Письма в ЖЭТФ, том 108, вып. 12, с. 834 – 837

Цепочка Вольтерра и числа Каталана

В. Э. Адлер[1)], А. Б. Шабат

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2018

Рассматривается задача Коши для цепочки Вольтерра с начальным условием, равным 0 в одном узле и 1 в остальных. Показано, что эта задача допускает точное решение в терминах функций Бесселя. Возникающие здесь ряды Тейлора связаны с экспоненциальной производящей функцией для чисел Каталана.

DOI: 10.1134/S0370274X18240116

1. Производящая функция. Рассмотрим цепочку Вольтерра

$$u_n' = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \tag{1}$$

где $u_n = u_n(t)$, штрих обозначает производную по t. Дифференцируя уравнения, можно выразить старшие производные $u_n^{(k)}$ как многочлены от $u_{n-k}, \dots, u_{n+k}$. Это позволяет вычислять производные любого порядка по начальным данным $u_n(0)$ и строить решение задачи Коши для (1) в виде рядов Тейлора. Если начальные данные ограничены, то для коэффициентов этих рядов нетрудно получить оценки, из которых следует, что радиус сходимости больше 0 [1]. Как правило, этот радиус оказывается не очень большим, а вычисление производных является довольно трудоемкой процедурой. Тем не менее, имеется, по крайней мере, один интересный случай, когда коэффициенты ряда Тейлора можно вычислить явно и, тем самым, получить точное решение цепочки. Продолжая исследование, начатое в [1], мы рассматриваем специальные начальные условия типа ступеньки на полуоси $n \ge 0$:

$$u_0(0) = 0, \quad u_1(0) = u_2(0) = \dots = 1. \tag{2}$$

При этом обнаруживается связь с несколькими результатами из комбинаторики: оказывается, что рассматриваемые ряды выражаются через экспоненциальную производящую функцию для чисел Каталана. В свою очередь, эта функция выражается через функцию Бесселя мнимого аргумента [2, A000108]. В результате, мы получаем решение задачи (1), (2), записанное с помощью вронскианов от этой функции и ее производных. В комбинаторике этому отвечает преобразование Ханкеля [3], осуществляющее переход от чисел Каталана к последовательности из единиц. Следует отметить, что связь чисел Каталана с интегрируемыми системами уже неоднократно отмечалась, например, в теории бездисперсионной цепочки Тоды [4].

Вместе с цепочкой (1) удобно рассматривать модифицированную цепочку

$$v_n' = v_n^2(v_{n+1} - v_{n-1}) \tag{3}$$

с начальными данными

$$v_0(0) = 0, \quad v_1(0) = v_2(0) = \dots = 1. \tag{4}$$

Легко проверяется, что решения этой задачи и задачи (1), (2) связаны подстановкой (дискретное преобразование Миуры)

$$u_n = v_n v_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из нулевых начальных условий при $n = 0$ следует, что $u_0(t) = v_0(t) = 0$ при всех t и уравнения обеих цепочек естественно ограничиваются на полуось $n > 0$. Функции u_1 и v_1 связаны заменой

$$u_1 = \frac{v_1'}{v_1}. \tag{5}$$

Прямое вычисление при помощи уравнений (3), (4), нескольких старших производных $v_1^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, приводит к числам Каталана [2, A000108]

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ 16796, \dots$$

Аналогично, вычисления в силу уравнений (1), (2) или по формуле (5) дают для производных $u_1^{(n)}(0)$ последовательность [2, A302197]

$$1,\ 1,\ 1,\ 0,\ -4,\ -10,\ 15,\ 210,\ 504,\ -3528,\ -34440, \dots,$$

отвечающую логарифму Гурвица чисел Каталана. Чтобы обосновать эти наблюдения, нам потребуются вронскианные формулы для решения цепочек [5].

1)e-mail: adler@itp.ac.ru

Утверждение 1. *Пусть $v_0 = 0$ и $v_1 = f(t)$, тогда решения цепочек (3) и (1) при $n \ge 0$ имеют вид*

$$v_n = \frac{w_{n-3}w_{n-1}}{w_{n-2}^2}, \quad u_n = \frac{w_{n-3}w_n}{w_{n-2}w_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

где $w_{-3} = 0$, $w_{-2} = w_{-1} = 1$ и, при $k \ge 0$,

$$w_{2k} = \begin{vmatrix} f & f' & \ldots & f^{(k)} \\ f' & f'' & \ldots & f^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k)} & f^{(k+1)} & \ldots & f^{(2k)} \end{vmatrix},$$

$$w_{2k+1} = \begin{vmatrix} f' & f'' & \ldots & f^{(k+1)} \\ f'' & f'' & \ldots & f^{(k+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(k+1)} & f^{(k+2)} & \ldots & f^{(2k+1)} \end{vmatrix}.$$

