Квантовое и классическое биномиальные распределения для статистики переноса электронов в когерентном проводнике

Г. Б. Лесовик[+1)], *Н. М. Щелкачев*[+*1)]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117940 Москва, Россия*

[*]*Институт физики высоких давлений РАН, 142092 Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 февраля 2003 г.

Обсуждаются противоречивые результаты для статистики переноса заряда в квантовых проводниках. Показано, что корреляторы высоких порядков, определенные из полученных ранее квантовой и классической биномиальных функций распределения для электронов в квантовом проводнике могут быть измеримыми величинами при различных способах измерения. Измеримые старшие корреляторы заряда (начиная с коррелятора третьего порядка) при различных процедурах измерения оказываются различными (в отличие от среднего заряда и парного коррелятора, которые мало чувствительны к способу измерения) из-за специфической зависимости старших корреляторов токов от частоты на масштабах порядка обратного времени пролета от точки измерения до области рассеяния.

PACS: 05.60.Gg

В последние годы в изучении электронного транспорта в квантовых проводниках появилась новая тематика – описание статистики переноса заряда. Как правило, исследуются функции распределения для заряда Q_{t_0}, протекшего за большое время t_0 через определенное сечение проводника, причем, что существенно, все величины вычисляются из первых принципов. Несмотря на заметное количество статей (см. обзор [1]) и полученные результаты, ряд вопросов, в особенности касающихся теории измерений, все еще остается неясным. Одна из проблем состоит в том, что в квантовом случае, в отличие от классического, возникает вопрос – как определить величину, которую следует вычислять. Технически такая неопределенность связана с некоммутативностью операторов тока при различных временах. Как оказывается, можно предъявить несколько определений для функции распределения (ФР) и характеристической функции (ХФ), которые: а) в классическом случае совпадают, б) удовлетворяют некоторым общим принципам (в частности, корреляторы $\langle Q_{t_0}^n\rangle$ оказываются действительными величинами), но при вычислении в квантовом случае приводят к разным ответам. Ответить на вопрос, какое определение "правильное" можно только рассмотрев конкретные схемы измерения, хотя бы модельные.

В данной работе мы рассмотрим некоторые варианты измерений и соответствующих определений ХФ, и прокомментируем полученные ранее результаты. В первой работе, посвященной микроскопическому описанию функции распределения [2] было принято следующее определение для ХФ:

$$\chi(\lambda) = \left\langle \exp\{i\lambda \hat{Q}(t_0)\}\right\rangle = \left\langle \exp\left\{ i\lambda \int_0^{t_0} dt \hat{I}(t)\right\}\right\rangle \tag{1}$$

(здесь $\langle \ldots \rangle$ – усреднение по ансамблю). Это определение является самым непосредственным обобщением классического определения и отличается лишь заменой величины заряда или тока на соответствующие операторы. При вычислении были рассмотрены большие времена, при которых неприводимые корреляторы $\langle\langle \hat{Q}(t_0)^n\rangle\rangle = \langle\langle \int_0^{t_0} dt_1 ... \int_0^{t_0} dt_n \hat{I}(t_1)\ldots\hat{I}(t_n)\rangle\rangle$, приближенно

$$\langle\langle \hat{Q}(t_0)^n\rangle\rangle = t_0 \langle\langle \hat{I}_0^n \rangle\rangle, \tag{2}$$

где $\langle\langle \hat{I}^n\rangle\rangle_0$ – неприводимый коррелятор токов n-го порядка в пределе нулевых частот. (Неприводимые корреляторы подчиняются соотношению $\langle \exp\{i\lambda\hat{Q}(t)\}\rangle = \exp\{\sum_{n=1}^{\infty}(i\lambda)^n\langle\langle\hat{Q}(t)^n\rangle\rangle/n!\}$.)

