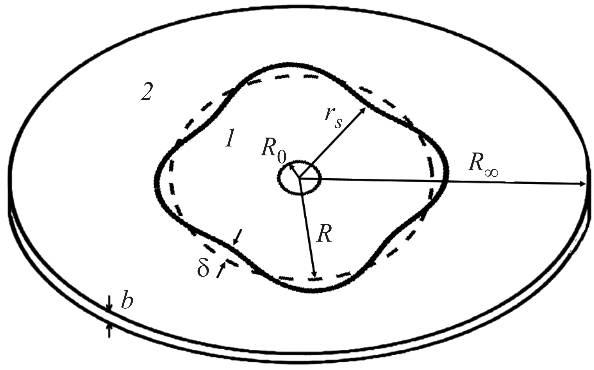

Рис. 1. Схематическое изображение радиальной ячейки Хеле–Шоу. *1* – вытесняющая жидкость; *2* – вытесняемая жидкость

2. Математическая постановка задачи. Существующие аналитические результаты. Исследуется вытеснение в ячейке Хеле–Шоу жидкости с большей вязкостью μ_2 другой жидкостью с меньшей вязкостью μ_1 (рис. 1). Ячейка имеет толщину b и размер R_∞. Из центра ячейки через отверстие радиуса R_0 поступает вытесняющая жидкость с постоянным поверхностным расходом Q. Начальная граница между жидкостями возмущена гармоническим образом $r_s = R + \cos(k\varphi)$, где R – радиус границы, δ – амплитуда возмущения, k – мода возмущения, φ – полярный угол. Математическая постановка задачи аналогична классической постановке [14, 15, 20–22] и имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_i}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1)$$

$$-M_1 \partial p_1/\partial \mathbf{n}|_{R_0} = \frac{Q}{2\pi R_0}, \quad (2)$$

$$M_1 \partial p_1/\partial \mathbf{n}|_{r_s} = M_2 \partial p_2/\partial \mathbf{n}|_{r_s}, \quad (3)$$

$$p_1 - p_2|_{r_s} = \frac{2\varepsilon}{b} + \frac{\pi K \varepsilon}{4}, \quad (4)$$

$$p_2|_{R_\infty} = 0, \quad (5)$$

где p_i – давление в жидкости ($i = 1, 2$ для вытесняющей либо для вытесняемой жидкости соответственно), ε – поверхностное натяжение на границе между жидкостями, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности, $M_i = b^2/12\mu_i$, K – кривизна гармонически искаженной поверхности раздела.

Уравнение (1) является следствием закона Дарси и условия непрерывности потока. Граничное условие (2) определяют скорость вытеснения жидкости при постоянном расходе поступающей жидкости из круглого отверстия. Граничное условие (3) представляет собой условие непрерывности скорости движения жидкостей на гармонически искаженной границе раздела. Соотношение (4) – условие Лапласа, задающее скачок давления на искривленной границе двух жидких фаз в ячейке Хеле–Шоу [21, 22]. Давление вытесняемой жидкости на внешней границе ячейки считается постоянным (5) и для удобства расчета выбрано нулевым (в связи с этим p_i можно считать некими избыточными давлениями по сравнению с внешним).

Линейный анализ на морфологическую устойчивость задачи (1)–(5) дает следующее уравнение для определения размера R_s^* (спинодали), после которого граница раздела становиться морфологически неустойчивой по отношению к бесконечно малому возмущению границы δ [15]:

$$1 + kF = 0,$$

$$F = \left(\frac{M_2}{M_1} - 1\right) \frac{1 + \left((k^2-1)\frac{\varepsilon\pi}{4R}\right)\frac{2\pi}{Q}\frac{M_1 M_2}{M_2 - M_1}}{\frac{M_2}{M_1}\frac{1+(R_0/R)^{2k}}{1-(R_0/R)^{2k}} + \frac{1-(R/R_\infty)^{2k}}{1+(R/R_\infty)^{2k}}}. \qquad (6)$$

Термодинамический анализ задачи (1)–(5), выполненный на основе расчетов производства термодинамической энтропии и MEPP, приводит к следующему уравнению [16]:

$$1 + 2kF = 0. \qquad (7)$$

Решение уравнения (7) относительно радиуса приводит к нахождению R_b^* – бинодали рассматриваемого морфологического перехода. Согласно существующей теории [5, 6, 11, 16], при достаточно больших (произвольных) амплитудах возмущения переход от устойчивой (круглой) границы к неустойчивой (с развивающимися гармоническими возмущениями) будет происходить при R_b^*, а на интервале размеров от R_b^* до R_s^* поверхность раздела двух жидкостей будет метастабильной (морфологически неустойчивой в зависимости от амплитуды возмущения). Подчеркнем, что аналитический расчет на основе производства энтропии [16] не предсказывает зависимость размера устойчивости от амплитуды.

