

ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

А.С.Ломов, М.И.Рабинович

Предложена модель двухкомпонентного нелинейного поля, описывающая самофокусирование трехмерных устойчивых локализованных структур. С помощью компьютерного эксперимента установлены простейшие такие структуры – “элементарные частицы”, с помощью связанных состояний которых образуются произвольные устойчивые локализованные решения.

1. Поиски частицеподобных решений для нелинейных полей интенсивно ведутся уже достаточно давно и тем не менее примеры устойчивых локализованных решений к настоящему времени единичны. Принципиальное продвижение в этом направлении было связано с открытием солитонов. Однако статические устойчивые солитоны реализуются лишь в одномерной ситуации. Долгоживущие двух- и трехмерные солитоны, как правило, нестационарны^{1, 2}. Можно ожидать, что трехмерные уединенные статические решения должны устойчиво существовать в рамках нелинейных уравнений поля, описывающих процессы в неравновесных диссипативных средах. В подобных средах, как известно, наблюдаются самоформирующиеся устойчивые пространственные решетки. Это могут быть решетки с квадратными ячейками, подобные сотам и т. п.³⁻⁵. Возникновение и установление таких решеток обычно описывается градиентными уравнениями поля вида $(\partial u_j / \partial t) = -(\delta F / \delta u_j)$ ($\delta F / \delta u_j$ – вариационная производная, а функционал F имеет смысл свободной энергии). Поскольку мы интересуемся уравнениями, допускающими установление статических локализованных структур, подобные уравнения также естественно искать в классе градиентных уравнений поля (или близких к ним, возмущенным таким образом, чтобы возникший за счет возмущения механизм локализации не нарушил аperiodического поведения поля во времени).

В качестве порождающих имеет смысл использовать градиентные уравнения таких полей, которые характеризуются собственным пространственным масштабом (он и определяет период решетки). Обычно наличие такого масштаба связано с сильной пространственной дисперсией, которая в структуре F проявляется присутствием пространственных производных разного порядка. Одним из простейших функционалов такого рода может служить функционал свободной энергии в форме Свифта–Хоенберга

$$F_1 = \int \left(\frac{\alpha}{2} u_1^2 - \frac{\beta}{3} u_1^3 + \frac{1}{4} u_1^4 + \frac{1}{2} [(q^2 + \nabla^2) u_1]^2 \right) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

Слагаемые ∇^2 и ∇^4 описывают диффузию различных порядков, и их совместное действие определяет характерный масштаб решетки, возникающей в неравновесной среде. Индивидуальная ячейка подобной решетки может служить прообразом локализованной статической структуры, однако для этого она должна стать независимой от других ячеек. Такое возможно, если поле вне ячейки будет подавляться каким-либо другим полем, т. е. среда должна быть неоднocomпанентной.

Пусть помимо поля u_1 имеется еще поле u_2 , описываемое функционалом вида

$$F_2 = \int \left(-\frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{4} u_2^4 + \frac{1}{2} D \nabla^2 u_2^2 \right) d\mathbf{r}. \quad (2)$$

Тогда искомые уравнения запишутся в виде ($\zeta, \xi > 0$)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u_1} + \zeta \Phi_1(u_1, u_2), \quad F = F_1 + F_2 \frac{1}{\mu}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta u_2} + \xi' \Phi_2(u_1, u_2).$$

Возмущения $\Phi_1(u_1, u_2)$ и $\Phi_2(u_1, u_2)$ описывают взаимодействие между u_1 и u_2 . Выберем эти функции в виде $\Phi_1 = u_1 u_2$, $\Phi_2 = u_1$, что имеет ясную физическую интерпретацию — в той части пространства, где u_1 отрицательно, поле u_2 также становится отрицательным и подавляет поле u_1 в ближайшей окрестности. В итоге мы приходим к следующей системе уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = [(\xi u_2 - \alpha) - (q^2 + \nabla^2)^2] u_1 + \beta u_1^2 - u_1^3, \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial u_2}{\partial t} = u_2 - \gamma u_2^3 + \xi u_1 + D \nabla^2 u_2, \quad \xi = \xi' \mu. \quad (5)$$

Переменные u_1 и u_2 в этой системе можно интерпретировать, например, как отклонение концентрации вещества (u_1) и температуры (u_2) от равновесных значений в среде, где идет реакция с тепловыделением.

