Письма в ЖЭТФ, том 108, вып. 12, с. 793 – 798

Зависимость приближенных выражений для пяти и шести петлевых КХД поправок к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжелых кварков от числа легких ароматов

А. Л. Катаев[+*1)], *В. С. Молокоедов*[+*×1)]

[+]*Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[×]*Институт теоретической физики имени Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

Поступила в редакцию 9 октября 2018 г.

В данной работе используются различные подходы к определению зависимости оценочных $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$ и $\mathcal{O}(\alpha_s^6)$-поправок к соотношению квантовой хромодинамики между полюсными и бегущими в $\overline{\text{MS}}$-схеме массами тяжелых кварков от числа легких ароматов. Обнаружено, что недавно исследуемая асимптотическая формула для коэффициентов этого соотношения, основанная на методе инфракрасных ренормалонов, не воспроизводит знакопеременной структуры в степенной зависимости пяти и шести петлевых поправок от количества легких ароматов, которая, однако, наблюдается в трех других используемых нами подходах.

DOI: 10.1134/S0370274X18240013

1. Введение. Массы c, b и t-кварков являются важными параметрами не только квантовой хромодинамики (КХД), но и Стандартной Модели физики частиц и ее различных расширений. Однако, благодаря явлению конфайнмента массы кварков не могут быть измерены напрямую. Более того, в рамках перенормируемой квантовой теории поля массы зависят не только от энергетического масштаба μ, но и от применения конкретной схемы перенормировки. В связи с этим существует несколько теоретических определений масс тяжелых кварков. Широко распространенными понятиями являются бегущие $\overline{m}_q(\mu^2)$ и полюсные массы M_q, определенные в рамках $\overline{\text{MS}}$-схемы и схемы вычитаний на массовой поверхности (on-shell), соответственно. Соотношение между этими массами (коротко $\overline{\text{MS}}$-on-shell соотношение) было рассмотрено в ряде работ на одно [1], двух [2–4] и трех петлевом [5, 6] уровнях и имеет следующий вид

$$M_q = \overline{m}_q(\overline{m}_q^2) \sum_{n\geq 0} t_n a_s^n(\overline{m}_q^2), \tag{1}$$

где $\mu^2 = \overline{m}_q^2$ и $a_s(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2)/\pi$ в $\overline{\text{MS}}$-схеме. В случае цветовой калибровочной группы $SU(3)$ численные результаты этих аналитических вычислений имеют следующий вид:

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4/3, \quad t_2 = -1.0414 n_l + 13.443, \\ t_3 = 0.6527 n_l^2 - 26.655 n_l + 190.60. \tag{2}$$

Поправки второго и третьего порядков теории возмущений (ТВ) зависят от n_l. В данной работе мы рассматриваем случай одного массивного и n_l безмассовых кварков, т.е. число активных ароматов $n_f = n_l + 1$. Это приближение вполне приемлемо, если игнорировать поправки, связанные с учетом масс кварков во внутренние фермионные вставки, перенормирующие кварковую двухточечную функцию Грина [7]. Как следует из уравнений (2), структура выражений для коэффициентов t_n носит знакопеременный характер по n_l. Исследование этой проблемы на четырех петлевом уровне подтверждает данное правило. Однако, на сегодняшний момент аналитическое выражение коэффициента t_4 пока еще не известно. Но ведущий по степеням n_l и следующий за ним член был получен в аналитическом виде в работе [8], и первый из них согласуется с численными результатами ренормалонного анализа [9]. Позднее в работе [10] значения коэффициента t_4 были получены численно с одинаковой погрешностью для всех n_l = 3, 4 и 5. Используя результаты этих вычислений и применяя метод наименьших квадратов (МНК) к решению переопределенной системы трех линейных уравнений