3. Краткое описание алгоритма численного анализа. Для численного анализа морфологической устойчивости движущейся границы между двумя жидкостями, описываемой математической моделью ур. (1)–(5), был использован коммерческий специализированный пакет COMSOL Multiphysics, позволяющий производить численное решение уравнений в частных производных методом конечных элементов. Расчет состоял из двух этапов. На первом этапе определялось поле давления в ячейке Хеле–Шоу. При этом с особой аккуратностью (благодаря значительному увеличению числа расчетных конечных элементов) это поле рассчитывалось вблизи возмущенной гармоникой $\delta\cos(k\varphi)$ поверхности раздела двух жидкостей. На втором этапе вычислялась скорость роста частицы (которая пропорциональна $\partial p/\partial\mathbf{n}$ [14, 15]). Следуя работам [12, 13], морфологическая устойчивость поверхности раздела жидкостей определялась с помощью сравнения усредненной по всей границе скорости роста частицы со скоростью роста ее наибольшего выступа. Если скорость на выступе оказывалась больше средней скорости, то рост подобной поверхности считался неустойчивым, и наоборот – если скорость на выступе была меньше средней скорости, то граница раздела считалась морфологически устойчивой.

Подобные этапы вычисления многократно повторялись для различных управляющих параметров задачи (R, k, δ, Q и т.д.), что позволяло определить критический размер R_c, при котором поверхность раздела изменялась от морфологически устойчивой к неустойчивой. Для автоматизации и упрощения нахождения критического размера R_c в программном комплексе MATLAB была создана программа, позволяющая управлять в циклах вычислениями в среде COMSOL Multiphysics, изменяя параметры задачи.

Для тестирования и контроля точности численных расчетов задачи (1)–(5), в частности, критического размера устойчивости, использовались аналитические результаты линейного анализа на устойчивость [15]. Действительно, при стремлении амплитуды возмущения δ к нулю результаты численного и аналитического исследования модели (1)–(5) на устойчивость должны совпадать. Исходя из проведенных расчетов, обнаружено, что относительное расхождение результатов в среднем не превышало 3 % (более детальная информация приведена в дополнительных материалах, табл. 1). Улучшение сходимости результатов было возможно, но нецелесообразно из-за существенного увеличения времени расчета.

Зависимость R_c от произвольного значения δ в литературе не известна, так как полный нелинейный анализ на устойчивость модели (1)–(5) не проведен. Поэтому основной целью численного расчета