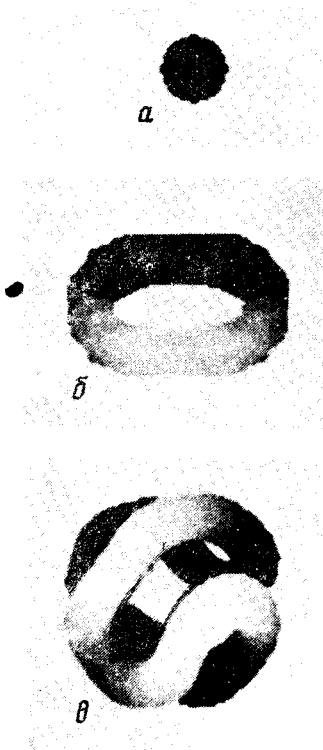


Рис. 1. Элементарные частицы, описываемые уравнениями (4), (5): *a* — шар, *б* — тор, *в* — сферическая решетка. Значения параметров: $\alpha = 0,3$; $\beta = 1$; $\xi = 1$; $\mu = 0,05$; $\gamma = 4$; $D = 0,1$ (здесь и на других рисунках представлено пространственное распределение поверхности $u_1 = \text{const} = 0,4$; значения параметров неизменны)

Имея в виду, что для поля, описываемого функционалом (1), характерно установление, в зависимости от начальных условий, различных пространственных решеток (в том числе и с различными дефектами) — мультистабильность, можно ожидать, что и в предлагаемой модели при одинаковых значениях параметров и различных начальных условиях будут реализовываться различные локализованные структуры. Таким образом представляется важным не только установление факта существования устойчивых частицеподобных решений в системе (4), (5), но и выделение элементарных частиц, образующих при взаимодействии разнообразных связанных состояний.

2. Как показали компьютерные эксперименты, модель (4), (5) действительно описывает самозарождение и устойчивое существование трехмерных частицеподобных решений различ-

ной топологии. Обнаружились три элементарные частицы: шар, тор и сферическая решетка (рис. 1). Их характерные размеры $\sim q$. При подходящих начальных условиях реализовались устойчивые решения в виде связанных состояний элементарных частиц (одинаковых или различных) — рис. 2 и рис. 3.

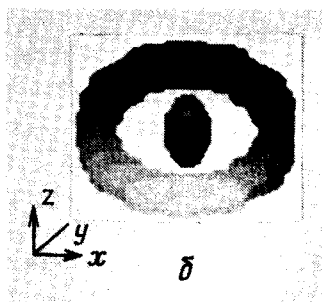
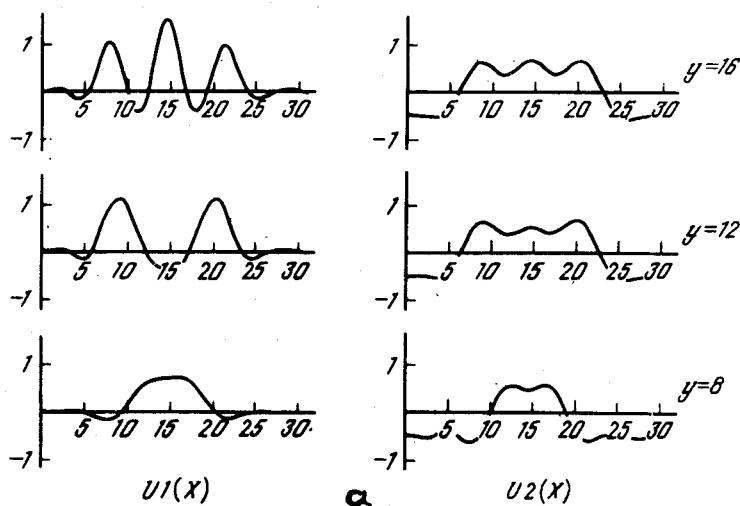
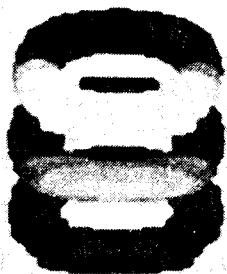