Сравним эти формулы с преобразованием Ханкеля для чисел Каталана [3]. Напомним, что помимо явной формулы

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

числа Каталана могут быть определены любым из следующих рекуррентных соотношений:

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n, \quad c_0 = 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

$$c_{n+1} = c_0c_n + \cdots + c_nc_0, \quad c_0 = 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Для произвольной последовательности a_n преобразованием Ханкеля называется последовательность главных миноров бесконечной матрицы с (i,j)-м элементом равным a_{i+j-2}. Одно из многих замечательных свойств последовательности c_n заключается в том, что если к ней применить это преобразование, то получится последовательность из 1, и это же верно для последовательности с отброшенным c_0 [3].

Утверждение 2. *При $k \ge 0$ выполнены тождества*

$$H_{2k} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_k \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & c_{k+1} & \ldots & c_{2k} \end{vmatrix} = 1,$$

$$H_{2k+1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{k+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \ldots & c_{2k+1} \end{vmatrix} = 1.$$

Доказательство. Используем элементарные преобразования определителей с учетом соотношений (8). Рассмотрим сначала H_{2k} и применим преобразование над строками $A_i = (c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{i+k})$:

$$A_i \to A_i - c_{i-1}A_0 - \cdots - c_0A_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Согласно (8), при этом 0-й столбец превратится в $(1, 0, \ldots, 0)^t$ и определитель сведется к определителю размера $k \times k$, в котором на позиции (i,j) стоит

$$c_{i+j} - c_{i-1}c_j - \cdots - c_0c_{i+j-1} = c_0c_{i+j-1} + \cdots + c_{j-1}c_i,$$

т.е.

$$\begin{vmatrix} c_0c_1 & c_0c_2 + c_1^2 & \ldots & c_0c_k + \cdots + c_{k-1}c_1 \\ c_0c_2 & c_0c_3 + c_1c_2 & \ldots & c_0c_{k+1} + \cdots + c_{k-1}c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0c_k & c_0c_{k+1} + c_1c_k & \ldots & c_0c_{2k-1} + \cdots + c_{k-1}c_k \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что $c_0 = 1$ и делая преобразования над столбцами, приходим к определителю H_{2k-1}. Тем самым, доказано, что $H_{2k} = H_{2k-1}$. Далее, рассмотрим определитель H_{2k+1}. Преобразуя строки

$$A_i \to A_i - c_{i-2}A_1 - \cdots - c_0A_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, k+1,$$

придем к определителю размера $(k+1) \times (k+1)$, в котором на позиции (i,j) при $i > 1$ стоит

$$c_{i+j-1} - c_{i-2}c_j - \cdots - c_0c_{i+j-2} =$$
$$= c_0c_{i+j-2} + \cdots + c_{j-1}c_{i-1}.$$

Элементы же первой строки заменим, согласно (8), на $c_{j+1} = c_0c_j + \cdots + c_jc_0$, в результате получим

$$\begin{vmatrix} c_0^2 & c_0c_1 + c_1c_0 & \ldots & c_0c_k + \cdots + c_kc_0 \\ c_0c_1 & c_0c_2 + c_1^2 & \ldots & c_0c_{k+1} + \cdots + c_kc_1 \\ c_0c_2 & c_0c_3 + c_1c_2 & \ldots & c_0c_{k+2} + \cdots + c_kc_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0c_k & c_0c_{k+1} + c_1c_k & \ldots & c_0c_{2k} + \cdots + c_k^2 \end{vmatrix}.$$

Преобразуя столбцы, получаем $H_{2k+1} = H_{2k}$.

Нам также понадобится выражение для экспоненциальной производящей функции последовательности c_n через модифицированную функцию Бесселя $I_0(z)$ (или функцию Бесселя мнимого аргумента), которая определяется, как решение задачи Коши

$$zI_0'' + I_0'(z) - zI_0(z) = 0, \quad I_0(0) = 1, \quad I_0'(0) = 0. \tag{9}$$

Утверждение 3 ([2, A000108, K. A. Penson]). *Экспоненциальная производящая функция для чисел Каталана равна*

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + \frac{c_n}{n!}t^n + \dots = \\ = e^{2t}(I_0(2t) - I_0'(2t)). \qquad (10)$$

Доказательство. Делая указанную замену в уравнении (9), получаем

$$tf''(t) + 2(1-2t)f'(t) - 2f(t) = 0, \quad f(0) = 1. \qquad (11)$$

Подставляя сюда ряд Тейлора для $f(t)$, получаем рекуррентные соотношения (7), что и требуется.

Теперь утверждение о том, что производные v_1 при $t = 0$ совпадают с числами Каталана получается, как простое следствие. Окончательно получаем следующий результат.