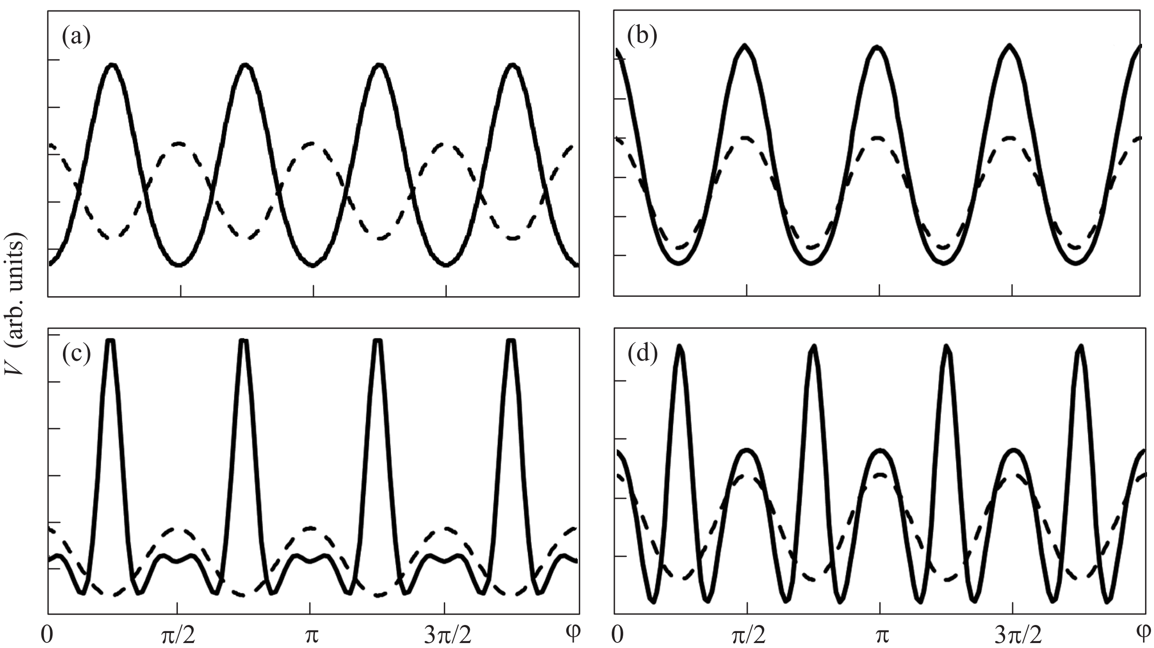

Рис. 2. Зависимость скорости движения фазовой роста границы V от угла φ (сплошная линия). Пунктиром схематически указан вид возмущенной фазовой границы. Пример для относительно малых амплитуд возмущений ($\delta = 0.3$ мм): размер до (a) и после (b) критического радиуса R_c. Пример для относительно больших амплитуд возмущений ($\delta = 3$ мм): размер до (c) и после (d) критического радиуса R_c. $Q = 250\,\text{мм}^2/\text{с}$, $b = 0.6$ мм, $k = 4$

явилось именно исследование зависимости $R_c(\delta)$ и проверка существования бинодали, предсказываемой термодинамическим анализом [16].

4. Результаты вычислений. Расчеты проводились при следующих параметрах: $\mu_1 = 1.85 \times 10^{-5}$ кг/м·с, $\mu_2 = 4.4 \cdot 10^{-3}$ кг/м·с, $\varepsilon = 18.1 \times 10^{-3}$ Н/м, $R_0 = 5.5$ мм, $R_\infty = 100$ мм, $b = 0.6$ и 0.9 мм. Эти параметры выбирались так, чтобы соответствовать условиям экспериментов, проведенных в [17–19]. В этих опытах изучалось вытеснение воздухом силиконового масла (ПМС-5) при нормальный условиях. Диапазон скорости вытеснения был в пределах $Q = 250 \div 1500\,\text{мм}^2/\text{с}$. Вычисления проводились для пяти мод $k = 2,...,6$ различной амплитуды. В ходе расчетов были получены следующие основные результаты:

1. Поведение скорости фазовой границы при увеличении амплитуды возмущения существенно изменяется (рис. 2). Действительно, при малых амплитудах (рис. 2a, b) скорость роста до и после потери устойчивости имеет форму, подобную форме гармоники, возмущающей изначально круглую поверхность. При этом до потери устойчивости зависимости скорости и поверхностного возмущения находятся в противофазе (выпуклость развивается с меньшей скоростью, чем вогнутость), а после потери устойчивости ($R > R_c$) фазы совпадают (выпуклость развивается с большей скоростью, чем вогнутость). Этот результат хорошо известен, исходя из линейной теории возмущения [14, 15]. При больших амплитудах возмущения (рис. 2c, d) вид зависимости скорости принципиально изменяется – появляются дополнительные моды по сравнению с первоначально возмущенной поверхностью. Подобный результат является новым, хотя его можно было прогнозировать на основе результатов слабонелинейного анализа задач, выполненных для моделей достаточно близких к рассматриваемой [23], а также на основе известных результатов численного расчета частиц, растущих благодаря диффузионному осаждению вещества [12, 13].