Рис. 2. Распределение полей u_1 и u_2 (а) для связанного состояния "тор-шар" (б)

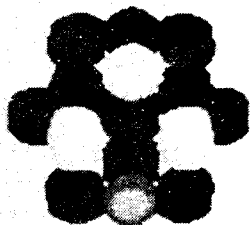
Система решалась прямым разностным методом при граничных условиях $u_1|_S = 0, \frac{\partial u_2}{\partial n}|_S = 0$ в области с размерами $32 \times 32 \times 32$. Контрольные счета проводились с уменьшением шага по времени вчетверо, шага по координатам — вдвое. Счет проводился до выхода системы на стационарное решение, что обычно занимало не более 100 единиц времени. Типичные значения параметров: $\alpha \leq 0,5$; $\beta = 1,5$; $0,05 \leq \mu \leq 0,1$; $\gamma = 4$; $\zeta = 1$; $q = 1$; $\xi = 0,15$; $D = 0,1$ ¹⁾. Обнаружилось, что ориентация элементарных частиц в пространстве произволь-

¹⁾ При больших значениях D и указанных значениях других параметров локализованные структуры расплываются. При $0 < D < D_0$ самоформирование всяких локализованных решений определяется развитием конечномерных возмущений.

на — определяется лишь начальными условиями, а их топология и размеры универсальны и не меняются при изменении граничных условий и размеров области. Подчеркнем, что в определенной области начальных условий нелинейное поле (4), (5) допускает формирование разнообразных структур, непосредственно не являющихся связанными состояниями элементарных частиц, таких, например, как спираль на рис. 4. Однако подобные структуры не являются аттракторами (в данном случае тривиальными — состояниями равновесия) исследуемой системы и при $t \rightarrow \infty$ переходят в связанные состояния элементарных частиц.



a



б



в

Рис. 3. Примеры устойчивых связанных состояний: *a* — три тора, *б* — кластер из шаров, *в* — тор и сферическая решетка с шаром внутри

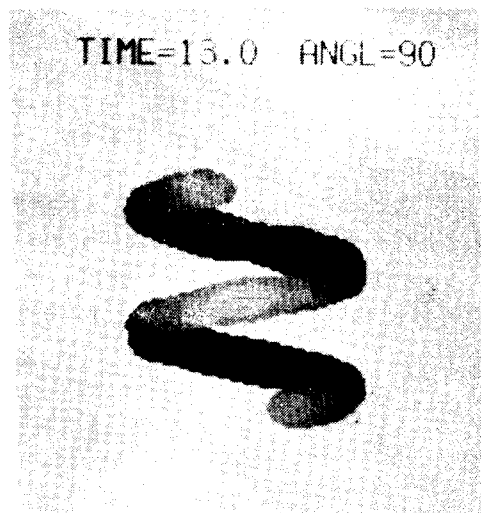


Рис. 4. Метастабильная структура в виде спирали

Подчеркнем в заключение, что физические механизмы, лежащие в основе самоформирования частицеподобных решений трехмерного поля (связанные с характером взаимодействия компонент и пространственной дисперсией) представляются достаточно общими (см. также ^{6, 7}) и могут реализоваться в самых различных неравновесных средах.

Все вычисления проведены на многопроцессорном комплексе ИКИ АН СССР.
Авторы признательны И.С.Арансону, А.В.Гапонову-Грехову, К.А.Горшкову, М.М.Сушкину и
Е.Л.Фейнбергу за плодотворные дискуссии.

Литература

1. *Christiansen P., Lomdahl P., Zabusky N.* Appl. Phys. Lett., 1981, **39**, 170.
2. *Маханьков В.Г.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1983, **14**, 123.
3. *Normand C., Pomeu Y., Velarde M.C.* Rev. Mod. Phys., 1977, **49**, 591.
4. Cellular Structures in Instabilities ed. by J.E.Wesfreid and S.Zaleski, Lect. Notes in Phys. Springer, N.Y., 1984, 210.
5. *Езерский А.Б., Коротин П.И., Рабинович М.И.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **41**, 129.
6. *Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Рабинович М.И.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 224.
7. *Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Осипов Г.В., Рабинович М.И.* Препринт ИПФ АН СССР, № 199, Горький, 1988.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1988 г.