1)e-mail: kataev@ms2.inr.ac.ru; viktor_molokoedov@mail.ru

с двумя неизвестными (линейно зависимый по n_l и независимый от n_l члены, входящие в разложение t_4), можно получить не только их численные значения, но и оценить теоретические погрешности полученных выражений [11]. Недавно результаты [10] были улучшены в работе [12]: значения коэффициента t_4 теперь были представлены для $0 \leq n_l \leq 20$ с гораздо более высокой точностью и уже n_l-зависимыми погрешностями. Данное обстоятельство способствовало пересмотрению МНК-вычислений [11] в работе [13]. Уточненные результаты [13] зависимости $\mathcal{O}(a_s^4)$-члена от количества безмассовых ароматов в $\overline{\text{MS}}$-on-shell массовом соотношении в уравнении (1) выглядят следующим образом:

$$t_4 = -0.6781 n_l^3 + 43.396 n_l^2 + \\ + (-745.72 \pm 0.15) n_l + 3567.60 \pm 1.34. \quad (3)$$

Анализ соотношения между полюсной и бегущей массами тяжелых ароматов на четырех петлевом уровне указывает на расходимость соответствующего асимптотического ряда для c-кварка, начиная со второго (или третьего) порядка ТВ. В случае b-кварка все поправки высших порядков уменьшаются вплоть до четырех петлевого уровня. Однако, $\mathcal{O}(a_s^4)$-вклад становится сравнимым по величине с $\mathcal{O}(a_s^3)$-членом. Поэтому для точного ответа на вопрос о нахождении номера порядка ТВ, для которого оборванный асимптотический $\overline{\text{MS}}$-on-shell ряд ТВ для b- кварка может быть использован в теоретических исследованиях, по крайней мере, необходимо определить величину вклада пятого порядка. Для t-кварка данная задача является еще более актуальной. В самом деле, все поправки высших порядков ТВ довольно быстро и монотонно уменьшаются вплоть до четырех петлевого уровня. К тому же благодаря большому значению массы топ-кварка величины этих поправок значительно превосходят аналогичные вклады для случая b-кварка, и поэтому учет эффектов высших порядков ТВ для t-кварка играет важную роль в определении теоретических погрешностей для значений масс, определяемых из результатов экспериментальных данных на Тэватроне и LHC (Large Hadron Collider – Большой Адронный коллайдер). Отметим, что вышеупомянутая асимптотическая природа $\overline{\text{MS}}$- on-shell соотношения связана с существованием лидирующей инфракрасной ренормалонной (ИРР) сингулярности в борелевском образе соотношения (1) [14, 15], которая приводит к факториальному росту коэффициентов данного ряда ТВ. Таким образом, с теоретической и феноменологической точки зрения, важно зафиксировать номер порядка ТВ, начиная с которого соответствующий ряд для $\overline{\text{MS}}$-on-shell соотношения начнет проявлять асимптотический характер. Перейдем к изучению данной проблемы.

2. Оценки методом суммирования ренормалонных цепочек. В этом разделе будем использовать результаты работы [9], где поправки к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжелых кварков были оценены с помощью вычислений ведущих по n_l вкладов, следующих из рассмотрения цепочки вставок фермионных петель (“*fermion loops* – FL) в глюонный пропагатор, перенормирующий двухточечную функцию Грина кварковых полей, а также применения процедуры наивной неабелианизации, которая, согласно нормировке, принятой в нашей работе, эквивалентна подстановке $n_l \to -6\beta_0$, где $\beta_0 = 11/4 - (n_l+1)/6$ есть первый коэффициент ренормгрупповой β-функции КХД. Используем результаты этих вычислений, сдвигая точку нормировки с полюсной на бегущую в $\overline{\text{MS}}$-схеме массу тяжелого аромата. В случае применения этого метода для оценки n_l-зависимости четырех петлевой поправки к $\overline{\text{MS}}$-on-shell соотношению получаем следующее выражение

$$t_4^{\text{FL}} = -0.678 n_l^3 + 30.66 n_l^2 - 435.5 n_l + 2145, \quad (4)$$

которое находится в удовлетворительном согласии с результатом (3). Для коэффициентов t_5 и t_6 данный метод, основанный на рассмотрении ренормалонной цепочки [9], позволяет получить:

$$t_5^{\text{FL}} = 0.9 n_l^4 - 56 n_l^3 + 1256 n_l^2 - 12383 n_l + 47721, \quad (5)$$

$$t_6^{\text{FL}} = -1.5 n_l^5 + 120 n_l^4 - 3779 n_l^3 + \\ + 58846 n_l^2 - 460910 n_l + 1468466. \quad (6)$$

