Письма в ЖЭТФ, том 108, вып. 11, с. 749 – 754

Генерирование эффективной фермионной вершины гравитационным инстантоном в решеточной теории гравитации

С. Н. Вергелес[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Московский физико-технический институт, Кафедра теоретической физики, 141707 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 9 сентября 2018 г.

После переработки 22 октября 2018 г.

Показано, что в решеточной гравитации, связанной с фермионами, возникают эффективные фермионные вершины. Эти вершины генерируются гравитационными инстантонами, аналогично тому как возникают эффективные фермионные вершины в теории Янга-Миллса вследствие наличия фермионных нулевых мод, связанных с инстантонами.

DOI: 10.1134/S0370274X18230029

1. Несколько десятилетий тому назад было показано, что в теории Янга–Миллса, связанной с безмассовым дираковским полем возникают эффективные фермионные киральные вершины, локализованные в местах нахождения инстантонов [1–5]. Опишем коротко соответствующую физику. Рассмотрим 4D теорию Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ и связанной с N безмассовыми дираковскими полями Ψ_i, $i = 1, \ldots, N$ (число N считается "ароматом"). Представим амплитуду перехода вакуум–вакуум в евклидовой сигнатуре в форме функционального интеграла по фермионным и калибровочному полю. Классическое чистое уравнение Янга–Миллса имеет нетривиальные топологические решения с конечным действием – инстантонные решения [6]. Далее, безмассовый оператор Дирака на фоне поля инстантона обладает фермионными нулевыми модами, по одной для каждого дираковского поля (если топологический заряд инстантона $q = \pm 1$). Эти нулевые моды локализованы в окрестности инстантона [1, 2, 7]. Дираковские нулевые моды обладают определенной киральностью, зависящей от топологического заряда инстантона $q = \pm 1$. В свою очередь, фермионные нулевые моды генерируют эффективную фермионную киральную вершину. Пусть для определенности инстантон локализован в окрестности точки x и его топологический заряд равен $q = 1$. Тогда эффективная вершина (для сигнатуры Минковского) имеет вид

$$V = \varkappa e^{-8\pi^2/g^2} \det_{st} \left\{ \overline{\Psi}_{sR}(x) \Psi_{tL}(x) \right\}. \qquad (1)$$

[1)] e-mail:vergeles@itp.ac.ru

Здесь индексы $s, t = 1, \ldots, N$ нумеруют "аромат", величина $8\pi^2/g^2$ есть классическое действие инстантона, g – константа взаимодействия в теории Янга–Миллса, и из размерностных соображений можно утверждать, что $\varkappa \sim \rho^{3N-4}$, где ρ – масштаб инстантона. Аргументы, приводящие к результату (1), таковы. Рассмотрим фермионный функциональный интеграл в евклидовой сигнатуре для амплитуды перехода вакуум–вакуум (т. е. в случае нулевых внешних фермионных источников) во внешнем фиксированном калибровочном поле. Этот интеграл пропорционален $\{\det(i\hat{\mathcal{D}})\}$, где $(i\hat{\mathcal{D}})$ – дираковский оператор во внешнем калибровочном поле. Так как в рассматриваемом случае дираковский оператор имеет нулевые собственные значения, то эта амплитуда равна нулю. Теперь введем источники в интеграл, так что дираковская часть действия $S_\Psi = \int \mathrm{d}^{(4)}x\, \Psi^\dagger i\hat{\mathcal{D}}\Psi$ становится равной $S_\Psi = \int \mathrm{d}^{(4)}x\, \Psi^\dagger \{i\hat{\mathcal{D}} + J\}\Psi$. В этом случае фермионный функциональный интеграл дает

$$\det\{i\hat{\mathcal{D}} + J\}, \qquad (2)$$

что не равно нулю, так как наименьшие собственные значения становятся отличными от нуля, они имеют порядок $\sim J$. Так как детерминант не зависит от представления, в котором он вычисляется, то для оценки детерминанта (2) поступим следующим образом. Возьмем регуляризованные фермионные поля в виде разложения

$$\Psi_s(x) = \sum_{|\epsilon_N| < \Lambda} \eta_{sN} \Psi_N(x), \quad i\hat{\mathcal{D}}\Psi_N(x) = \epsilon_N \Psi_N(x), \qquad (3)$$

