Письма в ЖЭТФ, том 108, вып. 5, с. 299 – 306

Диамагнетизм и парамагнетизм метаматериала из колец с током

М. В. Давидович[1)]

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

Поступила в редакцию 18 мая 2018 г.

Рассмотрены метаматериалы из проводящих колечек в диэлектрической матрице, расположенные хаотически или периодически, образуя фотонный кристалл. Получены модели, показывающие, что магнитный отклик может быть как диамагнитным, так и парамагнитным, но в нерезонансной области, где однородная магнитная проницаемость еще имеет смысл, ее значение близко к единице.

DOI: 10.1134/S0370274X18170010

В достаточно обширной литературе (см., например, работы [1–4] и обзор литературы в них) исследуются метаматериалы в виде металлических включений, поддерживающие замкнутые контурные токи и наведенный магнетизм. При этом, как правило, эффективные параметры метаматериала – искусственной среды (ИС) считаются скалярными, т.е. метаматериал рассматривается как изотропный, хотя реальные анализируемые в работах структуры является, как правило, анизотропными (или даже бианизотропными), причем обладающими сильной пространственной дисперсией (ПД). Скалярная диэлектрическая проницаемость (ДП) в оптике получается для аморфных веществ или кубических кристаллов, когда отношение межатомных расстояний d к длине волны λ (берем $\lambda = 500$ нм) имеет порядок $d/\lambda = 10^{-4}$ (на более низких частотах оно еще меньше). При этом ПД можно пренебречь. В фотонном кристалле (ФК) при периоде $d = 500$ нм это отношение равно единице, а при $d = 100$ нм всего лишь 0.2. При этом даже при размере включений 10 нм такой ФК не является разреженным, т.е. имеется сильное взаимное влияние метаатомов. Естественно, металлическая или диэлектрическая частица размера 10 нм не может иметь резонансов вплоть до границы оптического и ультрафиолетового диапазонов (в этой области сосредоточены резонансы локализованных плазмонов наночастиц). Классическая теория считает, что в оптике магнитные свойства практически отсутствуют [5, 6]. Тем не менее, в большом числе публикаций этот вывод оспаривается, и рассматриваются метаматериалы с отрицательной магнитной проницаемостью (МП).

Для достижения отрицательных значений эффективной МП часто используют модель Лоренца, аналогичную модели для ДП среды в виде электрического диполя (или нескольких диполей) с резонансной частотой перехода ω_0 (или частотами ω_{0n}). Такая разреженная среда (газ осцилляторов) обладает на низких частотах нормальной дисперсией, которая за частотой резонанса становится аномальной положительной, а затем аномальной отрицательной [6] (при условии, что имеются некоторые потери). Часто формулу Лоренца применяют и к магнитным диполям, задавая с помощью нее модель среды, что не верно, и определяя параметры МП из каких-либо расчетов или эксперимента. Ошибка состоит в том, что в ИС из магнитных диполей внутренним полем является поле $\mathbf{B}$ (индукция), а не магнитное поле $\mathbf{H}$. Поэтому магнитный диполь $\mathbf{m} = \mathbf{n}IS$ в виде ориентированной в направлении $\mathbf{n}$ рамки площади S с током $I = I_0 \exp(i\omega t)$, находящийся под действием электромагнитной волны

$$\mathbf{E}^{in} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}^{in} = Z\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \tag{1}$$

имеет диамагнитную поляризуемость. Здесь $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Среда имеет заданную ДП ε и МП μ, которую создают помещенные в нее магнитные диполи в виде проводящих колец. Поэтому $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 k_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$, $Z = Z_0\sqrt{\mu/\varepsilon}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $k_0 = \omega/c$.

Рассмотрим рамку (проволочное кольцо) с током $I = I_0 \exp(i\omega t)$ радиуса $a \ll \lambda$ с радиусом проволоки $r \ll a$, ориентированную вдоль z в поле $\mathbf{E}^{in}$, $\mathbf{H}^{in}$. Рамка рассеивает поле, поэтому полное электромагнитное поле есть $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{in} + \mathbf{E}^{sc}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{in} + \mathbf{H}^{sc}$. По закону электромагнитной индукции имеем

$$\partial\Phi/\partial t = i\omega\mu_0 \exp(i\omega t) \int_S (\mathbf{H}^{in} + \mathbf{H}^{sc})\mathbf{n}dS =$$

$$= -\oint_L E_l dl = -\frac{aZ_s I_0}{r} \exp(i\omega t). \tag{2}$$

[1)]e-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

Здесь $Z_s = (1+i)\sqrt{\mu_0\omega/(2\sigma_0)}$ – поверхностный импеданс металла проволоки. Далее множитель $\exp(i\omega t)$ будем опускать. Если $Z_s = 0$ (проводник идеально проводящий), то $H_z^{in} = -H_z^{sc}$, т.е. ток проволоки, согласно правилу Ленца компенсирует магнитный поток через рамку. В общем случае положим $H_z^{sc} = -H_z^{in} + \Delta H$. Имеем $\Delta H = -Z_s I_0/(i\pi k_0 a\mu Z_0 r)$, магнитный момент рамки $m_z = I_0 S$ и ее намагниченность $p_z^m = \mu_0\mu I_0 S = \mu_0\mu I_0 \pi a^2$. Постоянный ток I_0 рамки создает вектор-потенциал $\mathbf{A} = A_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0$ [7, 8]:

$$A_\varphi = \frac{I_0 a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{a^2+\rho^2+z^2-2a\rho\cos(\varphi)}}. \qquad (3)$$

При малых ρ и z имеем $A_\varphi \approx I_0\rho/(8a)$, и в центре рамки значение нормальной компоненты магнитного поля, равное

$$H_z^{sc} = \frac{I_0}{2a} = -H_z^{in} - \frac{Z_s I_0}{i\omega\mu_0\mu\pi a r}. \qquad (4)$$