Подчеркнем, что разложения (4), (5) и (6) содержат точные численные выражения лидирующих по степеням n_l вкладов. Также отметим, что подобная процедура воспроизводит знакопеременную структуру коэффициентов t_4^{FL}, t_5^{FL} и t_6^{FL}, явно проявляющую себя на уровнях двух, трех и четырех петлевых вычислений.

3. Применение метода эффективных зарядов. *Оценки в минковской области энергий.* Рассмотрим аналог уравнения (1), а точнее величину $T(s)$, определенную во времениподобной области энергий Минковского с нормировкой $\mu^2 = s$:

$$T(s) = \overline{m}_q(s) \sum_{n \geq 0} t_n a_s^n(s), \quad (7)$$

где коэффициенты t_n при $0 \leq n \leq 4$ совпадают с вычисленными аналитически (2) и полуаналитически (3) результатами. Затем используем метод оценок КХД вкладов высших порядков ТВ к величине

$T(s)$, основанный на понятии эффективных зарядов ("*effective charges*" – ECH) [16] и развитый в работах [17, 18] подход. На начальном этапе определяем эффективный заряд $a_s^{\text{eff}}(s)$ для величины $T(s)/\overline{m}_q(s)$

$$a_s^{\text{eff}}(s) = a_s(s) + \sum_{n\geq 2} \tau_n a_s^n(s) \tag{8}$$

с коэффициентами $\tau_n = t_n/t_1$. После этого возможно определить соответствующую ECH β-функцию, которая описывает энергетическую зависимость эффективной константы связи $a_s^{eff}(s)$:

$$\beta^{\text{eff}}(a_s^{eff}) = -\sum_{n\geq 0} \beta_n^{\text{eff}} (a_s^{\text{eff}})^{n+2}. \tag{9}$$

Схемно-независимые коэффициенты β_n^{eff} для $n = 4, 5$ соотносятся с соответствующими $\overline{\text{MS}}$ коэффициентами β_n следующими выражениями [17]:

$$\begin{gathered}
\beta_4^{\text{eff}} = \beta_4 - 3\tau_2\beta_3 + (4\tau_2^2 - \tau_3)\beta_2 + (\tau_4 - 2\tau_2\tau_3)\beta_1 + \\
+ (3\tau_5 - 12\tau_2\tau_4 - 5\tau_3^2 + 28\tau_2^2\tau_3 - 14\tau_2^4)\beta_0, \\
\beta_5^{\text{eff}} = \beta_5 - 4\tau_2\beta_4 + \\
+ (8\tau_2^2 - 2\tau_3)\beta_3 + (4\tau_2\tau_3 - 8\tau_2^3)\beta_2 + \\
+ (2\tau_5 - 8\tau_2\tau_4 + 16\tau_2^2\tau_3 - 3\tau_3^2 - 6\tau_2^4)\beta_1 + \\
+ (4\tau_6 - 20\tau_2\tau_5 - 16\tau_3\tau_4 + 48\tau_2\tau_3^2 - 120\tau_2^3\tau_3 + \\
+ 56\tau_2^2\tau_4 + 48\tau_2^5)\beta_0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Анзац $\beta_n^{\text{eff}} = \beta_n$ позволяет оценить численные значения коэффициентов τ_{n+1}. Подобная процедура использовалась в работах [18, 19] для получения приближенных значений коэффициентов t_3 и t_4 поправок к соотношению (1) для c, b и t-кварков. Эти оценки оказались в достаточно хорошем согласии с результатами явных диаграммных вычислений (2) и (3) в порядках $\mathcal{O}(a_s^3)$ и $\mathcal{O}(a_s^4)$. Поэтому мы ожидаем, что приближения $\beta_4^{\text{eff}} = \beta_4$ и $\beta_5^{\text{eff}} = \beta_5$ также приведут к правдоподобным оценкам пяти и шести петлевых поправок к $\overline{\text{MS}}$-on-shell соотношению (обозначим их как $t_5^{\text{ECH-M}}$ и $t_6^{\text{ECH-M}}$ соответственно). Рассматривая случаи с фиксированным количеством безмассовых ароматов в пределах $3 \leq n_l \leq 8$ (при этом знак β_0-коэффициента не изменяется, и поэтому, свойство асимптотической свободы не нарушается в ведущем порядке ТВ), можно однозначно предсказать значения всех коэффициентов в зависимости пяти и шести петлевых поправок от количества легких ароматов. В рамках метода эффективных зарядов в минковской области энергий выражения для $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$-поправок имеют следующий вид:

$$t_5^{\text{ECH-M}} = 1.2n_l^4 - 77n_l^3 + 1959n_l^2 - 20445n_l + 72557, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
t_6^{\text{ECH-M}} = -2.2n_l^5 + 148n_l^4 - 4561n_l^3 + \\
+ 71653n_l^2 - 538498n_l + 1519440.
\end{gathered} \tag{12}$$

Полученные выражения находятся в неплохом согласии с результатами (5) и (6), вычисленными методом суммирования цепочки фермионных петель. Подчеркнем, что оба подхода указывают на знакопеременную структуру в разложении пяти и шести петлевых поправок по степеням n_l.

Оценки с учетом перехода из евклидовой в минковскую область энергий. На практике многие ТВ вычисления выполняются в евклидовой области, в то время как характеристики физических процессов, которые могут быть измерены на коллайдерах, описываются величинами, определенными во времениподобных областях энергий. Для того чтобы установить соответствие между ними, необходимо учесть эффекты, связанные с переходом из евклидовой области в пространство Минковского. В работах [17, 18] показано, что теоретически более обоснованным считается применение метода эффективных зарядов к величинам, определенным в евклидовом пространстве. После этого необходимо вычислить эффекты аналитического продолжения и получить выражение для величин во времениподобной области энергий. Рассмотрим спектральное представление типа Челлена–Лемана для евклидовой величины $F(Q^2)$ [18]

$$F(Q^2) = \int_0^\infty ds \frac{Q^2 T(s)}{(s+Q^2)^2} = \overline{m}_q(Q^2) \sum_{n\geq 0} f_n a_s^n(Q^2), \tag{13}$$

где функция $T(s)$ определялась ранее в (7). Учитывая зависимость от масштаба константы связи $a_s(s)$ и бегущей массы $\overline{m}_q(s)$ в $\overline{\text{MS}}$-схеме вычитаний, выполняя интегрирование в уравнении (13) и полагая $\mu^2 = Q^2$, получаем соотношения между коэффициентами t_n и f_n рядов ТВ, рассматриваемых в минковской и евклидовой областях энергий, соответственно,

$$f_n = t_n + \Delta_n, \tag{14}$$

где дополнительные вклады Δ_n соответствуют эффектам аналитического продолжения и содержат пропорциональные степеням π^2 слагаемые, а также выражения, пропорциональные степеням коэффициентов β-функции и аномальной размерности массы γ_m в $\overline{\text{MS}}$-схеме. Явные шести петлевые выражения членов Δ_n для случая группы $SU(N_c)$ приведены в работе [13]. Для случая $SU(3)$ группы получаем следующие численные разложения этих вкладов:

$$\begin{gathered}\Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 5.8943 - 0.27416 n_l, \\ \Delta_3 = 105.622 - 10.0448 n_l + 0.19800 n_l^2, \\ \Delta_4 = 2272.00 - 403.949 n_l + 20.6767 n_l^2 - 0.31590 n_l^3, \\ \Delta_5 = 56304.64 - 13767.273 n_l + 1137.1779 n_l^2 - \\ - 37.74529 n_l^3 + 0.42752 n_l^4, \\ \Delta_6 = 1633115.6 \pm 347.7 + (-518511.69 \pm 56.72) n_l + \\ +(61128.167 \pm 4.779) n_l^2 + (-3345.082 \pm 0.137) n_l^3 + \\ + 85.3794 n_l^4 - 0.81845 n_l^5. \end{gathered} \tag{15}$$

Выражения (15) указывают на то, что эффекты аналитического продолжения не являются пренебрежимо малыми и увеличиваются от порядка к порядку ТВ. На языке эффективных зарядов переход к применению ECH-процедуры для евклидовой функции $F(Q^2)/\overline{m}_q(Q^2)$ (13), а не для минковской величины $T(s)/\overline{m}_q(s)$, эквивалентен замене $\tau_n \to f_n/f_1$ в уравнениях (10). Применяя рассуждения, аналогичные описанным в предыдущем разделе, а именно, приравнивая коэффициенты ECH β-функции в евклидовой области энергий к их $\overline{\text{MS}}$-схемным аналогам, мы получаем приближенные выражения для пяти и шести петлевых евклидовых коэффициентов f_5 и f_6 при фиксированных значениях n_l в пределах $3 \le n_l \le 8$. Решение систем соответствующих уравнений позволяет определить зависимость евклидовых коэффициентов f_5 и f_6 от количества легких ароматов, а учет соотношения (14) дает возможность найти данную зависимость для минковских коэффициентов t_5 и t_6 (обозначим их $t_5^{\text{ECH–E–M}}$ и $t_6^{\text{ECH–E–M}}$):

$$t_5^{\text{ECH–E–M}} = 2.5 n_l^4 - 136 n_l^3 + 2912 n_l^2 - 26976 n_l + 86620, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} t_6^{\text{ECH–E–M}} = -4.9 n_l^5 + 352 n_l^4 - 9708 n_l^3 + \\ + 131176 n_l^2 - 855342 n_l + 2096737. \end{gathered} \tag{17}$$

Как и в двух предыдущих рассмотренных нами случаях, метод эффективных зарядов с учетом эффектов аналитического продолжения воспроизводит знакопеременную структуру коэффициентов t_n вкладов порядка $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$. Отметим, что численные значения слагаемых Δ_5 и Δ_6 сравнимы с величинами вкладов t_5 и t_6. При этом значения соответствующих коэффициентов в n_l-разложении членов $t_{5,6}^{\text{ECH–M}}$ и $t_{5,6}^{\text{ECH–E–M}}$ отличаются на незначительные факторы от 1.5 до 2 (см. выражения (11), (12) и (16), (17)).

4. Применение асимптотической ренормалонной формулы. В качестве следующего метода получения оценок пяти и шести петлевых поправок к $\overline{\text{MS}}$-on-shell соотношению для масс тяжелых кварков мы рассмотрим подход, основанный на применении асимптотической формулы, полученной в [20–22]. Данный подход является следствием гипотезы о ренормалонной доминантности, которая появилась после изучения инфракрасных сингулярностей борелевского образа ТВ ряда для соотношения между полюсными и бегущими массами кварков [14, 15], в том числе и вне рамок разложения по большим степеням β_0. Общее выражение этой формулы выглядит следующим образом