где величины $\{\eta_{sN}\}$ являются независимыми грассмановыми переменными, описывающими полный набор фермионных степеней свободы, и $\Lambda \longrightarrow \infty$. Фермионные нулевые моды $\Psi_0(x)$ присутствуют в этом разложении. В результате фермионная часть действия записывается как

$$S_\Psi = \sum_{s,t,|\epsilon_N|<\Lambda} \overline{\eta}_{sM}\eta_{tN} \left\{ \int \mathrm{d}^{(4)}x\, \Psi_M^\dagger \left(i\hat{\mathcal{D}} + J_{st} \right) \Psi_N \right\}. \tag{4}$$

Интегрирование в функциональном интеграле по грассмановым переменным $\{\overline{\eta}_{sM}, \eta_{sM}\}$ дает детерминант матрицы по индексам s, M, находящейся в фигурных скобках в (4). В случае $J \longrightarrow 0$ этот детерминант стремится к нулю, причем фактор в детерминанте, определяющий это стремление, определяется вкладом нулевых мод в разложение (3):

$$\sim \det_{st} j_{st}(x),$$
$$j_{st}(x) = \int \mathrm{d}^{(4)}y \Psi_0^{(x)\dagger}(y) J_{st}(y) \Psi_0^{(x)}(y). \tag{5}$$

Символ $\Psi_0^{(x)}(y)$ используется для обозначения нулевой моды, ассоциированной с инстантоном, локализованным вблизи точки x. Величина (5) производит тот же эффект (с точностью до числового множителя), что и функциональный интеграл

$$\int D\Psi^\dagger D\Psi \exp\left\{ \int \mathrm{d}^{(4)}y\, \Psi^\dagger \left(i\hat{\mathcal{D}} + J \right) \Psi \right\} \times$$
$$\times \det_{st} \left\{ \Psi_s^\dagger(x)(1+\gamma^5)\Psi_t(x) \right\}. \tag{6}$$

Если последнее утверждение верно, то генерация инстантоном фермионной вершины (1) установлена. Действительно, во-первых, нулевые собственные моды для всех “ароматов” подходящим образом воспроизводят фермионные пропагаторы, соединяющие точку x с источниками $J(y)$, если $|y-x| \gg \rho$, так как $\Psi_0^{(x)}(y) \sim |y-x|^{-3}$ для $|y-x| \gg \rho$. Во-вторых, выражения (5) и (6) имеют одни и те же квантовые правила отбора, что становится очевидным при корректной калибровочно-инвариантной регуляризации фермионного функционального интеграла. Регуляризация (3) является корректной. В третьих, вычислим смешанную производную N-того порядка от выражения (5) по источникам $J_{1,\sigma(1)}(x), \ldots, J_{N,\sigma(N)}(x)$, где σ есть некая перестановка индексов $t_1, \ldots, t_n \longrightarrow \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_N)$. Результат будет пропорционален $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} \left(\Psi_0^\dagger(x)\Psi_0(x) \right)^N$, причем $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки σ. Такой же результат мы получим, если проинтегрируем вершину в (6) по грассмановым переменным:

$$\int \mathrm{d}\eta_{10}^\dagger \ldots \mathrm{d}\eta_{N0}^\dagger \mathrm{d}\eta_{\sigma(1)0} \ldots \mathrm{d}\eta_{\sigma(N)0} \ldots .$$

Вершина (1) имеет ненулевые матричные элементы только между состояниями, различающимися значением кирального заряда

$$\Delta Q^5 \equiv \int \mathrm{d}^{(4)}x \partial_\mu J^{5\mu} = \int \mathrm{d}^{(4)}x\, \mathcal{A}^5 =$$
$$= 2N \int \mathrm{d}^{(4)}x \sum_{|\epsilon_N|<\Lambda} \Psi_N^\dagger \gamma^5 \Psi_N = 2N \int \mathrm{d}^{(4)}x\, \Psi_0^\dagger \gamma^5 \Psi_0 =$$
$$= 2N. \tag{7}$$

Далее символ $\mathcal{A}^5$ обозначает аксиальную калибровочную аномалию. Выражение (5) также существенно лишь в процессах со свойством (7).

В этом письме изучается модель дискретной гравитации, включающая вейлевское поле, на непериодической “дышащей” решетке. Показано, что в этой модели также возникает эффективная фермионная вершина вследствие существования нулевых фермионных мод, ассоциированных с решеточным гравитационным инстантоном. Эффективная вершина включает лишь вейлевские поля.

Под термином “непериодическая “дышащая” решетка” мы понимаем произвольный симплициальный комплекс, на котором отсутствует понятие “квазиимпульс”, и сильно флуктуируют квантованные переменные $\hat{e}$, Ω, определяющие геометрию.