2. В ходе вычислений обнаружено, что критический радиус устойчивости с ростом амплитуды возмущения вначале уменьшается, а затем увеличивается (рис. 3a, b). Зависимость $R_c(\delta)$ имеет две особые точки: при $\delta \to 0$ и точка минимума. Если первая точка (обозначим ее R_S) хорошо аналитически изучена ранее методами классического линейного анализа на устойчивость (см., например, [15]), то наличие второй точки (обозначим ее R_b) представляется важным и не тривиальным результатом. Действительно, пусть вытеснение происходит в среде, в которой возможны возмущения, например, с некоторой определенной модой, но произвольной амплитудой. Тогда, согласно расчетам (рис. 3a, b), переход

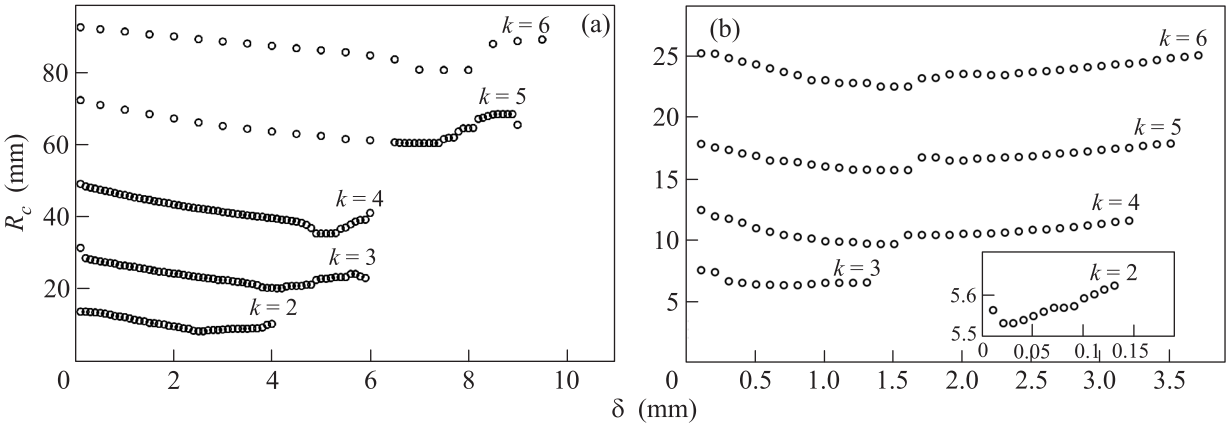

Рис. 3. Зависимость критического размера морфологической устойчивости R_c межфазной границы от амплитуды возмущения для разных мод k, при толщине $b = 0.6$ мм и скоростей вытеснения $Q = 250\,\text{мм}^2/\text{с}$ (a) и $Q = 1000\,\text{мм}^2/\text{с}$ (b)

от устойчивого роста к неустойчивому возможен при некотором критическом размере, соответствующем минимуму зависимости R_c от δ. Если эксперимент будет проводиться более "аккуратно", т.е. по возможности будет уменьшен уровень (амплитуда) возмущений в среде, то согласно расчетам, критический размер устойчивости увеличится. Следуя устоявшейся терминологии в теории равновесных фазовых переходов, по аналогии, естественно назвать полученный минимальный критический размер R_c – бинодалью R_b, а размер, который наблюдается, если амплитуда возмущения сведена практически к нулю – спинодалью неравновесного перехода R_S (крайняя левая точка на представленных на рис. 3a, b кривых $R_c(\delta)$). Переход к неустойчивому росту может в зависимости от уровня возмущений наблюдаться в области от R_b до R_s. Эту область естественно назвать метастабильной. Примеры морфологической диаграммы, в которой изображены метастабильные области для различных возмущающих мод, приведены на рис. 4. Видно, что с увеличением скорости вытеснения жидкостей ширина метастабильной области уменьшается, но при этом метастабильные области, относящиеся к разным модам, не пересекаются друг с другом.

Проиллюстрируем вышеизложенное на двух примерах (рис. 5). Предположим, что происходит вытеснение одной жидкости другой, начиная с некоторого размера круглой формы. Пусть в этой системе возможны флуктуации (возмущения), приводящие к искажениям границы, с $k \geq 2$ произвольной амплитуды. Естественно предположить, что чем больше амплитуда возмущений, тем более редкое их появление (как во времени, так и в пространстве), и, напротив, возмущений с исчезающе малой амплитудой бесконечно много. Пусть в первом примере происходит вытеснение с расходом Q_1, начиная с размера R_1 (рис. 5). Круглая форма границы сохраняется до достижения размера бинодали, соответствующей $k = 2$. Начиная с R_2, круглая форма границы может исказиться при наличии достаточно больших по амплитуде возмущений (см. рис. 5). Так как доля подобных возмущений относительно не велика, то и вероятность таких переходов не значительна. При дальнейшем вытеснении R увеличивается и, согласно расчетам (см. рис. 3), возмущения с меньшими δ способны привести к морфологической неустойчивости границы. Так как доля малоамплитудных возмущений больше, то и вероятность потери морфологической устойчивости границы возрастает. Таким образом, при R_2, находящимся между размерами бинодали до спинодали, может наблюдаться как круглый, так и искаженный (по $k = 2$) фронт вытеснения. При этом круглый фронт является метаста-