Теорема 4. *Решения задач Коши (1), (2) и (3), (4) определяются формулами (6) с определителями w_n, построенными по функции $f(t) = e^{2t}(I_0(2t) - I_0'(2t))$.*

Доказательство. Подставляя $t = 0$ в (6), находим, что $w_n(0) = 1$ при всех n. Эти соотношения совпадают с соотношениями $H_n = 1$, определяющими числа Каталана однозначно. Следовательно, функция $v_1 = f$ обладает тем свойством, что $f^{(n)}(0) = c_n$ и остается применить утверждение 3.

2. Асимптотика решения. Функция $f(t)$ является целой и имеет экспоненциальный рост при $t \to +\infty$. Наоборот, функция

$$u_1(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{I_0(2t) - I_2(2t)}{I_0(2t) - I_1(2t)}$$

имеет конечный предел при $t \to +\infty$ и полюсные особенности в комплексной области. Формулы (6) можно использовать для построения графика решения при t, большем чем радиус сходимости соответствующих рядов Тейлора. Как видно на рис. 1, 2, при $t \to +\infty$ переменные $u_n(t)$ с нечетными номерами растут, стремясь к конечному пределу, с четными – стремятся к 0; при $t \to -\infty$ все переменные стремятся к 0.

Для вывода асимптотических формул используем то, что функция $I_0(z)$ четна и ее асимптотика при $z \to +\infty$ имеет вид [6]

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\Big(1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{16z^2} + \dots\Big),$$

где коэффициенты ряда вычисляются при подстановке в уравнение (9). При переходе к функции $v_1(t) = f(t)$ получаем экспоненциальный рост при положительных t и степенное убывание при отрицательных:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{4t}}{8\sqrt{\pi t^3}}\Big(1 + \dfrac{3}{16t} + \dfrac{45}{512t^2} + \dots\Big), & t \to +\infty, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\pi t}}\Big(1 + \dfrac{1}{16t} - \dfrac{3}{512t^2} + \dots\Big), & t \to -\infty. \end{cases}$$

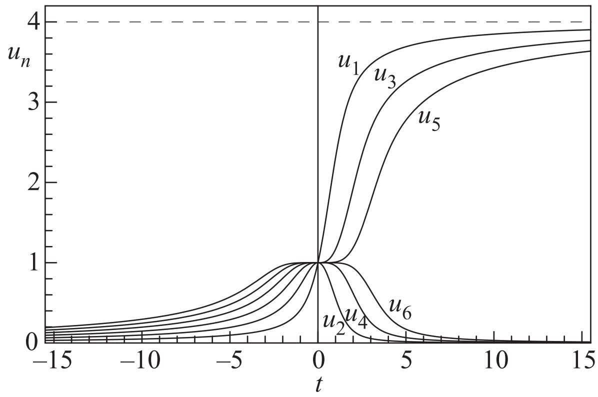

Рис. 1. Функции $u_n(t)$

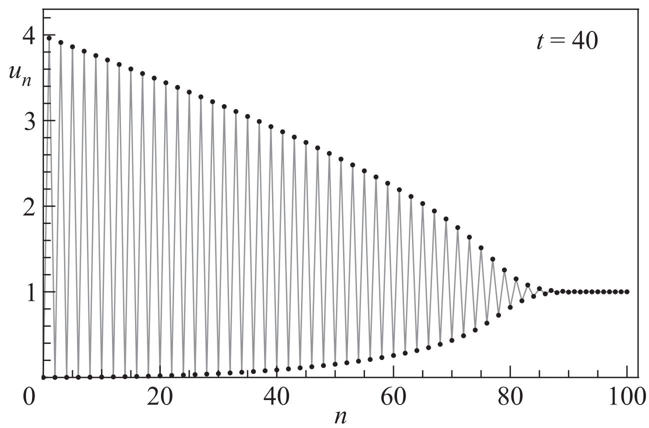

Рис. 2. Профиль решения при $t = 40$

В обоих случаях коэффициенты рядов в скобках можно найти подстановкой в уравнение (11). Отсюда нетрудно получить и асимптотические разложения для $u_1(t)$, но проще это сделать непосредственно, преобразуя (11) к уравнению Риккати

$$u_1' + u_1^2 - \Big(4 - \frac{2}{t}\Big)u_1 - \frac{2}{t} = 0.$$

Подставляя $u_1 = a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots$, находим для свободного члена значения $a_0 = 4$, $a_0 = 0$, остальные коэффициенты вычисляются однозначно. Сравнение с формулами для f показывает, что эти два решения отвечают асимптотикам при $t \to \pm\infty$:

$$u_1(t) = \begin{cases} 4 - \dfrac{3}{2t} - \dfrac{3}{16t^2} - \dfrac{9}{64t^3} - \dots, & t \to +\infty, \\ -\dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{16t^2} + \dfrac{1}{64t^3} + \dots, & t \to -\infty. \end{cases}$$