$$t_n^{r-n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi N_m (2\beta_0)^{n-1} \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(1+b)} \left(1 + \sum_{k=1}^{3} \Omega_k\right), \tag{18}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, $b = \beta_1/(2\beta_0^2)$ и выражения для Ω_k-вкладов, содержащие подавленные поправками вида $(1/n)^k$ слагаемые, приведены в [22, 23]. Нормировочный фактор N_m в уравнении (18) зависит от n_l и от n. Возможные способы получения значений фактора N_m в заданном порядке ТВ представлены в работах [22, 24, 25]. Чтобы оценить величину $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$-поправок к $\overline{\text{MS}}$-on-shell соотношению в рамках асимптотической формулы (18), используем численные значения *четырех петлевых* результатов для N_m- фактора, полученные в интервале $3 \le n_l \le 8$ в работе [23]. Возможность такого приближения следует из достаточно слабой зависимости N_m-фактора от порядка n теории возмущений, начиная с трех петлевого уровня. Конечно, эта зависимость не является пренебрежимо малой, но для цели получения приближенных выражений $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$-вкладов это допущение представляется приемлемым. Однако, при этом проявляется неожиданный результат: в отличие от подхода, основанного на разложении по большим степеням β_0 и суммировании вкладов от ренормалонных цепочек [9], а также двух способов применения метода эффективных зарядов [13], ИРР асимптотическая формула с четырех петлевым приближением N_m-фактора [23] не воспроизводит знакопеременной n_l-зависимой структуры соответствующих пяти и шести петлевых выражений для коэффициентов t_5 и t_6:

$$\begin{gathered} t_5^{r-n} = -22 n_l^4 + 416 n_l^3 - \\ - 1669 n_l^2 - 11116 n_l + 72972, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} t_6^{r-n} = 99 n_l^5 - 2903 n_l^4 + 30109 n_l^3 - \\ - 99563 n_l^2 - 305378 n_l + 2040263. \end{gathered} \tag{20}$$

Данный факт может свидетельствовать по крайней мере о двух обстоятельствах: либо наше допущение использовать четырех петлевые значения N_m-фактора в приближениях порядка $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ не справедливо, либо в ИРР-формуле (18) необходимо учитывать дополнительные источники погрешностей, скажем, вклады $(1/n)^4$-поправок или эффекты ультрафиолетовых ренормалонов, обсуждавшиеся ранее в работах [21, 26].

5. Численные результаты. Суммируя описанные в предыдущих разделах рассмотрения, представим численные результаты для пяти и шести петлевых коэффициентов t_5, t_6 при $3 \le n_l \le 8$, полученных в рамках четырех приближенных рассмотренных методов.

Table 1. Оценки t_5 и t_6-поправок, полученные четырьмя различными методами

n_l	$t_5^{\rm FL}$	$t_5^{\rm ECH-M}$	$t_5^{\rm ECH-E-M}$	t_5^{r-n}
3	20432	26871	28435	34048
4	14924	17499	17255	22781
5	10757	10427	9122	13882
6	7693	5320	3490	7466
7	5515	1871	−127	3119
8	4027	−196	−2153	344
n_l	$t_6^{\rm FL}$	$t_6^{\rm ECH-M}$	$t_6^{\rm ECH-E-M}$	t_6^{r-n}
3	522713	437146	476522	829993
4	353810	255692	238025	511245
5	233282	133960	90739	283902
6	149601	57920	8412	137256
7	93225	15798	−29701	50520
8	56410	−2184	−39432	4747

Из результатов табл. 1 следует, что для физических значений $n_l = 3, 4, 5$ предсказания, сделанные с учетом ренормалонной асимптотической формулы (18), несколько превышают по величине оценки, полученные суммированием вставок фермионных петель и двумя вариантами ECH-метода. Также стоит подчеркнуть, что оценки для коэффициента t_5, выполненные в рамках обоих ECH-подходов, находятся в лучшем согласии с результатами, полученными в процессе определения массы b-кварка глобальным фитированием связанных кварк-антикварковых состояний [27], чем результаты, полученные из рассмотрения асимптотической формулы (18). В отличие от FL и ИРР подходов, оба ECH-метода предсказывают отрицательные значения t_5 и t_6-поправок для $n_l = 7, 8$, которые важны для их знакопеременного поведения.