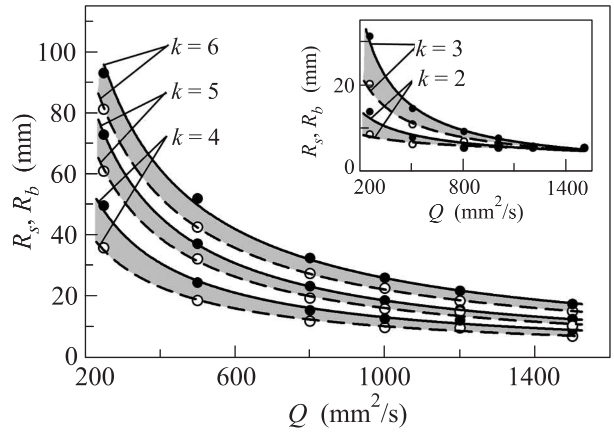

Рис. 4. Зависимость критических размеров R_s (•) и R_b (○) от скорости вытеснения Q при различных модах вытеснения k. Метастабильные области выделены серым цветом. $b = 0.6$ мм

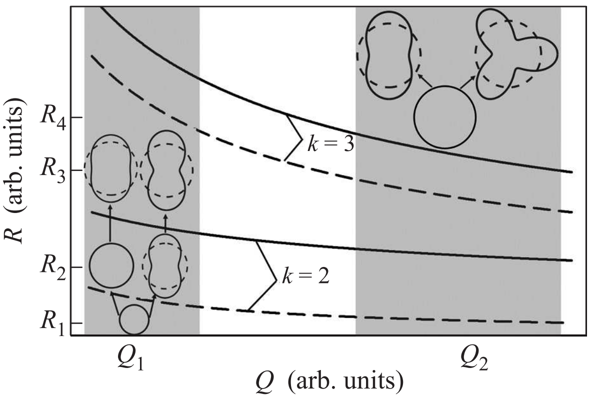

Рис. 5. Схематический рисунок, показывающий два варианта вытеснения при разных скоростях Q и начальных размерах. Как можно видеть, на отдельных этапах развития наблюдается сосуществование различных структур

бильным, так как при появлении соответствующих возмущений он всегда нарушается. При достижении спинодали, круглый фронт становится не устойчивым по отношению к возмущениям бесконечно малой амплитуды, и так как количество таких возмущений огромно, то морфологическая устойчивость будет точно потеряна, если этого не произошло ранее. В результате при достижении размера R_3 фронт вытеснения в большей или меньшей степени искажен по второй моде. Рассмотрим второй пример. Пусть происходит вытеснение с расходом Q_2, начиная с размера R_4 (рис. 5). Данный размер больше значения спинодалей для $k = 2$, 3. Следовательно, так как возмущений с бесконечно малыми амплитудами очень много, то практически сразу при вытеснении форма фронта исказиться по второй или третьей моде. В результате при рассматриваемых условиях роста с равной вероятностью можно встретить как одну, так и другую форму. Это так называемое сосуществование двух морфологических фаз.

3. Обратимся сейчас к наиболее важному вопросу, поставленному во введении: на сколько численно рассчитанный бинодальный радиус для модели (1)–(5) совпадает с радиусом, теоретически предсказанным ранее в [16] с помощью MEPP для этой же модели? Количественное сравнение результатов показало, что расхождение значений, аналитически предсказанных на основании (7) бинодалей и численно рассчитанных, составляет в среднем 6.8 % при $b = 0.6$ мм и 9.5 % при $b = 0.9$ мм. Детали проведенных расчетов можно найти в дополнительных материалах, табл. 2. Отметим, что точность определения спинодали, расчеты которой использовались в качестве тестирования численной схемы в среднем были около 3 %. Среди рассчитанных значений имеется лишь два значения существенно отличающихся от теории: 19 и 20 % ($k = 3$, $Q = 250\,\text{мм}^2/\text{с}$, $b = 0.9$ мм и $k = 2$, $Q = 1000\,\text{мм}^2/\text{с}$, $b = 0.9$ мм соответственно). Объяснений этим расхождениям найти не удалось. Интересно отметить, что в расчетах бинодали при росте частиц благодаря диффузионному осаждению, проведенных ранее в [12, 13], также наблюдались наибольшие расхождения (вплоть до 60 %) при малых возмущающих модах. Однако там большие ошибки для малых мод фиксировались систематически в случае квазиравновесного роста. В настоящем расчете полученные расхождения выглядят скорее, как выбросы, связанные, по-видимому, с численным счетом модели (1)–(5) методом конечных элементов.