Здесь следует сделать общее замечание. Нильсен и Ниномийя доказали, что на *любой периодической решетке* (симплициальный комплекс также может быть периодическим) имеет место явление вильсоновского “удвоения” фермионных состояний [8, 9]. “Удвоенные” состояния – это кванты с такими волновыми функциями, квазиимпульсы которых имеют порядок обратного масштаба решетки, т.е. их квазиимпульсы максимальны по величине или соизмеримы с максимально возможными квазиимпульсами. Однако энергии таких квантов малы. Чрезвычайно важно, что на периодических решетках корреляторы “удвоенных” квантов ведут себя аналогично корреляторам обычных длинноволновых квантов. В результате введение вейлевского поля приводит в длинноволновом пределе к фактическому существованию нескольких дираковских полей. Поэтому имеет место утверждение, что на периодических решетках в длинноволновом пределе существуют лишь дираковские (но не вейлевские) фермионные поля.

Однако на непериодических «дышащих» решетках физическая картина качественно изменяется.

Изучаемая модель обладает тем свойством, что в длинноволновом пределе сильные мелкомасштабные флуктуации вымирают, не влияя непосредственно на динамику длинноволновых квантов. Исключительно важным является тот факт, что на масштабах порядка решетки мелкомасштабные квантовые флуктуации приводят к кардинальному изменению корреляторов нерегулярных “удвоенных” фермионных квантов: их парные корреляторы подобны δ-функциям. Это означает, что нерегулярные кванты являются очень быстро затухающими квазичастицами, они не могут распространяться в пространстве-времени. Факты существования нерегулярных “удвоенных” фермионных квантов и указанное поведение их корреляторов в изучаемой теории были установлены в [10].

Из сказанного вытекает следующий вывод: хотя на непериодических “дышащих” решетках также имеет место явление вильсоновского удвоения, в длинноволновом пределе могут отдельно существовать правые или левые вейлевские поля. Нерегулярные “удвоенные” фермионные кванты не могут быть наблюдены непосредственно, они могут влиять лишь косвенно на длинноволновую динамику.

2. Необходимо коротко описать решеточную евклидову модель гравитации, в рамках которой здесь проводится исследование. Детальное изложение этой модели можно найти в работах [10–12]. Здесь используются 4×4 матрицы Дирака γ^a, $a=1,\ldots,4$ в спинорном представлении, так что матрицы γ^5 и $\sigma^{ab}=1/4[\gamma^a,\gamma^b]$ являются диагональной и блочно-диагональными соответственно. Ориентируемый 4-мерный симплициальный комплекс и его вершины обозначаются как $\mathfrak{K}$ и $a_{\mathcal{V}}$, индексы $\mathcal{V}=1,2,\ldots,\mathfrak{N}\to\infty$ и $\mathcal{W}$ нумеруют вершины и 4-симплексы, соответственно. Здесь предполагается, что $\mathfrak{K}\approx\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ в топологическом смысле. Необходимо использовать локальную нумерацию вершин $a_{\mathcal{V}}$, отнесенную к заданному 4-симплексу: все пять вершин 4-симплекса с индексом $\mathcal{W}$ нумеруются как $a_{\mathcal{W}i}$, $i=1,2,3,4,5$. Далее принято, что величины с дополнительным индексом $\mathcal{W}$ относятся к 4-симплексу с индексом $\mathcal{W}$. Символ Леви–Чивита с попарно различными индексами $\varepsilon_{\mathcal{W}ijklm}=\pm 1$ в зависимости от того, задает ли порядок вершин $s^4_{\mathcal{W}}=a_{\mathcal{W}i}a_{\mathcal{W}j}a_{\mathcal{W}k}a_{\mathcal{W}l}a_{\mathcal{W}m}$ положительную или отрицательную ориентацию 4-симплекса $s^4_{\mathcal{W}}$. Элемент группы $\mathrm{Spin}(4)$ и элемент алгебры Клифорда

$$\Omega_{\mathcal{W}ij}=\Omega^{-1}_{\mathcal{W}ji}=\exp\left(\omega_{\mathcal{W}ij}\right),\quad \omega_{\mathcal{W}ij}\equiv\frac{1}{2}\sigma^{ab}\omega^{ab}_{\mathcal{W}ij},$$
$$\hat{e}_{\mathcal{W}ij}=\hat{e}^{\dagger}_{\mathcal{W}ij}\equiv e^a_{\mathcal{W}ij}\gamma^a\equiv-\Omega_{\mathcal{W}ij}\hat{e}_{\mathcal{W}ji}\Omega^{-1}_{\mathcal{W}ij}\qquad(8)$$