Метод вычисления, использованный в [2], можно обобщить для случая конечных температур, и (для нормальных одноканальных проводников) мы получаем

$$\chi(\lambda) = \exp\left\{ t_0 g \int \frac{d\epsilon}{2\pi\hbar} \ln\{(1-n_L)(1-n_R) + n_L n_R + \right. \\ \left. + n_L(1-n_R)\chi_\epsilon(\lambda) + n_R(1-n_L)\chi_\epsilon(-\lambda)\}\right\}, \tag{3}$$

где $\chi_\epsilon(\lambda) = \cos\{\lambda e\sqrt{T(\epsilon)}\} + i\sqrt{T(\epsilon)}\sin\{\lambda e\sqrt{T(\epsilon)}\}$, $g = 2$ – фактор, учитывающий спиновое вырожде-

[1)]e-mail: lesovik@landau.ac.ru, nms@itp.ac.ru

ние, T – прозрачность, а $n_{L,R}$ – числа заполнения в левом, и, соответственно, правом резервуарах. Такое распределение (при $k_BT = 0, eV \neq 0$) мы будем называть *квантовым* биномиальным распределением. В многоканальном случае $\chi(\lambda)$ есть произведение $\Pi_n\chi_n(\lambda)$ характеристических функций $\chi_n(\lambda)$ для *собственных* каналов с эффективными прозрачностями T_n. Функция распределения (3) формально описывает перенос дробного заряда. При косвенных измерениях заряда в твердотельных системах дробный заряд в принципе появляться может, например, в величине дробового шума в условиях дробного квантового эффекта Холла [3]. В нашем случае величина "кванта заряда" $2e\sqrt{T}$ определяется величиной собственного значения оператора тока при условии, что его действие рассматривается на подпространстве одночастичных состояний при заданной энергии $e\sqrt{T} = \pm\langle\pm|\hat{I}(t_0)|\pm\rangle$, где нормированные одночастичные состояния рассеяния $|\pm\rangle$ задаются условием $\langle+|\hat{I}(t_0)|-\rangle = 0$, см. также [2]. При учете логарифмических по времени t_0 поправок к неприводимым корреляторам точное квантование, задаваемое дискретной функцией распределения, по-видимому, сменяется небольшими модуляциями в непрерывной функции распределения. Если ограничиться учетом таких поправок (происходящих от вакуумных флуктуаций) только в парном корреляторе, то функция распределения принимает вид

$$P(Q) = \sum_n P^{(0)}(ne\sqrt{T})\left(\frac{2\pi}{G\hbar\ln\{t_0\omega\}}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\exp\{-(Q-ne\sqrt{T})^2/2G\hbar\ln\{t_0\omega\}\},$$

где $P^{(0)}(ne\sqrt{T})$ – дискретная функция распределения без учета логарифмических поправок, G – кондактанс, ω – характерная частота дисперсии проводимости.

Для коррелятора третьего порядка из (3) получаем:

$$\langle\langle\hat{Q}^3_{t_0}\rangle\rangle = -t_0 g\int\frac{d\epsilon}{2\pi\hbar}e^3T^2(n_L-n_R)\times$$
$$\times\left[\{3[n_L(1-n_R)+n_R(1-n_L)]-1\}-2T(n_L-n_R)^2\right].$$

При малых напряжениях (и не зависящей от энергии прозрачности T) коррелятор пропорционален V^3, при больших V получаем [2]

$$\langle\langle Q^3_{t_0}\rangle\rangle = -2e^3T^2(1-T)\frac{2eVt_0}{h}. \qquad (4)$$

Соответственно, для неприводимого коррелятора токов на нулевых частотах, согласно (2), получаем

$$\langle\langle I^3_0\rangle\rangle = -2e^3T^2(1-T)\frac{2eV}{h}. \qquad (5)$$

Как именно измерять *квантовую* биномиальную ФР и корреляторы типа (4), было не вполне ясно, и в работах [4] было предложено использовать в качестве счетчика прошедших электронов спин, расположенный вблизи провода. При этом оказывается, что определение для ХФ, возникающее при таком описании, отличается от (1) наличием упорядочивания по времени

$$\chi(\lambda) = \left\langle\widetilde{T}\exp\left\{i\lambda/2\int_0^{t_0}\hat{I}(t)dt\right\}T\exp\left\{i\lambda/2\int_0^{t_0}\hat{I}(t)dt\right\}\right\rangle, \qquad (6)$$

где T означает упорядочение по времени в порядке возрастания справа налево, а $\widetilde{T}$ – слева направо.