Перейдем к рассмотрению приближенных численных значений КХД поправок высших порядков ТВ к соотношению между полюсными и бегущими массами реальных тяжелых кварков. Как мы уже обсуждали ранее, в случае c-кварка асимптотическая структура $\overline{\rm MS}$-on-shell соотношения проявляется уже с двух петлевого уровня. Поэтому нас будут интересовать поправки высших порядков только для b и t-кварков. Фиксируем значения бегущих масс этих кварков и констант связи, следуя работе [13], а именно $\overline{m}_b(\overline{m}_b^2) = 4.180$ ГэВ, $\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 164.3$ ГэВ, $\alpha_s(\overline{m}_b^2) = 0.2256$, $\alpha_s(\overline{m}_t^2) = 0.1085$. Учитывая результаты прямых аналитических вычислений и оценок из табл. 1, мы приходим к следующим выражениям, полученным четырьмя рассматриваемыми нами методами:

$$\frac{M_b}{1\,\text{GeV}} \approx 4.180 + 0.400 + 0.200 + 0.146 + 0.137 + \begin{cases} 0.119 + 0.203 & - \ \text{FL}; \\ 0.140 + 0.147 & - \ \text{ECH–M}; \\ 0.137 + 0.137 & - \ \text{ECH–E–M}; \\ 0.182 + 0.293 & - \ \text{IRR}; \end{cases} \tag{21a}$$

$$\frac{M_t}{1\,\text{GeV}} \approx 164.3 + 7.566 + 1.614 + 0.498 + 0.196 + \begin{cases} 0.087 + 0.065 & - \ \text{FL}; \\ 0.084 + 0.037 & - \ \text{ECH–M}; \\ 0.074 + 0.025 & - \ \text{ECH–E–M}; \\ 0.112 + 0.079 & - \ \text{IRR}. \end{cases} \tag{21b}$$

Для полюсной массы b-кварка процедура суммирования вставок фермионных петель, дополненная методом наивной неабелианизации, указывает на уменьшение вкладов высших порядков ТВ вплоть до шести петлевого уровня. Иная картина наблюдается в случае трех других методов: асимптотическая структура в разложении полюсной массы b-кварка проявляется, начиная с пяти петлевого уровня. Еще одна интересная особенность состоит в том, что в рамках метода эффективных зарядов, изначально примененного к физическим величинам, определенным в евклидовой области энергий, а затем дополненным эффектами аналитического продолжения в пространство Минковского, ряд ТВ для полюсной массы b-кварка демонстрирует выход на некое плато численных значений для четырех, пяти и шести петлевых вкладов. Для полюсной массы t-кварка все рассматриваемые процедуры оценок предсказывают уменьшение пяти и шести петлевых поправок. Это означает, что асимптотическая природа ряда ТВ для топ-кварка все еще не проявляется в этих порядках теории возмущений. Поэтому теоретическое понятие полюсной массы топ-кварка может быть использовано даже на шести петлевом уровне.

6. Заключение. При помощи четырех методов таких, как суммирование вкладов фермионных петель, двух методов, основанных на понятии эффективного заряда и определенных в евклидовой и минковской областях энергий, а также рассмотрении асимптотической ренормалонной формулы, мы получили численные значения поправок пятого и шестого порядка к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжелых кварков. Помимо этого также определили зависимость данных поправок от количества легких ароматов. Подход, основанный на применении асимптотической ренормалонной формулы с нормировочным множителем N_m, фиксированном в четвертом порядке ТВ, не воспроизводит знакопеременной по степеням n_l структуры пяти и шести петлевых поправок к $\overline{\rm MS}$-on-shell соотношению для масс тяжелых кварков, в то время как три других метода дают не только близкие значения этих поправок, но и сохраняют свойство знакопеременности. Метод эффективных зарядов, определенный в евклидовой области энергий, в случае b-кварка приводит к эффекту плато. Остальные три метода предсказывают преобладание шести петлевых вкладов над пяти петлевыми. Для полюсной массы t-кварка асимптотическая структура соответствующего ряда ТВ не наблюдается даже на шести петлевом уровне. Поэтому теоретическое понятие полюсной массы топ-кварка применимо вплоть до шестого порядка теории возмущений. При этом теоретическая неопределенность существующих значений полюсной массы топ-кварка оценивается последним членом этого асимптотического ряда, включенным в сравнение с экспериментальными данными коллайдеров Тэватрон и LHC, который в случае использования трех петлевых поправок КХД составляет порядка 500 МэВ.