Из (4) выражаем амплитуду тока $I_0 = -2aH_z^{in}/[1 + 2Z_s/(i\omega\mu_0\mu\pi r)]$. Обозначим $R_s = \sqrt{\mu_0\omega/(2\sigma_0)} = \sqrt{k_0 Z_0/(2\sigma_0)}$. Если поверхностный импеданс мал: $R_s \ll k_0 r Z_0 \mu\pi/2$, то вторым членом в правой части (4) можно пренебречь, и для магнитного дипольного момента рамки имеем $p_z^m = \mu_0\mu I_0 S = -2\mu_0\mu\pi a^3 H_z^{in}$. Приведенное неравенство перепишем так: $2/\mu\pi \ll \sqrt{2r^2 k_0 Z_0 \sigma_0}$. Оно показывает, что частота и радиус проволоки не могут быть очень малыми, а условие выполнено тем точнее, чем выше проводимость σ_0. При малой частоте и радиусе нельзя пользоваться поверхностным импедансом для выражения тока. В этом случае можно считать, что ток и поле распределены в проволоке равномерно, при этом плотность азимутального тока есть $J_\varphi = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m - \varepsilon)E_\varphi$. Здесь $\varepsilon_m = \varepsilon_L(\omega) - \omega_p^2/(\omega^2 - i\omega\omega_c)$ – ДП металла, а ток определяет превышение тока поляризации металла по сравнению с током смещения в окружающем диэлектрике. На оптических частотах и ниже для металлов величина $\varepsilon_L(\omega) \sim 10$, почти не зависит от частоты и почти действительная. Она характеризует ДП Лоренца, связанную с внутризонными переходами в атомах кристаллической решетки и межзонными переходами [9]. Плазменные частоты хороших металлов лежат в ультрафиолетовой области, а частоты столкновений при комнатной температуре – в терагерцевом и инфракрасном диапазонах [9]. Резонансные частоты локализованных плазмонов для кольца с радиусом в несколько нанометров сосредоточены вблизи частоты $\omega_r = \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + 2}$ [9]. На низких частотах $\varepsilon_m = -i\sigma_0/(\omega\varepsilon_0)$. Тогда $I_0 = i\pi r^2\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m - \varepsilon)E_\varphi$. Правую часть (2) пишем в виде

$$-2\pi a E_\varphi = -\frac{2aZ_0 I_0}{ir^2 k_0(\varepsilon_m - \varepsilon)}. \qquad (5)$$

На низких частотах (5) приобретает значение $-2aI/(r^2\sigma_0)$. В этом случае $\Delta H = -2I_0/(i\pi k_0 a\mu r^2\sigma_0 Z_0)$, откуда

$$I_0 = -2aH_z^{in}\bigg/\left(1 + \frac{4}{i\pi\mu k_0 r^2\sigma_0 Z_0}\right), \qquad (6)$$

Из (6) видно, что при $k_0 \to 0$ ток стремится к нулю, и $\mu \to 1$. В общем случае колечек с радиусом $r \ll \delta = 2^{1/2}/\sqrt{k_0\sigma_0 Z_0}$, где δ – глубина скин-слоя, используя (2) и (5), имеем

$$I_0 = -2aH_z^{in}\bigg/\left(1 - \frac{4}{\mu\pi r^2 k_0^2(\varepsilon_m - \varepsilon)}\right). \qquad (7)$$

Пусть в единице объема рассматриваемой ИС имеется N одинаковых колечек. Пусть ИС есть изотропный кубический фотонный кристалл, в котором рамки ориентированы вдоль каждой из осей. Тогда в его единице объема имеется $N/3$ рамок каждой из ориентаций. В этом случае $P_z^m = Np_z^m/3$. Если же рамки ориентированы равномерно хаотически и не пересекаются, т.е. ИС достаточно разреженная, то возникает $\cos(\theta)$ с углом между направлением магнитного поля и нормалью к контуру. Усредняя, получаем множитель $\langle\cos(\theta)\rangle = 2/\pi$. Для ФК с учетом равенства (7) имеем

$$B_z = \mu_0 H_z^{in} + P_z^m = \mu_0\mu H_z^{in} =$$
$$= \mu_0\left[1 - (2\pi Na^3/3)\mu\bigg/\left(1 - \frac{4}{\mu\pi r^2 k_0^2(\varepsilon_m - \varepsilon)}\right)\right]H_z^{in},$$
$$\mu = 1 - (2\pi Na^3/3)\mu\bigg/\left(1 - \frac{4}{\mu\pi r^2 k_0^2(\varepsilon_m - \varepsilon)}\right). \qquad (8)$$

Квадратное уравнение (8) имеет вид $\alpha\mu^2 - \beta\mu + \gamma = 0$, где $\alpha = (1 + 2\pi Na^3/3) \approx 1$, $\gamma = 4/[\pi r^2 k_0^2(\varepsilon_m - \varepsilon)]$, $\beta = 1+\gamma$. Обозначим $k_p = \omega_p/c$, $k_c = \omega_c/c$ плазменное и диссипативное волновые числа. Для серебра $\lambda_p = 118$ нм. На малых частотах $\gamma = 4i/[\pi r^2 k_0 k_p^2/k_c]$ – большая по модулю величина, $\beta \approx \gamma$, поэтому $\mu = \gamma(1+\gamma)$, $\mu' = |\gamma|^2/(1+|\gamma|^2) < 1$, $\mu'' = i/(1+|\gamma|^2)$. Потери малы, но их знак получился неверным. Для уточнения пренебрежем единицей в знаменателе (8). Имеем $\mu = 1 + \mu^2(\pi Na^3)\pi r^2 k_0^2(\varepsilon_m - \varepsilon)/6$. Второй член мал, поэтому в первом приближении $\mu = 1$, а второе приближение дает $\mu' = 1$, $\mu'' = Na^3\pi^2 r^2 k_0 k_p^2/(6k_c)$. Только третье приближение приводит к значению $\mu' < 1$. Конечно, для полученного квадратного уравнения можно привести точное решение. В области плазмоники $\omega_c \ll \omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L+1}$. Пусть $\varepsilon_L = \varepsilon$, $\pi r^2 k_0^2 \gg 1$. Тогда $\varepsilon - \varepsilon_m = \omega_p^2/\omega^2 \gg 1$ и величина γ малая отрицательная. Тогда $\mu = \beta/\alpha = (1-|\gamma|)/\alpha < 1$, а потери отсутствуют. В области $\omega \approx \omega_p$ имеем $\varepsilon_m \approx \varepsilon_L(\omega) - 1 - i\varepsilon''_m$, где мнимая часть мала. В этом случае в пренебрежении диссипацией величина γ малая положительная, правда, распределение тока по контуру уже следует считать азимутально зависимым.