Для коррелятора протекшего заряда третьего порядка с помощью ХФ (6) в работах [4, 5] (см. также ссылки на более поздние работы в [1]) получено

$$\langle\langle Q^3_{t_0}\rangle\rangle = e^3T(1-T)(1-2T)\frac{2eVt_0}{h}. \qquad (7)$$

Как видим, корреляторы третьего порядка (4) и (7) существенно отличаются. Казалось бы, в таком различии нет ничего неожиданного, поскольку определения (1) и (6) различны. Дело, однако, в том что, например, для коррелятора третьего порядка заряда оба определения (1) и (6) фактически содержат неприводимый коррелятор токов на малых частотах, а такой коррелятор в пределе нулевой частоты (5) вычислен с помощью первого определения (1) правильно, и это можно проверить независимо, используя ту же технику, что была использована в [6] для вычисления парного коррелятора[2)]. Как оказывается, дело тут в том, что неприводимый коррелятор токов третьего порядка обладает дисперсией на малых частотах (которая отсутствует у парного коррелятора), которая, вместе с особенностями определений корреляторов, и приводит (в зависимости от постановки эксперимента, см. ниже) к различным ответам. Действительно, при частотах $\omega \ll eV/\hbar$ (характерная частота зависимости, при больших частотах, от $\omega_{1,2}$ — $eV/\hbar$) и $x_{1,2,3} > 0$ имеем

$$\langle\langle I_{\omega_1}(x_1)I_{\omega_2}(x_2)I_{\omega_3}(x_3)\rangle\rangle = 2\pi\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\times$$
$$\times T(1-T)e^{i\omega_1x_1/v_F+i\omega_2x_2/v_F+i\omega_3x_3/v_F}\times$$
$$\times[1-2T-e^{-2i\omega_2x_2/v_F}]eV\frac{2e^3}{h}. \qquad (8)$$

[2)]Заметим, что квантовая ФР (3) может служить *математически* точной производящей функцией для неприводимых корреляторов тока любого порядка при нулевых частотах. При этом связь корреляторов токов с корреляторами зарядов дается формулой (2).

При $x_1 = x_2 = x_3 = x$

$$\langle\langle I_{\omega_1}(x) I_{\omega_2}(x) I_{\omega_3}(x)\rangle\rangle = 2\pi\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3)T(1-T)\times \times [1-2T-e^{-2i\omega_2 x/v_F}]eV\frac{2e^3}{h}. \quad (9)$$

Формально считая, что такая зависимость от частоты справедлива при всех частотах, для временны́х корреляторов получаем

$$\langle\langle I(t_1,x)I(t_2,x)I(t_3,x)\rangle\rangle = = eV\frac{2e^3}{h}T(1-T)\mathrm{Sym}\Big([1-2T]\delta(t_i-t_j)\times \times\delta(t_j-t_k) - \delta(\widetilde{t}_i-\widetilde{t}_j)\delta(\widetilde{t}_j-\widetilde{t}_k)\Big), \quad (10)$$

где символ Sym подразумевает симметризацию по индексам $i \neq j \neq k$; $\widetilde{t}_2 \equiv t_2 + 2x/v_F$, $\widetilde{t}_1 = t_1$, $\widetilde{t}_3 = t_3$. (При учете реальной частотной зависимости вместо дельта-функций должны стоять функции, спадающие на характерных временах[3] $t \sim \tau_0$, но для наглядности мы проведем анализ для дельта-функций.) Подставляя это выражение в выражение для коррелятора зарядов третьего порядка, следующее из (6),

$$\langle\langle Q_T^3\rangle\rangle = \frac{3}{4}\left[\int_0^T dt_1\int_0^T dt_2\int_0^{t_2} dt_3 + + \int_0^T dt_2\int_0^{t_2} dt_1\int_0^T dt_3 + \int_0^T dt_1\int_0^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} dt_3 + + \int_0^T dt_3\int_0^{t_3} dt_2\int_0^{t_2} dt_1\right]\langle\langle I(t_1)I(t_2)I(t_3)\rangle\rangle, \quad (11)$$

и интегрируя, при конечном x получаем ответ (7), пропорциональный $T(1-T)(1-2T)$, что характерно для *классического* биномиального распределения (такое же явление имеет место и для других неприводимых старших корреляторов).