приписаны каждому ориентированному 1-симплексу $a_{\mathcal{W}i}a_{\mathcal{W}j}$. Дираковские спиноры $\Psi_{\mathcal{V}}$ и $\Psi^{\dagger}_{\mathcal{V}}$ определены для каждой вершины $a_{\mathcal{V}}$. Используемое представление автоматически реализует разделение полной калибровочной группы на две подгруппы: $\mathrm{Spin}(4)\approx\approx\mathrm{Spin}(4)_{(+)}\otimes\mathrm{Spin}(4)_{(-)}$. Например,

$$\frac{1}{2}\sigma^{ab}\omega^{ab}_{\mathcal{W}ij}=\frac{i\sigma^{\alpha}}{2}\begin{pmatrix}\omega^{\alpha}_{(+)\mathcal{W}ij} & 0\\ 0 & \omega^{\alpha}_{(-)\mathcal{W}ij}\end{pmatrix},$$
$$\omega^{\alpha}_{(\pm)\mathcal{W}ij}\equiv\left\{\pm\omega^{\alpha 4}_{\mathcal{W}ij}+\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\beta\gamma}_{\mathcal{W}ij}\right\}.$$

Рассматриваемое решеточное действие имеет вид

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_g+\mathfrak{A}_{\Psi},$$
$$\mathfrak{A}_g=-\frac{2}{5\cdot 24\cdot l_P^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{i,j,k,l,m}\varepsilon_{\mathcal{W}ijklm}\times$$
$$\times\operatorname{tr}\gamma^5\Omega_{\mathcal{W}mi}\Omega_{\mathcal{W}ij}\Omega_{\mathcal{W}jm}\hat{e}_{\mathcal{W}mk}\hat{e}_{\mathcal{W}ml},$$
$$\mathfrak{A}_{\Psi}=-\frac{1}{5\cdot 24^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{i,j,k,l,m}\varepsilon_{\mathcal{W}ijklm}\times$$
$$\times\operatorname{tr}\gamma^5\hat{\Theta}_{\mathcal{W}mi}\hat{e}_{\mathcal{W}mj}\hat{e}_{\mathcal{W}mk}\hat{e}_{\mathcal{W}ml},$$
$$\hat{\Theta}_{\mathcal{W}ij}=\frac{i}{2}\gamma^a\left(\Psi^{\dagger}_{\mathcal{W}i}\gamma^a\Omega_{\mathcal{W}ij}\Psi_{\mathcal{W}j}-\Psi^{\dagger}_{\mathcal{W}j}\Omega_{\mathcal{W}ji}\gamma^a\Psi_{\mathcal{W}i}\right)\equiv$$
$$\equiv\gamma^a\Theta^a_{\mathcal{W}ij}.\qquad(9)$$

Это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{W}ij}=S_{\mathcal{W}i}\Omega_{\mathcal{W}ij}S^{-1}_{\mathcal{W}j},\quad \tilde{e}_{\mathcal{W}ij}=S_{\mathcal{W}i}\,e_{\mathcal{W}ij}\,S^{-1}_{\mathcal{W}i},$$
$$\tilde{\Psi}_{\mathcal{W}i}=S_{\mathcal{W}i}\,\Psi_{A\,i},\quad \tilde{\Psi}^{\dagger}{}_{\mathcal{W}i}=\Psi^{\dagger}_{\mathcal{W}i}\,S^{-1}_{\mathcal{W}i}$$
$$S_{\mathcal{W}i}\in\mathrm{Spin}(4).$$

В пределе медленно меняющихся полей действие (9) переходит в континуальное действие гравитации в четырехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим некий $4D$ подкомплекс комплекса $\mathfrak{K}$ с тривиальной топологией четырехмерного диска. Реализуем геометрически этот подкомплекс в $\mathbb{R}^4$. В результате каждая вершина подкомплекса приобретает координаты x^{μ}, являющиеся координатами образа вершины в $\mathbb{R}^4$:

$$x^{\mu}_{\mathcal{W}i}=x^{\mu}_{\mathcal{V}}\equiv x^{\mu}(a_{\mathcal{W}i})\equiv x^{\mu}(a_{\mathcal{V}}),\qquad \mu=1,\,2,\,3,\,4.$$