Далее, непосредственно из уравнений цепочки (1) следует, что при $t \to +\infty$ переменные u_n имеют асимптотику

$$u_{2j} = \frac{\alpha_j}{t^2} + \dots, \quad u_{2j+1} = 4 - \frac{\beta_j}{t} + \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

где коэффициенты удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\alpha_{j+1}-\alpha_j=\frac{\beta_j}{4},\quad \beta_{j+1}-\beta_j=2,\quad \alpha_0=0,\quad \beta_0=\frac{3}{2}.$$

Аналогично, при $t\to-\infty$ имеем $u_n=\dfrac{\gamma_n}{t}+\dots$ и

$$\gamma_0=0,\quad \gamma_1=-\frac{1}{2},\quad \gamma_{n+2}-\gamma_n=-1,\quad n=0,1,2,\dots$$

Решая эти уравнения, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 5. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\begin{cases} u_{2j-1}(t)=4-\dfrac{4j-1}{2t}+O(t^{-2}), \\ u_{2j}(t)=\dfrac{j(2j+1)}{8t^2}+O(t^{-3}), \end{cases}\qquad t\to+\infty,$$

$$u_n(t)=-\frac{n}{2t}+O(t^{-2}),\quad t\to-\infty.$$

3. Дальнейшие обобщения. Разобранное решение не является исключительным. Экспериментируя с разными цепочками и начальными условиями, можно найти и другие примеры, когда коэффициенты рядов Тейлора допускают замкнутое выражение или комбинаторную интерпретацию. Мы надеемся, что изучение этой взаимосвязи может оказаться плодотворным. В заключение приведем еще два примера такого рода.

1) Рассмотрим вместо (3) модифицированную цепочку Нарита–Ито–Богоявленского порядка m [7]

$$v_n'=v_n^2(v_{n+m}\cdots v_{n+1}-v_{n-1}\cdots v_{n-m}),$$

с начальными данными $v_0(0)=0$, $v_n(0)=1$ при $n>0$. Как и раньше, при этом уравнения цепочки ограничиваются на полуось $n>0$. Прямое вычисление производных v_1 в точке $t=0$ приводит к последовательностям из [2]

$m=2: 1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, \dots$	$A001764$
$m=3: 1, 1, 4, 22, 140, 969, 7084, \dots$	$A002293$
$m=4: 1, 1, 5, 35, 285, 2530, 23751, \dots$	$A002294$
$m=5: 1, 1, 6, 51, 506, 5481, 62832, \dots$	$A002295$

известным как числа Пфаффа–Фусса–Каталана [8], с общей формулой

$$C_n^{(m+1)}=\frac{1}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n},\quad n=0,1,2,\dots$$

($m=1$ отвечает самим числам Каталана). Однако при $m>1$ доказательство того, что $v_1^{(n)}(0)=C_n^{(m+1)}$, пока отсутствует.

2) Опять рассмотрим модифицированную цепочку Вольтерра, но с линейно растущим начальным условием:

$$v_n'=v_n^2(v_{n+1}-v_{n-1}),\quad v_n(0)=n,\quad n\ge 0.$$

Вычисление производных $v_1^{(n)}(0)=a_n$ в силу цепочки приводит к последовательности [2, A000182]

$$1,\ 2,\ 16,\ 272,\ 7936,\ 353792,\ 22368256,\dots,$$

обладающей тем свойством, что если разрядить ее нулями, то экспоненциальная производящая функция будет равна

$$\tan x=a_0x+a_1\frac{x^3}{3!}+\dots+a_n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$$

Однако, неразреженная последовательность имеет слишком быстрый рост и ряд Тейлора $v_1(t)=a_0+a_1t+\dots+a_n\dfrac{t^n}{n!}+\dots$ имеет нулевой радиус сходимости, т.е. в данном случае решение является формальным.

Работа В.Э. Адлера поддержана грантом РФФИ 16-01-00289а, работа А.Б. Шабата поддержана грантом РНФ # 15-11-20007.

1. Р. Ч. Кулаев, А. Б. Шабат, Уфимский Мат. журнал, принято в печать (2018).
2. N. J. A. Sloane, http://oeis.org (2010).
3. J. W. Layman, J. of Integer Sequences **4**, Article 01.1.5 (2001).
4. Y. Kodama and V. U. Pierce, Comm. Math. Phys. **292**(2), 529 (2009).
5. А. Н. Лезнов, Теор. Мат. Физ. **42**(3), 343 (1980).
6. М. Абрамовиц, И. А. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям*, Наука, М. (1979.)
7. O. I. Bogoyavlensky, Russ. Math. Surveys **46**(3), 1 (1991).
8. R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA (1990).