Формула (3) справедлива при $ka \to 0$. Для более строгого учета явлений, связанных с распределением тока, рассмотрим строгие модели, основанные на методах функций Грина (ФГ) и интегральных уравнений (ИУ) [10–14]. Мы должны учесть все компоненты электрического поля, проникающего в проволоку, используя для них весьма общие разложения, и получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для них. При этом необходимо учесть взаимное влияние колечек. Наиболее просто задача решается для ФК, поскольку колечки расположены периодически. Взаимное влияние (внутреннее поле) определяет периодическая ФГ, учитывающая все периодически расположенные источники с заданными сдвигами в каждой ячейке периодичности (их бесконечное число). Поля представляются как бесконечные трехмерные суммы Блоховских волн с зависимостями $\exp(-i\mathbf{K}_{lmn}\mathbf{r})$, где $\mathbf{K}_{lmn} = \mathbf{x}_0 K_{xl} + \mathbf{y}_0 K_{ym} + \mathbf{z}_0 K_{zn}$, $K_{xl} = k_x + 2l\pi/d$, $K_{ym} = k_y + 2m\pi/d$, $K_{zn} = k_z + 2n\pi/d$, d – период кубического ФК. Вектор $\mathbf{k}$ определяет фазовые сдвиги по каждой из осей. Поскольку СЛАУ однородная, равенство нулю ее определителя $\det(k_0, \mathbf{k}) = 0$ дает дисперсионное уравнение (ДУ) ФК. Все коэффициенты СЛАУ можно выразить через один. Он определяет амплитуду волны при заданных k_0 и $\mathbf{k}$, которые следует определять из ДУ. Зная электрическое поле, получаем плотность тока в рамке и ее магнитный момент

$$\mathbf{m} = \int\limits_V \mathbf{J} \times \mathbf{r} dV.$$

Наиболее общая связь плотности тока и поля для рамки в диэлектрической основе имеет вид $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m - \varepsilon)\mathbf{E}(\mathbf{r})$. На низких частотах этот ток поляризации ведет себя как ток проводимости с плотностью $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$. В работах [10–12] рассмотренная задача решена для ФК из идеально проводящих стержней конечной и бесконечной длины, а в работе [13] – для идеально проводящих прямоугольных проволочных рамок. В этом случае задается поверхностный ток и нулевой касательное электрическое поле. Поскольку радиус r мал, поверхностный ток можно заменить осевым линейным, который ищется путем разложения по базисным функциям. В работе [14] задача решена для проволочного ФК методом объемного ИУ при достаточно строгом подходе с учетом удовлетворения внутреннего поля уравнению Гельмгольца. В общем случае МП есть тензор. Однако его введение на основе гомогенизации не однозначно [15, 16]. Принципиально его вообще можно не вводить, ограничившись тензором ДП $\hat{\varepsilon}$. Для рамок, направленных только по оси z, имеем одноосный ФК с МП

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Он может стать магнитным гиперболическим метаматериалом (ГММ), если $\mu'_{zz} < 0$. Встает вопрос: достижимы ли значения $\mu'_{zz} < 0$, и если да, то какова при этом диссипация $\mu''_{zz} < 0$. Если значение $\mu'_{zz} < 0$ достижимо, то каково отношение при этом d/λ? То есть можно ли при этом считать анизотропный ФК гомогенным (однородным). Рассмотрим сначала идеально проводящие колечки. Для них $\mu_{zz} = 1 - 2N\pi a^3/3$. Пусть $a = 0.1d$. В этом случае ФК с натяжкой еще можно считать разреженным. Пусть $d = 500$ нм. В единице объема (1 м^3) имеется $8 \cdot 10^{18}$ колечек радиуса 50 нм, и имеем $\mu_{zz} = 1 - 2.09 \cdot 10^{-3} = 0.998$. Можно, например, для гомогенизации воспользоваться уравнением Френеля [5, 6]

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{\mu_{zz}} + k_z^2 = k_0^2 \varepsilon. \tag{10}$$

Полагая, например, $k_z = 0$, $k_y = 0$, и выбирая поляризацию волны $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_y$, $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 H_z$, имеем для квадрата ее замедления в направлении x выражение $n_z^2 = k_x^2/k_0^2 = \varepsilon\mu_{zz}$. Численные расчеты при $\varepsilon = 1$ показывают [13], что замедление сначала близко к единице, а потом начинает возрастать до некоторого максимального значения при $k_x = \pi/d$ (рис. 1). При этом для $r = 5$ нм максимальное замедление $n_x = 1.26$, $k_0 = \pi/(n_x d)$, и имеем длину волны брегговского резонанса $\lambda = 630$ нм и $\mu_{zz} = 1.58$. При дальнейшем увеличении частоты возникает запрещенная зона. В ней величина k_x мнимая, а компоненты μ_{zz} отрицательная. При переходе на обратную ветвь $\pi/d < k_x < 2\pi/d$ замедление растет далее, а частота падает. Однако если движение в направлении $\Gamma \to \mathrm{X} \to \mathrm{M}$, то $\mu_{zz} > 1$ (рис. 2). При переходе через запрещенную зону на высшую прямую ветвь величина μ_{zz} переходит через минимум отрицательного значения, становится положительной, но меньше единицы, при этом частота растет. Наконец, можно перейти через запрещенную зону на