Заключение. Основным результатом работы является то, что с помощью численного анализа на морфологическую устойчивость удалось показать, что с ростом амплитуды возмущений критический размер устойчивости при вытеснении жидкостей уменьшается от некоторого размера (спинодали) до так называемого радиуса бинодали, аналитически ранее предсказанного для этой задачи с помощью расчетов производства энтропии и MEPP. При этом обнаружено хорошее количественное согласие этих значений. Полученный результат является важным и интересным по крайней мере с двух точек зрения.

1. Открывается возможность для количественного определения с помощью MEPP кинетической бинодали при морфологической устойчивости движущегося фронта жидкостей. Ранее подобные аналитические расчеты, использующие относительно простой метод (вычисление производства энтропии) в сравнении с полным нелинейным анализом на устойчивость могли восприниматься для гидродинамических систем с недоверием.

2. Полученный результат является дополнительным аргументом в обоснование гипотезы о возможности использования именно производства энтропии в качестве неравновесного аналога потенциалов, используемых в равновесной термодинамике.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке в рамках научного гранта # 1.4539.2017/8.9.

1. Y. Sawada, B. Perrin, P. Tabeling, and P. Bouissou, Phys. Rev. A **43**, 5537 (1991).
2. S. Akamatsu, G. Faivre, and T. Ihle, Phys. Rev. E **51**, 4751 (1995).
3. E. Ben-Jacob and P. Garik, Nature **343**, 523 (1990).
4. A. Hill, Nature **348**, 426 (1990).

5. Л. М. Мартюшев, В. Д. Селезнев, И. Е. Кузнецова, ЖЭТФ **118**, 149 (2000).
6. Л. М. Мартюшев, И. Е. Кузнецова, В. Д. Селезнев, ЖЭТФ **121**, 363 (2002).
7. H. Ziegler, *An Introduction to Thermomechanics*, North-Holland, Amsterdam (1983).
8. *Non-Equilibrium Thermodynamics and the Production of Entropy: Life, Earth and Beyond*, ed. by A. Kleidon and R. Lorenz, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2005).
9. L. M. Martyushev and V. D. Seleznev, Phys. Rep. **426**, 1 (2006).
10. L. M. Martyushev and V. D. Seleznev, Physica A **410**, 17 (2014).
11. L. M. Martyushev, in *Beyond the Second Law. Entropy Production and Non-equilibrium Systems*, ed. by R. C. Dewar, C. H. Lineweaver, R. K. Niven, and K. Regenauer-Lieb, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2014), p. 383.
12. L. M. Martyushev and E. A. Chervontseva, Phys. Lett. A **373**, 4206 (2009).
13. L. M. Martyushev and E. A. Chervontseva, EPL **90**, 10012 (2010).
14. L. Paterson, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
15. L. M. Martyushev and A. I. Birzina, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 045201 (2008).
16. L. M. Martyushev and A. I. Birzina, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 465102 (2008).
17. L. M. Martyushev, A. I. Birzina, M. S. Konovalov, and A. P. Sergeev, Phys. Rev. E **80**(6), 066306 (2009).
18. Л. М. Мартюшев, А. И. Бирзина, Письма в ЖЭТФ **99**(8), 516 (2014).
19. Р. Д. Бандо, Л. М. Мартюшев, Изв. РАН. Механика жидкостей и газа **5**, 52 (2016).
20. D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. I. Shraiman, and C. Tang, Rev. Mod. Phys. **58**(4), 977 (1986).
21. G. M. Homsy, Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 271 (1987).
22. C.-W. Park and G. M. Homsy, J. Fluid Mech. **139**, 291 (1984).
23. J. A. Miranda and M. Widom, Physica D **120**, 315 (1998).