Это происходит потому, что слагаемые в формуле (10), содержащие δ-функции, зависящие от $\widetilde{t}_i$, не дают вклада в ответ, так как они не равны нулю только когда одновременно и $t_3 > t_2$ и $t_1 > t_2$ (в меру того что из первой δ-функции в выражении следует $t_1 = t_3$), а области интегрирования для коррелятора третьего порядка в (11) не покрывают такого сектора в объеме $0 < t_1 < T, 0 < t_2 < T, 0 < t_3 < T$. Действительно, рассмотрим, например, вклад в коррелятор $\langle\langle Q_T^3\rangle\rangle$ от слагаемого в (10), пропорционального

$$\delta(\widetilde{t}_1-\widetilde{t}_3)\delta(\widetilde{t}_3-\widetilde{t}_2) = \delta(t_1-t_3)\delta(t_3-t_2-2x/v_F). \quad (12)$$

Отсюда следует, что основной вклад в интегралы в (11) должна вносить область $t_1 \approx t_3 \approx t_2 + 2x/v_F$. Но ввиду условия $x > 0$ отсюда следует, что $t_3 > t_2$ и $t_1 > t_2$. Область, определяемая этими параметрами, не входит в область интегрирования в (11); значит, вклад (12) в $\langle\langle Q_T^3\rangle\rangle$ равен нулю. Аналогично можно показать, что вообще все члены в уравнении (10), пропорциональные $\mathrm{Sym}\,\delta(\widetilde{t}_i-\widetilde{t}_j)\delta(\widetilde{t}_j-\widetilde{t}_k)$, при конечном $x > 0$ не дают вклад в $\langle\langle Q_T^3\rangle\rangle$.

Можно сказать, что при условиях, когда волновой пакет сначала полностью проходит через измеритель и лишь затем, с задержкой по времени, через измеритель проходит обратно отраженная от барьера часть пакета, специфическая квантовая интерференция исчезает и верен ответ (7). Если же расстояние до измерителя невелико, то в области измерения падающий волновой пакет интерферирует с отраженным, что приводит в конечном счете к ответу (4). Итак, ответ (7) верен, пока время пролета от рассеивателя до спина измерителя, находящегося на расстоянии d от провода и L от рассеивателя больше, чем время затухания корреляторов τ_0. При невыполнении этих условий ответ изменится. В вычислении же [4], хотя формально принимается, что расстояние L равно нулю, фактически, поскольку размер волновых пакетов эффективно также принят равным нулю, рассмотрен предел, когда расстояние L конечно и больше, чем размер волнового пакета.

Для случая, когда спин измеритель расположен вблизи рассеивателя $x \ll v_F\tau_0$ и близко к проводу $d \ll v_F\tau_0$, ответ для $\langle\langle Q_{t_0}^3\rangle\rangle$ пропорционален $-T^2(1-T)$, и совпадает с ответом, задаваемым квантовым распределением (4). Действительно, используя общее выражение для коррелятора (8) при $x_{1,2,3} \ll v_F\tau_0$, получаем

$$\langle\langle I_{\omega_1}(x_1)I_{\omega_2}(x_2)I_{\omega_3}(x_3)\rangle\rangle \simeq \simeq -2\pi\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3)2T^2(1-T)eV\frac{2e^3}{h}. \quad (13)$$

Используя это выражение при $\omega \ll eV/\hbar$ и определение (11), получаем выражение для $\langle\langle Q_{t_0}^3\rangle\rangle$, пропорциональное $-T^2(1-T)$, как и в вычислении с использованием ХФ (1).

Схема измерений со спином в принципе может быть реализована на практике с помощью мюонов, которые могут быть захвачены вблизи проводника, а затем, после их распада, по направлению распада измеряется угол поворота спина в магнитном поле. В качестве дополнительного примера схемы измерения, которую в принципе можно реализовать практически, мы проанализировали схему измерения неприводимых корреляторов заряда с помощью ампермет-

[3] Характерное время затухания корреляторов можно оценить как $\tau_0 \sim \hbar/eV$. Более подробно временную зависимость корреляторов мы рассмотрим в отдельной статье.