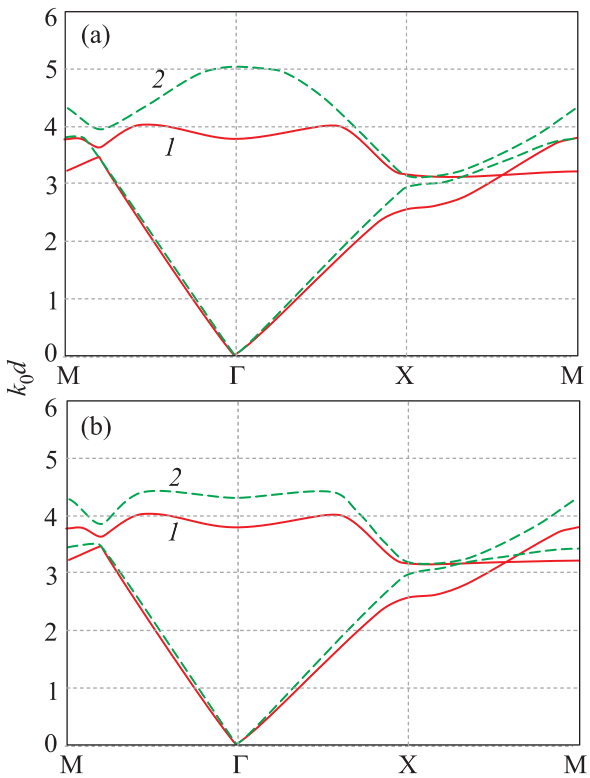

Рис. 1. (Цветной онлайн) Зонные диаграммы ФК с проволочными идеально проводящими кольцами при $\varepsilon = 1$, $M = 2$. (a) – $r/a = 0.05$, $a/d = 0.2$ (кривая *1*) и $a/d = 0.1$ (кривая *2*). (b) – $a/d = 0.2$, $r/a = 0.05$ (кривая *1*) и $r/a = 0.01$ (кривая *2*)

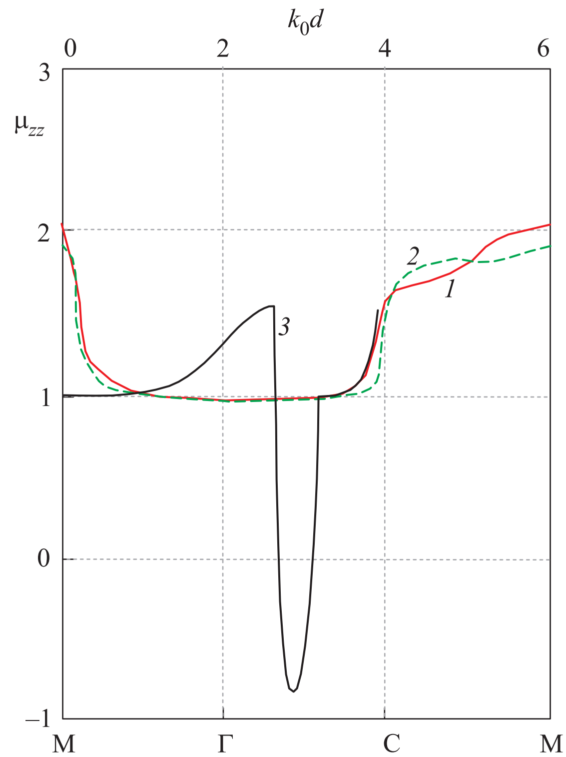

Рис. 2. (Цветной онлайн) Компонента μ_{zz}, рассчитанная на основе дисперсии рис. 1 и формулы (10): кривые *1* и *2* соответствуют нижней дисперсионной ветви для случая *1* и *2*, рис. 1b; кривая *3* соответствует частотной зависимости (верхняя шкала) для *1* при переходе с нижней на верхнюю ветви через запрещенную зону

высшую обратную ветвь. На ней μ_{zz} положительное, но мало и существенно меньше единицы. Эти результаты говорят о пространственной дисперсии (ПД): $\mu_{zz} = \mu_{zz}(k_0, \mathbf{k})$, т.е. о зависимости МП от точки дисперсионной поверхности $\omega = \omega(\mathbf{k})$ (здесь следует использовать многолистную дисперсионную поверхность, определяемую ДУ, а не поверхность изочастот (10)). В частности, волна, идущая вдоль оси z, почти не взаимодействует с колечками из тонкой проволоки. Полученный результат не зависит от направления вектора $\mathbf{k}$ в плоскости (x, y). Сильное отличие μ_{zz} от единицы связано с резонансами, при этом длина волны сравнима с размером ячейки ($d/\lambda \sim 1/2$). На высших дисперсионных ветвях длина волны еще меньше. Такой ФК нельзя считать гомогенным. Необходимый при этом (для выполнения условия $r \ll a$) радиус проволочки 5 нм требует учета квантового транспорта и квантовой проводимости [17]. Приведенные численные результаты получены при учете 41 члена в каждом из трехкратных рядов ФГ и трехчленов в разложении тока по углу φ, т.е. всего число учтенных членов ряда составило 41^3. Контроль апостериорной погрешности вычислений показывает, что этого вполне достаточно для получения дисперсии с погрешностью, существенно меньше 1 % во всем диапазоне.