Отсылая читателя за подробными вычислениями к работам [10–15], здесь лишь укажем, что в случае слабых гладких полей дискретное действие (9) переходит в хорошо известное континуальное гравитационное действие

$$\mathfrak{A} = \int \varepsilon_{abcd} \left\{ -\frac{1}{l_P^2} \mathfrak{R}^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{6}\, \Theta^a \wedge e^b \ \wedge e^c \wedge e^d \right\},$$
$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + [\omega_\mu,\, \omega_\nu\,] \equiv \frac{1}{2} \sigma^{ab} \mathfrak{R}^{ab}_{\mu\nu},$$
$$\gamma^a \Theta^a = \gamma^a\, \frac{i}{2}\, \left[\Psi^\dagger \gamma^a\, \mathcal{D}_\mu\, \Psi - (\mathcal{D}_\mu\, \Psi)^\dagger\, \gamma^a\, \Psi \right] \mathrm{d}x^\mu,$$
$$\mathcal{D}_\mu\, \Psi = \partial_\mu \Psi + \omega_\mu \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Было доказано, что в описанной решеточной теории чистой гравитации существует инстантонное самодуальное решение [13]. В отличие от известного решения Егучи–Хансона в континуальной евклидовой теории гравитации [14], решение в решеточной теории является асимптотически *глобально* евклидовым, т.е. граница пространства при $r \longrightarrow \infty$ есть $S^3 = SU(2)$. Это решение удовлетворяет уравнениям

$$\delta \mathfrak{A}_g / \delta \omega^\alpha_{(\pm)\mathcal{W}mi} = 0, \quad \delta \mathfrak{A}_g / \delta e^a_{\mathcal{W}mi} = 0,$$

а также уравнениям дуальности

$$\omega^\alpha_{(-)\mathcal{W}mi} = 0 \longleftrightarrow \Omega_{(-)\mathcal{W}mi} = 1.$$

При этом граничные условия таковы:

$$\Omega_{(+)\mathcal{W}ij} = -1, \quad s^4_{\mathcal{W}} \in \mathfrak{K},$$
$$e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \phi^a_{\mathcal{V}_2} - \phi^a_{\mathcal{V}_1}, \quad a_{\mathcal{V}_1} a_{\mathcal{V}_2} \in \mathfrak{K}, \quad a_{\mathcal{V}_1} a_{\mathcal{V}_2} \notin \partial\mathfrak{K},$$

где $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$ — конечный подкомплекс, содержащий центр инстантона и имеющий границу $\partial\mathfrak{K} \approx S^3$. На бесконечности ($r \longrightarrow \infty$) имеют место граничные условия

$$e^a_\mu \mathrm{d}x^\mu = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}\left(\sin\psi \mathrm{d}\theta - \sin\theta\cos\psi \mathrm{d}\varphi\right) \\ \frac{r}{2}\left(\cos\psi \mathrm{d}\theta + \sin\theta \sin\psi \mathrm{d}\varphi\right) \\ -\frac{r}{2} g(r)\left(\cos\theta \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\psi\right) \\ g(r)^{-1} \mathrm{d}r \end{pmatrix},$$
$$g(r) = \sqrt{1 - \frac{\rho^4}{r^4}},$$
$$\frac{i\sigma^\alpha}{2} \omega^\alpha_{(+)} \longrightarrow U^{-1} \mathrm{d}U \quad \text{as} \quad r \longrightarrow \infty,$$
$$U = \exp\left(-\frac{i\sigma^3}{2}\varphi\right) \exp\left(\frac{i\sigma^2}{2}\theta\right) \exp\left(-\frac{i\sigma^3}{2}\psi\right).$$

Здесь $(\theta,\, \varphi,\, \psi)$ — углы Эйлера, изменяющиеся в пределах $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le 4\pi$, и $(\theta,\, \varphi,\, \psi,\, r)$ — координаты евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