ра, представляющего собой квазиклассическую систему (например, колебательный контур), слабо взаимодействующую с током в квантовом проводнике. Состояние амперметра характеризуется величиной ϕ. Взаимодействие амперметра с квантовым проводником описывается гамильтонианом взаимодействия $H_i = \lambda\phi\hat{I}(t)$, где λ – константа взаимодействия, $\hat{I}(t)$ – оператор тока в квантовом проводнике, $\hat{I}(t) = \int \hat{I}(t,x)f(x)dx$ (мы не учитываем эффектов запаздывания), при этом область интегрирования определяется некоторым ядром $f(x)$. Корреляторы ϕ выражаются через корреляторы токов в квантовом проводнике следующим образом:

$$\langle\langle(\phi(t))^n\rangle\rangle = \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^n \int_c d\tau_1 \ldots d\tau_n \times \\ \times \kappa(|t-\tau_1|)\mathrm{sign}(t-\tau_1) \ldots \kappa(|t-\tau_n|)\mathrm{sign}(t-\tau_n) \times \\ \times \langle\langle T_c I(\tau_1) \ldots I(\tau_n)\rangle\rangle, \tag{14}$$

где интегрирование ведется по стандартному келдышевскому контуру; $\kappa(\tau)$ – восприимчивость амперметра. В частном случае, когда амперметр представляет собой осциллятор, уравнение движения ϕ: $\ddot{\phi} + \gamma\dot{\phi} + \Omega^2\phi = \lambda I(t)/M$, восприимчивость $\kappa(t) = \Theta(t)\exp(-\gamma t/2)\sin(\widetilde{\Omega}t)/M\widetilde{\Omega}$, где $\widetilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2/4}$. Наиболее интересен случай $\gamma \approx 2\Omega$, $\gamma \ll 1/\tau_0$. Тогда

$$\langle\langle\phi^3(0)\rangle\rangle \approx \langle\langle I_0^3\rangle\rangle\lambda^3 \int \frac{d\omega_{1,2,3}}{(2\pi)^3}\kappa(\omega_1)\kappa(\omega_2)\kappa(\omega_3) \times \\ \times \delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3) = \frac{2}{27}\frac{\langle\langle I_0^3\rangle\rangle\lambda^3}{M^3\Omega^4}, \tag{15}$$

$$\langle\langle\phi^n(0)\rangle\rangle \approx \frac{n!}{n^{n+1}}\frac{\langle\langle I_0^n\rangle\rangle\lambda^n}{M^n\Omega^{n+1}}, \tag{16}$$

где $\langle\langle I_0^n\rangle\rangle$ – неприводимый коррелятор токов n-го порядка, определяемый квантовым биномиальным распределением. (Вкладом собственных шумов амперметра в (16) мы пренебрегли.)

Таким образом, измеряя *неприводимые* корреляторы координаты ϕ амперметра, можно измерять неприводимые корреляторы токов высоких порядков в пределе нулевых частот (в частности, $\langle\langle I_0^3\rangle\rangle \propto \propto -T^2(1-T)$). Такие измерения возможны и при более слабых условиях на частоты амперметра, если ядро $f(x)$ определяет область интегрирования так, что $x \ll v_F\tau_0$. В обратном пределе следует ожидать “классических” ответов для корреляторов (в частности, $\langle\langle I_0^3\rangle\rangle \propto T(1-T)(1-2T)$).

Мы благодарны М. Резникову и Д. Иванову за обсуждения. Именно Д. Иванов обратил наше внимание на особую координатную и частотную зависимости корреляторов третьего порядка, которая оказалась принципиально важной для рассмотрения различных режимов измерения. Мы также благодарны М. Фейгельману за полезные замечания по тексту статьи.

Работа поддержана Фондом содействия отечественной науке, Российским фондом фундаментальных исследований, Российским министерством науки (проект “Физика квантовых вычислений”), SNF (Швейцария).

1. L. S. Levitov, cond-mat/0210284.
2. Л. С. Левитов, Г. Б. Лесовик, Письма в ЖЭТФ **55**, 534 (1992).
3. C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **72**, 724 (1994); L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997); R. de-Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum et al., Nature **389**, 162 (1997).
4. L. S. Levitov and G. B. Lesovik, cond-mat/ 9401004; L. S. Levitov, H. W. Lee, and G. B. Lesovik, J. of Math. Phys. **37**, 4845 (1996).
5. Л. С. Левитов, Г. Б. Лесовик, Письма в ЖЭТФ **58**, 225 (1993).
6. Г. Б. Лесовик, Письма в ЖЭТФ **49** , 513 (1989).