В принципе, кубический изотропный ФК с идеально проводящими колечками на каждой грани куба и $\mu < 0$ возможен, как возможен и ГММ с $\mu_{zz} < 0$. Однако эти условия могут выполняться только на резонансных частотах, т.е. такие метаматериалы не являются однородными (гомогенными). Существенно картину портит диссипация. Она приводит к исчезновению запрещенных зон и смыканию дисперсионных ветвей [10–14]. ДП и МП приобретают мнимые добавки. В рассмотренных ФК при отсутствии диссипации возможны обратные волны (ОВ), если точка $(k_0, \mathbf{k})$ находится на обратной дисперсионной ветви дисперсионной поверхности. Это никак не связано с одновременно отрицательными значениями ДП и МП (или их компонент). При слабой диссипации на обратных ветвях также возможны ОВ, если участок ветви находится вдали от брегговских резонансов. Вблизи них и в запрещенной зоне ОВ по типу дисперсии классифицировать нельзя. Такая классификация возможна путем вычисления усредненного по периоду вектора Пойнтинга. Если рассматривать ИС из хаотически включенных колечек, то условием резонанса является равенство длины их окружности длине волны. В нашем случае это еще более жесткое условие. Как будет показано, такие резонансные частоты лежат в области плазмоники, где ДП металла уже не является большой по модулю.

Рассмотрим схематично более строгую постановку рассматриваемой задачи. Скалярная периодическая ФГ для кубического ФК имеет вид

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{d^3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\mathbf{K}_{lmn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))}{\mathbf{K}_{lmn}^2 - k_0^2\varepsilon}. \tag{11}$$

Ее можно представить в разных видах, в том числе как периодически продолженную ФГ $G(\mathbf{R}) = |4\pi\mathbf{R}|^{-1}\exp(-ik\mathbf{R})$ с множителем $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}d)$, где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – трехмерный вектор номера ячейки периодичности, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$. Далее будем считать, что поле и плотность тока связаны соотношением $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m(\mathbf{r}) - \varepsilon)\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Фактически это есть избыток тока поляризации в кольце по сравнению с током смещения в диэлектрике, который уже учтен в (11). Вне проволоки $\varepsilon_m(\mathbf{r}) = \varepsilon$, и ток поляризации отсутствует. Для тонкой проволоки понятие ДП металла следует уточнять, но мы этого вопроса здесь не касаемся. Вектор-потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\limits_V \tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV'. \tag{12}$$

Здесь $dV' = d^3r'$ – элемент объема. Поля выражаем в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon)^{-1}[\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{A}(\mathbf{r})]$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Это позволяет выразить поля через тензорные функции Грина и ток [10–14]. Подставляя в (12) выражение для тока через поля и определяя электрическое поле, получаем для него гиперсингулярное ИУ. Вычисляя явно интеграл по бесконечно малому шару около точки истока с использованием формулы Остроградского, получаем сингулярное ИУ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\chi}{3+\chi}p.v.\int\limits_V[\nabla\otimes\nabla + k^2]\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')dV', \tag{13}$$

где $\chi = \varepsilon_m/\varepsilon - 1$. Здесь $\nabla\otimes\nabla$ – матричный оператор с компонентами $\nabla\otimes\nabla_{\alpha\beta} = (\partial/\partial\alpha)(\partial/\partial\beta)$, где α, β пробегают значения x, y, z, а интеграл берется в смысле главного значения по Коши. Можно сформулировать интегродифференциальные уравнения (ИДУ) как относительно электрического, так и магнитного полей, причем нагруженные и ненагруженные поверхностными интегралами. Удобно рассмотреть одноосный ФК из колечек, ориентированных вдоль оси z. При этом задачу достаточно решить для одного колечка в нулевой ячейке. ФГ (11) обеспечивает требуемую периодичность. В случае трех взаимно перпендикулярных колечек в ячейке задача усложняется: необходимо находить самосогласованные токи и поля. В случае сильно разреженного ФК μ_{zz} одноосного ФК может соответствовать изотропной МП. Рассмотрим такой одноосный ФК. Удобно расположить колечко в центре нулевой кубической ячейки и ввести цилиндрическую систему координат. В этой ячейке ФГ $\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ совпадает с $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Решим задачу с этой ФГ, а затем решение просто следует периодически продолжить с учетом фазовых сдвигов. Используем предположения $r \ll a \ll d$. В этом случае можно оставить только одну компоненту тока

$$J_\varphi(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=-M}^{M} J_{\varphi m}(\rho,z)\exp(-im\varphi). \tag{14}$$

Считая, что радиус r существенно меньше скин-слоя, коэффициенты в (13) берем в виде линейных токов $J_{\varphi m} = I_{\varphi m}\delta(\rho - a)\delta(z)$. Согласно формулам (2.64) работы [18], имеем

$$A_\rho(\mathbf{r}) = \int\limits_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')J_\varphi(\mathbf{r}')\sin(\varphi-\varphi')dV',$$

$$A_\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')J_\varphi(\mathbf{r}')\cos(\varphi-\varphi')dV', \tag{15}$$

$$A_z(\mathbf{r}) = 0.$$

Возьмем представление ФГ в цилиндрической системе вида [18]

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-in(\varphi-\varphi'))\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\kappa\rho)J_0(\kappa\rho')\exp(-\sqrt{\kappa^2-k^2}|z-z'|)}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}\kappa d\kappa. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что использование в (14) только одного члена с $m = 0$ приводит к результату $A_\rho = 0$ и

$$A_\varphi = \frac{I_0 a}{2}\int\limits_0^\infty\frac{J_1(\kappa\rho)J_1(\kappa a)\exp(-\sqrt{\kappa^2-k^2}|z|)}{\sqrt{.\kappa^2-k^2}}\kappa d\kappa. \tag{17}$$