Было также доказано, что существуют решеточные фермионные нулевые моды, ассоциированные с решеточным инстантоном и локализованные в окрестности инстантона [15]. Для демонстрации утверждения рассмотрим “половину” фермионного действия (9), которая описывает динамику “правого” фермионного поля ϕ:

$$\mathfrak{A}_{(\phi)} = -\frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 24} \sum_{\mathcal{W}} \sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{\mathcal{W}ijklm} \varepsilon_{abcd}\, \times$$
$$\times\, \Theta^a_{(\phi)\mathcal{W}mi} e^b_{\mathcal{W}mj} e^c_{\mathcal{W}mk} e^d_{\mathcal{W}ml},$$
$$\Theta^a_{(\phi)\mathcal{W}ij} = \frac{1}{2} \left(\chi^\dagger_{\mathcal{W}i} \sigma^a \Omega_{(+)\mathcal{W}ij} \phi_{\mathcal{W}j} + \right.$$
$$\left. + \phi^\dagger_{\mathcal{W}j} \Omega_{(+)\mathcal{W}ji} (\sigma^a)^\dagger \chi_{\mathcal{W}i} \right),$$
$$\sigma^a \equiv \left(\sigma^1,\, \sigma^2,\, \sigma^3,\, i\right). \tag{10}$$

Для удобства выпишем также континуальный вариант решеточного действия (10) в форме

$$\mathfrak{A}_{(\phi)} = \int \mathrm{d}^{(4)}x \left(\det e^b_\lambda\right) \left\{ \frac{1}{2} e^\mu_a \left[\chi^\dagger \sigma^a \mathcal{D}_{(+)\mu} \phi + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \, c.c. \right] \right\}, \quad \mathcal{D}_{(+)\mu} \equiv \partial_\mu + \frac{i}{2} \sigma^\alpha \omega^\alpha_{(+)\mu}.$$

Необходимо решить решеточные уравнения

$$\delta \mathfrak{A}_{\Psi(+)} / \delta \phi_{\mathcal{V}} = 0, \quad \delta \mathfrak{A}_{\Psi(+)} / \delta \chi^\dagger_{\mathcal{V}} = 0, \tag{11}$$

также как и их сопряженные уравнения, на фоне поля инстантона. В работе [15] было доказано, что существуют два и только два локализованных вблизи инстантона решения с гладкой асимптотикой. Здесь интересен лишь асимптотический вид фермионных нулевых мод. Для инстантона, локализованного вблизи нулевой точки ($r = 0$) решения имеют вид:

$$\phi_0 = \frac{\mathrm{const}}{r^3} \exp\left(\frac{i\sigma^3}{2}\psi\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\tan\left(\theta/2\right)} \\ \sqrt{\cot\left(\theta/2\right)} \end{pmatrix}, \quad r \gg \rho,$$
$$\overline{\phi}_0 = \left(i\sigma^2 \phi_0\right)^*. \tag{12}$$

Верхние индексы * и ^{T} означают комплексное сопряжение и матричное трансформирование, соответственно. Для обоих решений

$$\chi^\dagger_{0\,\mathcal{V}} = 0, \quad \chi_{0\,\mathcal{V}} = 0 \quad \text{для всех вершин} \quad a_{\mathcal{V}}. \tag{13}$$

Имеем

$$\sum_{\mathcal{V}} \overline{\phi}^T_{0\mathcal{V}} (i\sigma^2) \phi_{0\mathcal{V}} = 1,$$
$$\overline{\phi}^T_{0\mathcal{V}} (i\sigma^2) \overline{\phi}_{0\mathcal{V}} = \phi^T_{0\mathcal{V}} (i\sigma^2) \phi_{0\mathcal{V}} = 0.$$

Обратим внимание на тот факт, что, согласно (13), у инстантонных фермионных нулевых мод нижние компоненты обращаются в нуль. По сути их введение на решетке понадобилось лишь для записи решеточного фермионного действия, описывающего динамику вейлевского спинора ϕ, $\phi^{\dagger}$.

Известно, что два спинора ϕ и $\overline{\phi} = \left(i\sigma^2\phi\right)^*$ трансформируются идентично при калибровочных преобразованиях $\mathrm{Spin}(4)_{(+)}$ [16]. Поэтому разложение поля ϕ, аналогичное разложению (3), должно содержать обе независимые нулевые моды:

$$\phi_{s\mathcal{V}} = \eta_{s\,0}\,\phi_{0\mathcal{V}} + \eta^{\dagger}_{s\,0}\,\overline{\phi}_{0\mathcal{V}} + (\text{all the rest}). \qquad (14)$$

3. Воспроизведем теперь логику пункта 1 для случая дискретной гравитации. Предполагается, что в теории имеются лишь "правые" поля ϕ_s, $s = 1, \ldots, N$. Чтобы избежать обращения в нуль фермионного детерминанта, фермионное действие (10) модифицируется путем введения внешних источников.