Мы признательны проф. В.М. Брауну и проф. А.Г. Грозину за полезные обсуждения. Работа В.С. Молокоедова поддержана грантом РНФ # 16-12-10151.

---

1. R. Tarrach, Nucl. Phys. B **183**, 384 (1981).
2. N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe, and K. Schilcher, Z. Phys. C **48**, 673 (1990).
3. L. V. Avdeev and M. Y. Kalmykov, Nucl. Phys. B **502**, 419 (1997).
4. J. Fleischer, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov, and O. L. Veretin, Nucl. Phys. B **539**, 671 (1999) [Erratum: J. Fleischer, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov, and O. L. Veretin, Nucl. Phys. B **571**, 511 (2000)].
5. K. Melnikov and T. van Ritbergen, Phys. Lett. B **482**, 99 (2000).
6. K. G. Chetyrkin and M. Steinhauser, Nucl. Phys. B **573**, 617 (2000).
7. S. Bekavac, A. Grozin, D. Seidel, and M. Steinhauser, JHEP **0710**, 006 (2007).
8. R. Lee, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov, and M. Steinhauser, JHEP **1303**, 162 (2013).
9. P. Ball, M. Beneke, and V. M. Braun, Nucl. Phys. B **452**, 563 (1995).
10. P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov, and M. Steinhauser, Phys. Rev. Lett. **114**(14), 142002 (2015).
11. A. L. Kataev and V. S. Molokoedov, Eur. Phys. J. Plus **131**(8), 271 (2016).
12. P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov, M. Steinhauser, and D. Wellmann, Phys. Rev. D **94**(7), 074025 (2016).
13. A. L. Kataev and V. S. Molokoedov, arXiv:1807.05406 [hep-ph].
14. I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, Phys. Rev. D **50**, 223 (1994).
15. M. Beneke and V. M. Braun, Nucl. Phys. B **426**, 301 (1994).
16. G. Grunberg, Phys. Rev. D **29**, 2315 (1984).
17. A. L. Kataev and V. V. Starshenko, Mod. Phys. Lett. A **10**, 235 (1995).
18. K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl, and A. Sirlin, Phys. Lett. B **402**, 359 (1997).
19. A. L. Kataev and V. T. Kim, Phys. Part. Nucl. **41**, 946 (2010).
20. M. Beneke, Phys. Lett. B **344**, 341 (1995).
21. M. Beneke, Phys. Rept. **317**, 1 (1999).
22. A. Pineda, JHEP **0106**, 022 (2001).
23. M. Beneke, P. Marquard, P. Nason, and M. Steinhauser, Phys. Lett. B **775**, 63 (2017).
24. F. Campanario, A. G. Grozin, and T. Mannel, Nucl. Phys. B **663**, 280 (2003) [Erratum: F. Campanario, A. G. Grozin, and T. Mannel, Nucl. Phys. B **670**, 331 (2003)].
25. C. Ayala, G. Cvetič, and A. Pineda, JHEP **1409**, 045 (2014).
26. D. J. Broadhurst, A. L. Kataev, and C. J. Maxwell, Nucl. Phys. B **592**, 247 (2001).
27. V. Mateu and P. G. Ortega, JHEP **1801**, 122 (2018).