При $k = 0$ формула (17) совпадает с (3) и выражается через полные эллиптические интегралы [8]. Здесь $I_{\varphi 0} = I_0$. Компонента E_φ удовлетворяет уравнению

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] + k^2 A_\varphi, \quad (18)$$

но в данном случае квадратная скобка обращается в нуль ($\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$) и имеем $E_\varphi = -iZ_0k_0A_\varphi$. Выполняя это условие, например, при $\rho = a + r$, получим

$$E_\varphi(a+r, 0) = I_0/[i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m-\varepsilon)\pi r^2] = -iZ_0k_0A_\varepsilon(a+r, 0).$$

Это комплексное уравнение для k определяет комплексные резонансные частоты свободных колебаний (плазмонов) в рассматриваемом кольце. Более точное уравнение можно записать, усредняя соотношение $E_\varphi = -iZ_0k_0A_\varphi$ по сечению проволоки или ее периметру [10–14]. Если учесть несколько членов в (14), то получим систему уравнений, равенство нулю определителя которой и даст несколько первых резонансных частот. Простую модель для локализованных плазмонных резонансов в одиночном кольце можно получить, если считать, что вдоль периметра кольца укладывается целое число замедленных поверхностных плазмонов, существующих на границе металла и диэлектрика. Это дает $k_p^2/k_{0m}^2 = (\varepsilon_L+\varepsilon) + \varepsilon k_p^2 a^2/[m^2(\varepsilon_L+\varepsilon)]$. Здесь $k_p = \omega_p/c$ – плазменное волновое число, k_{0m} – волновое число резонанса номера m. Считается, что второй член меньше единицы, что ограничивает радиус кольца: $a < 20$ нм.

Рассмотрим член $J_{\varphi m}\exp(-im\varphi)$ в (14). Интегрирование с ним по углу в (15) уничтожает сумму и дает множитель $J_{\varphi m}\exp(-im\varphi)[J_{m+1}(\kappa\rho)J_{m+1}(\kappa\rho') + J_{m-1}(\kappa\rho)J_{m-1}(\kappa\rho')]/4$ в выражении для A_φ и множитель $J_{\varphi m}\exp(-im\varphi)[J_{m+1}(\kappa\rho)J_{m+1}(\kappa\rho') + J_{m-1}(\kappa\rho)J_{m-1}(\kappa\rho')]/(4i)$ в выражении для A_ρ. Поэтому в общем случае существуют все азимутальные зависимости у этих компонент вектор-потенциала, как и в (14). Для учета периодичности воспользуемся периодической ФГ (11), в которой сделаем замену декартовых координат цилиндрическими по методу, изложенному в [18] с использованием выражений комплексных экспонент через цилиндрические функции. В результате получим

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{\substack{l_x=-\infty\\ l_y=-\infty}}^{\infty}\sum_{\substack{n=-\infty\\ m=-\infty}}^{\infty}\frac{(-i)^n(i)^m\exp(-i[n(\alpha_{l_xl_y}-\varphi) - m(\alpha_{l_xl_y}-\varphi') + k_{l_z}(z-z')])J_n(\kappa_{l_xl_y}\rho)J_m(\kappa_{l_xl_y}\rho')}{d^3(\mathbf{K}^2_{l_xl_yl_z} - k_0^2\varepsilon)}. \quad (19)$$

Здесь $\kappa_{l_xl_y} = \sqrt{k_{l_x}^2 + k_{l_y}^2}$, $k_{l_x} = k_x + 2l_x\pi/d = \kappa_{l_xl_y}\cos(\alpha_{l_xl_y})$, $k_{l_y} = k_y + 2l_y\pi/d = \kappa_{l_xl_y}\sin(\alpha_{l_xl_y})$, $k_{l_z} = k_z + 2l_z\pi/d$. Эту пятикратную сумму можно преобразовать, приближенно заменяя двойную сумму по индексам поперечных компонент на интеграл по $d\alpha_{l_xl_y}$ в пределах $(0, 2\pi)$ и по $d\kappa_{l_xl_y}$ в пределах $(0, \infty)$. Вычисляя интегралы, получим

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \approx \frac{1}{4id}\sum_{\substack{n=-\infty\\ l_z=-\infty}}^{\infty}\exp(-i[n(\varphi-\varphi') + k_{l_z}(z-z')])\Phi_n(\rho,\rho'). \quad (20)$$

Здесь $\Phi_{nl_z}(\rho,\rho') = H_n^{(2)}(\kappa_{l_z}\rho')J_n(\kappa_{l_z}\rho)$ для $\rho < \rho'$ и $\Phi_{nl_z}(\rho,\rho') = J_n(\kappa_{l_z}\rho')H_n^{(2)}(\kappa_{l_z}\rho)$ для $\rho > \rho'$, $\kappa_{l_z} = \sqrt{k_0^2 - k_{l_z}^2}$. Эта ФГ применима только к одной рассматриваемой ячейке. Используя (19) в приближении азимутально независимых J_φ и E_φ, из условия $E_\varphi = -iZ_0k_0A_\varphi$ получаем

$$\frac{2\pi^2ak_0^2r^2(\varepsilon_m-\varepsilon)}{d^3}\sum_{l_x=-\infty}^{\infty}\sum_{l_y=-\infty}^{\infty}\sum_{l_z=-\infty}^{\infty}\frac{J_1(\kappa_{l_xl_y}(a+r))J_1(\kappa_{l_xl_y}a)}{\mathbf{K}^2_{l_xl_yl_z} - k_0^2\varepsilon} = 1. \quad (21)$$

Это простейшее ДУ для определения зависимости $\omega = \omega(\mathbf{k})$ для ФК из проволочных колец. Находим компоненту магнитного поля

$$H_z = I_0\Psi(\rho,z) = \frac{2\pi I_0 a}{d^3}\sum_{l_x=-\infty}^{\infty}\sum_{l_y=-\infty}^{\infty}\sum_{l_z=-\infty}^{\infty}\exp(-ik_{l_z}z)\frac{\kappa_{l_xl_y}\rho)J_1(\kappa_{l_xl_y}a)}{\mathbf{K}^2_{l_xl_yl_z} - k_0^2\varepsilon}. \quad (22)$$