Прежде всего покажем, что если ϕ есть вейлевское поле, то $\phi^T\sigma^2\phi$ есть Лоренц-инвариант (для сигнатуры Минковского) либо инвариант относительно преобразований группы $SU(2)$ (для евклидовой сигнатуры). Действительно, в обоих случаях поле преобразуется, согласно $\phi \longrightarrow \{\exp i(\omega^1\sigma^1 + \omega^2\sigma^2 + \omega^3\sigma^3)\}\phi$, с той лишь разницей, что в первом случае параметры поворота $\boldsymbol{\omega}$ комплексные (всего 6 вещественных параметров), а во втором случае — вещественные. Поэтому имеем:

$$\begin{gathered}\phi^T\sigma^2\phi \longrightarrow \phi^T\{\exp i(\omega^1\sigma^1 - \omega^2\sigma^2 + \omega^3\sigma^3)\}\sigma^2 \times \\ \times \{\exp i(\omega^1\sigma^1 + \omega^2\sigma^2 + \omega^3\sigma^3)\}\phi = \\ = \phi^T\sigma^2\{\exp(-i\boldsymbol{\omega\sigma})\exp(i\boldsymbol{\omega\sigma})\}\phi = \phi^T\sigma^2\phi.\end{gathered}$$

Из сказанного следует, что внешние источники могут быть введены путем добавления к действию вклада

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{A}_{\Psi(+)} &= \sum_{s,t,\mathcal{V}}\{J_{s,t,\mathcal{V}}\phi^T_{s,\mathcal{V}}(i\sigma^2)\phi_{t,\mathcal{V}} + c.c\} = \\ &= \sum_{s,t,\mathcal{V}}\Big\{\left(J_{s,t,\mathcal{V}} + J^*_{s,t,\mathcal{V}}\right)\left[\overline{\phi}^T_{0\mathcal{V}}(i\sigma^2)\phi_{0\mathcal{V}}\right] \times \\ &\quad\times\left(\eta^{\dagger}_{s0}\eta_{t0} + \eta^{\dagger}_{t0}\eta_{s0}\right)\Big\} + (\text{all the rest}).\end{aligned}$$

Тогда фермионный функциональный интеграл дает выражение (5), где теперь следует использовать матричные элементы

$$j_{st}(x) = \sum_{s,t,\mathcal{V}}\left\{\left(J_{s,t,\mathcal{V}} + J^*_{s,t,\mathcal{V}}\right)\overline{\phi}^{(x)T}_{0\,\mathcal{V}}(i\sigma^2)\phi^{(x)}_{0\,\mathcal{V}}\right\},$$

что, в свою очередь, приводит к эффективной фермионной Лоренц-инвариантной вершине (ср. с (1))

$$V \sim \varkappa \det_{st}\left\{\phi^T_s(x)\sigma^2\phi_t(x) + \phi^{\dagger}_s(x)\sigma^2\phi^{\dagger\,T}_t(x)\right\}. \qquad (15)$$

Символ $\phi^{(x)}_{0\,\mathcal{V}}$ используется для обозначения конфигурации фермионной нулевой моды, связанной с инстантоном с центром в точке x. На этом этапе исследования мы можем дать лишь оценку для константы $\varkappa$, вытекающую из размерностных соображений. Известно, что в неперенормируемых теориях, к которым относится теория гравитации, квантовые флуктуации нарастают в сторону ультрафиолета, уменьшаясь в инфракрасной области. В случае общей теории относительности разложение идет по размерной константе $l_P \sim \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-33}$ см, и конкретные вычисления показывают, что флуктуации быстро затухают в области масштабов $\gg l_P$, которую в данном случае условно назовем инфракрасной. Очевидно, инстантонное решение можно выделить из квантовых флуктуаций лишь в инфракрасной области, т.е. когда $\rho \gg l_P$. Поэтому размерностная оценка для $\varkappa$ такова: $\varkappa \gtrsim l_P^{3N-4}$. На первый взгляд, уже при $N = 2$ вклад вершины (15) в реальную физику был бы столь мал, что ею можно было бы пренебречь. Однако, картина меняется качественно, если рассматривается процесс взаимодействия (рассеяния) одного длинноволнового кванта (наблюдаемого нейтрино) и $(N-1)$ нерегулярных ("удвоенных" по Вильсону) фермионных квантов. В [10] было показано, что волновые функции нерегулярных квантов ϕ_{ir} локализованы на масштабах порядка решеточных, т.е. на масштабах $\sim l_P$. Это означает, что в месте их локализации имеется оценка $\phi^2_{ir} \sim l_P^{-3}$. Поскольку в процессе участвует $(N-1)$ нерегулярный квант, то оценка эффективной константы при вершине (15) изменяется параметрически:

$$\varkappa \sim l_P^{(3N-4)-3(N-1)} = l_P^{-1}.$$

Из приведенного рассуждения видно также, что процесс рассеяния двух нейтрино $2 \longrightarrow 2$ вследствие взаимодействия (15) описывается эффективной четырехфермионной вершиной с константой взаимодействия $\varkappa \sim l_P^2$, т.е. уменьшается параметрически и является несущественным.