Эту компоненту надо усреднить по ячейке периодичности. В нашем случае формулы (22) имеем

$$\langle\exp(-ik_{l_z}z)\rangle = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}\exp\exp(-ik_{l_z}z)dz = \frac{2}{dk_{l_z}}\sin(k_{l_z}d/2) = \mathrm{sinc}(k_{l_z}d/2),$$

$$\langle J_0(\kappa_{l_x l_y}\rho)\rangle = \frac{1}{d^2}\int\limits_{-d/2}^{d/2}\int\limits_{-d/2}^{d/2} J_0(\kappa_{l_x l_y}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \langle J_{0l_x l_y}\rangle.$$

Более удобен для усреднения вид ФГ (11), поскольку для него все интегралы вычисляются через функцию sinc. Теперь $\langle H_z\rangle = I_0\langle\Psi\rangle$, $\langle P_z^m\rangle = \mu_0\mu_{zz}I_0\pi r^2/d^3$, $\mu_{zz}(1-\pi r^2/(d^3\langle\Psi\rangle)) = 1$ и окончательно

$$\mu_{zz}^{-1} = 1 - \frac{1}{2\sum\limits_{l_x=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l_y=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l_z=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(k_{l_z}d/2)\frac{\kappa_{l_x l_y}a\langle J_{0l_x l_y}\rangle J_1(\kappa_{l_x l_y}a)}{r^2(\mathbf{K}^2_{l_x l_y l_z}-k_0^2\varepsilon)}}. \tag{23}$$

Мы не приводим более удобный для вычислений вид (23) на основе ФГ (11). При $k_0 = 0$ и всех нулевых индексах член в трехмерной сумме имеет вид

$$\operatorname{sinc}(k_z d/2)\frac{a\sqrt{k_x^2+k_y^2}\langle J_{000}\rangle J_1(a\sqrt{k_x^2+k_y^2})}{r^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2-k_0^2\varepsilon)} =$$

$$= \operatorname{sinc}(k_z d/2)\frac{a\sqrt{k_x^2+k_y^2}\langle J_{000}\rangle J_1(a\sqrt{k_x^2+k_y^2})}{r^2(\mu_{zz}-1)(k_0^2\varepsilon-k_z^2)}. \tag{24}$$

Здесь мы использовали уравнение Френеля (10). Вклад (24) в сумму максимальный. При $k_0\to 0$ и $\mu_{zz}\to 1$ значение величины (24) очень большое положительное, т.е. действительно $\mu_{zz}\to 1$, и при этом $\mathbf{k}^2\to k_0^2\varepsilon$ (что дает численное решение ДУ (21)). К сожалению, полученная очень простая модель не дает ответ на вопрос, сверху или снизу к единице идет стремление при $k_0\to 0$, хотя оценка ряда (23) дает небольшой парамагнетизм. Необходима полная трехмерная модель на основе ИУ (13) с учетом всех компонент и многих членов разложения. В такой модели существенны потери, которые в данной модели определяет ДУ (21). Наиболее просто построить модель для квадратной проводящей рамки с квадратным сечением проволоки, что не требует перехода между системами координат.

В заключение отметим, что метаматериалы из проводящих колец на низких частотах могут демонстрировать наведенный диамагнетизм, а в ФК и слабый парамагнетизм. При этом их МП близка к единице, поэтому ответ на вопрос о характере магнетизма зависит от точности модели. Аналогичный результат – диамагнетизм малых металлических шариков, включенных в кубическую решетку, приведен в [19, 20]. При повышении частоты с приближением к резонансным областям метаматериал нельзя описать как изотропную и однородную ИС. В ней существенна ПД, т.е. зависимость $\hat{\mu}(\omega(\mathbf{k})$ [15]. В общем случае тензор $\hat{\mu}(\omega,\mathbf{k})$ можно привести к диагональному виду. Однако в резонансной области ИС из колечек корректно может быть описана только тензором $\hat{\varepsilon}(\omega,\mathbf{k})$ [15] с матрицей

$$\hat{\varepsilon}(\omega,\mathbf{k}) = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Именно, гомогенизацию для микротоков $\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{M}$ с одной стороны можно выполнить, перенося $\mathbf{J}$ в левую часть микроскопического уравнения Максвелла [6], т.е. внося вектор $-\mathbf{M}$ под знак ротора и считая $\langle\nabla(\mathbf{H}-\mathbf{M})\rangle = \mu_0^{-1}\langle\mathbf{B}\rangle$, т.е. $\mu_0^{-1}\nabla\times\langle\mathbf{B}\rangle = i\omega\varepsilon_0\mathbf{D}$, где $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. При этом второе уравнение имеет вид $\nabla\times\langle\mathbf{E}\rangle = -i\omega\mu_0\mathbf{H}$. Поскольку в нашем случае $\mathbf{M} = \mathbf{z}_0 M_z$, $\mathbf{J} = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m-\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}_0 E_\varphi$, это приводит к тензору (9). С другой стороны, можно оставить $\mathbf{J}$ в правой части, считая, что $\langle\mathbf{D}\rangle = \varepsilon_0\varepsilon\langle\mathbf{E}\rangle + \langle(\varepsilon_m-\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}_0 E_\varphi\rangle$, что дает ДП (25). Учитывая связь компонент векторов в цилиндрической и декартовой системах координат и выражение $\mathbf{E}$ с помощью ФГ (19), получим для усредненных компонент вектора электрической поляризации соотношения:

$$\langle P_x^e/\varepsilon_0\rangle - \varepsilon\langle E_x\rangle =$$
$$= \langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_x\sin^2(\varphi)\rangle - \langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_y\sin(\varphi)\cos(\varphi)\rangle,$$
$$\langle P_y^e/\varepsilon_0\rangle - \varepsilon\langle E_y\rangle =$$
$$= \langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_y\cos^2(\varphi)\rangle - \langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_x\sin(\varphi)\cos(\varphi)\rangle.$$