Следует также подчеркнуть, что если плотность нерегулярных квантов строго равна нулю, то и процессов нейтринных осцилляций $1 \longrightarrow 1$ вследствие наличия вершины (15) не было бы. Поэтому лишь при наличии ненулевой плотности нерегулярных квантов (темная материя) мы можем утверждать, что эффективная вершина (15) приводит к описанному эффекту.

Имеется существенная разница между инстантонной физикой в теориях Янга–Миллса и гравитации. Для простоты рассмотрим случай $N = 1$. В теории Янга–Миллса интеграл в (7) равен $\int d^{(4)}x\,\mathcal{A}^5 = 2$ для инстантона. Аксиальная аномалия имеется также в теории гравитации, но в этом случае $\int_{r>\rho} d^{(4)}x\,\mathcal{A}^5 = 1/4$ даже если мы пользуемся интегрированием в континуальном пространстве вплоть до области, где уже начинаются сингулярности и существенную роль играет решетка. Вообще неясно, как следует вычислять аксиальную аномалию для решеточных сингулярных конфигураций гравитационного поля. Тем не менеее имеется сильный аргумент в пользу того, что инстантон в решеточной теории дает $\Delta Q^5 = 0$. Действительно, в континуальном пределе в сигнатуре Минковского действие (10) трансформируется в действие

$$\mathfrak{A}_\phi = \int d^{(4)}x \left(\det e^b_\lambda\right) e^\mu_a \left\{\phi^\dagger \sigma^a \mathcal{D}_{(+)\mu}\phi\right\},$$
$$\sigma^a = \left(1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right),$$

описывающее динамику “правых” релятивистских фермионов. Это действие не может генерировать $\Delta Q^5 \neq 0$. Вершина (15) является Лоренц-инвариантной для сигнатуры Минковского.

4. В последнее время обсуждается идея, что нейтринные массы и, таким образом, нейтринные осцилляции генерируются гравитационным взаимодействием (см., например, [17, 18]).

Заметим, что вершина (15) может генерировать нейтринные осцилляции. Действительно, предположим, что распространяется один длинноволновый квант вейлевского поля, и что имеется малая плотность нерегулярных “удвоенных” квантов. Тогда вершина может давать переход регулярного кванта в нерегулярный, а для сохранения общего 4-импульса нерегулярные кванты порождают один регулярный квант с тем же импульсом. Эта проблема будет изучаться в следующих работах. Таким образом, предъявленный в Письме результат находится в неком смысле в резонансе с упомянутыми выше работами.

Следует подчеркнуть, что здесь возникновение эффективной вершины вида (15) связано исключительно с зернистостью пространства-времени на сверхмалых масштабах.

Работа поддержана Российским Научным Фондом грант # 16-12-10151.

1. G. ’t Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
2. G. ’t Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).
3. G. ’t Hooft, Phys. Rep. **142**, 357 (1986).
4. C. G. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, Phys. Lett. B **63**, 334 (1976).
5. C. G. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, Phys. Rev. D **17**, 2717 (1978).
6. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwarz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
7. R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **13**, 3398 (1976).
8. H. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981).
9. H. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **193**, 173 (1981).
10. S. N. Vergeles, Phys. Rev. D **92**, 025053 (2015).
11. S. N. Vergeles, Nucl. Phys. B **735**, 172 (2006).
12. S. N. Vergeles, JETP **106**, 46 (2008).
13. S. N. Vergeles, J. High Energ. Phys. **02**, 044 (2017).
14. T. Eguchi and A. J. Hanson, Ann. Phys. **120**, 82 (1979).
15. S. N. Vergeles, Phys. Rev. D **96**, 054512 (2017).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Наука, М. (1989), т. 3.
17. G. Dvali and L. Funcke, arXiv:1602.03191v4 [hep-ph] (2016).
18. G. Dvali, arXiv:1705.06317v1 [hep-th] (2017).