В силу однородности системы уравнений все усредненные величины в правых и левых частях пропорциональны току: $\langle E_x\rangle = I_0\alpha_x$, $\langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_x\sin^2(\varphi)\rangle = I_0\beta_{xx}$, $\langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_y\sin(\varphi)\cos(\varphi)\rangle = I_0 = \beta_{xy}$, $\langle E_y\rangle = I_0\alpha_y$, $\langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_y\cos^2(\varphi)\rangle = I_0\beta_{yy}$, $\langle(\varepsilon_m-\varepsilon)E_x\sin(\varphi)\cos(\varphi)\rangle = I_0\beta_{yx}$. Введенные коэффициенты можно вычислить в общем случае для разложения (14), причем левые части соотношений усредняются по всему объему ячейки, а правые – только по объему кольца, т.е. по тору. Тогда имеем результат гомогенизации: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon + \beta_{xx}/\alpha_x$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon + \beta_{yy}/\alpha_y$, $\varepsilon_{xy} = -\beta_{xy}/\alpha_y$, $\varepsilon_{yx} = -\beta_{yx}/\alpha_x$. Нетрудно проверить, что в общем случае $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, а в данном случае $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$ и $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$. Квадрупольная и высшие мультипольные компоненты тока в (19) дают вклад в диагональные и недиагональные члены тензора ДП (25).

В связи со сказанным крайне осторожно следует относится к результатам, в которых получены магнитные свойства метаматериалов из включений диэлектрических тел (резонаторов), и особенно, если при этом МП отрицательная [21], поскольку корректно ввести МП в ФК можно только на низких частотах вдали от резонансов, где $\mu \approx 1$. Для необыкновенной волны в одноосном ФК вместо (10) можно записать уравнение Френеля в виде $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\varepsilon/\varepsilon_{xx} = k_0^2\varepsilon$. Чтобы уравнения совпадали, необходимо $\mu_{zz} = \varepsilon/\varepsilon_{xx}$ и $\varepsilon\mu_{zz} = \varepsilon$, т.е. $\mu_{zz} = \varepsilon_{xx} = 1$, что возможно только в пределе $k_0 \to 0$. Для рассмотренного тензора ДП (25) при $k_z = 0$ имеем ДУ $k_x^2 + k_y^2 = k_0^2\varepsilon$ для обыкновенной волны и $k_x^2+k_y^2 = k_0^2(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{xy}^2/\varepsilon_{xx})-2k_xk_y\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx}$ для необыкновенной волны. В резонансной области расчеты рис. 1 для идеально проводящих колец дают замедление, что может быть, если $\varepsilon_{xx} > \varepsilon$. Однако в резонансной области ДП металла нельзя считать очень большой по модулю отрицательной мнимой величиной. Более того, в области плазмоники она может быть отрицательной действительной с малой или даже большой отрицательной мнимой частью, при этом гомогенизация может привести к значению $\varepsilon_{xx} < 0$. Если при этом $\varepsilon_{xx}^2 > \varepsilon_{xy}^2$, то волна вдоль оси x затухает, возбуждая плазмоны. Такую ИС при $\varepsilon'_{xx} < 0$ и малых ε''_{xx} и ε_{xy} можно рассматривать как гиперболический метаматериал, т.е. метаматериал, поддерживающий волны с большими значениями компонент волнового вектора [22].

1. J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, IEEE Tran. MTT **47**, 2075 (1999).
2. A. N. Lagarkov and A. K. Sarychev, Phys. Rev. B **53**, 6318 (1996).
3. С. Г. Тиходеев, Н. А. Гиппиус, УФН **179**(9), 1003 (2009).
4. А. Н. Лагарьков, А. К. Сарычев, УФН **179**(9), 1018 (2009).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, т. 8. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982), 624 с.
6. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, *Электромагнетизм и электромагнитные волны*, Высшая школа, М. (1985).
7. Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов, *Электромагнитные поля и волны*, Советское радио, М. (1971).
8. И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Наука, М. (1989).
9. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, Физматлит, М. (2009).
10. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, ЖТФ **83**(8), 90 (2013).
11. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, ЖТФ **82**(12), 79 (2012).
12. М. В. Давидович, Ю. В. Стефюк, П. А. Шиловский, ЖТФ **82**(3), 7 (2012).
13. М. В. Давидович, П. А. Шиловский, Гетеромагнитная электроника **13**, 45 (2012).
14. М. В. Давидович, И. С. Нефедов, ЖЭТФ **145**(5), 771 (2014).
15. В. М. Агранович, Ю. Н. Гартштейн, УФН **176**(10), 1051 (2006).
16. А. П. Виноградов, УФН **172**(3), 363 (2002).
17. Ю. А. Кругляк, *Наноэлектроника "снизу–вверх"*, Издательство Стрельбицкого, Киев (2016).
18. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, *Возбуждение электромагнитных волн*, Радио и связь, М. (1983).
19. Л. Левин, *Современная теория волноводов*, Изд-во иностранной литературы, М. (1954).
20. L. Lewin, Proc. Inst. Electr. Eng. **94**, 65 (1947).
21. I. Vendik, O. Vendik, I. Kolmakov, and M. Odit, Opto-Electron. Rev. **14**(3), 179 (2006).
22. S. V. Zhukovsky, A. V. Lavrinenko, and J. E. Sipe, Proc. of SPIE **8915**, 891512-2 (2013).