Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 3, с. 200 – 205 © 2019 г. 10 февраля

Об эффективной теории скирмионного кристалла

В. Е. Тимофеев[+*×], А. О. Сорокин[+*], Д. Н. Аристов[+*1)]

[+] НИЦ "Курчатовский Институт", Петербургский Институт Ядерной Физики, 188300 Гатчина, Россия

[*] Санкт-Петербургский Государственный Университет, 199034 С.-Петербург, Россия

[×] Санкт-Петербургский Электротехнический Университет "ЛЭТИ", 197376 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 6 ноября 2018 г.
После переработки 3 декабря 2018 г.
Принята к публикации 4 декабря 2018 г.

При помощи метода стереографической проекции рассматриваются многоскирмионные конфигурации в двумерном ферромагнетике в присутствии взаимодействия Дзялошинского–Мории и внешнего магнитного поля. Без взаимодействия Дзялошинского–Мории D и магнитного поля B скирмионы не взаимодействуют, и точным многоскирмионным решением является сумма стереографических проекций индивидуальных решений. В некотором диапазоне $B, D \neq 0$, энергетически выгодной становится гексагональная упаковка скирмионов. Форма одного скирмиона полностью определяется параметрами D и B. Мы описываем многоскирмионные конфигурации как сумму стереографических проекций индивидуальных скирмионов, в предположении, что при изменении размера скирмиона его форма не меняется. Такое рассмотрение позволяет учесть парное и непарное взаимодействие между скирмионами и рассчитать плотность энергии решетки скирмионов, в согласии с предыдущими исследованиями. Тем самым становится возможной эффективная теория скирмионного кристалла, описывающая его поведение в терминах позиций центров индивидуальных скирмионов, их размеров, фаз, эллиптических деформаций и т.д.

DOI: 10.1134/S0370274X19030135

1. В последние годы наблюдается особый интерес к топологическим свойствам твердых тел. В контексте магнитных явлений, одним из объектов активных теоретических и экспериментальных исследований являются топологически нетривиальные спиновые структуры, называемые скирмионными кристаллами. Подобные структуры наблюдаются в двумерных магнетиках при различных условиях (см. обзоры [1, 2]), в частности, в присутствии внешнего магнитного поля и взаимодействия Дзялошинского–Мории (ДМ) [3–6], при геометрической фрустрации [7], или четырехспинового обменного взаимодействия [8]. В первом случае решетка скирмионов имеет характерный размер существенно больше постоянной решетки и наблюдается в ряде различных экспериментов [8–11].

Математическое описание подобных структур является непростой задачей. Одна из проблем описания в терминах индивидуальных скирмионов связана со стабилизацией самих скирмионов. Строго говоря, единичный скирмион нестабилен даже в присутствии взаимодействия ДМ и внешнего магнитного поля. В частности, условием существования единичного скирмиона является требование однородности намагниченности на бесконечности, в то время как взаимодействие ДМ приводит к модулированному основному состоянию [12, 13]. Таким образом, скирмион может рассматриваться как стабильная конфигурация намагниченности лишь на диске конечного радиуса или же как элемент решетки скирмионов [4].

В отсутствие взаимодействия ДМ и внешнего магнитного поля, многоскирмионные конфигурации описываются решениями Белавина–Полякова (БП) [14], при этом энергия подобной конфигурации не зависит от расстояния между отдельными скирмионами, что говорит об отсутствии взаимодействия между ними. В свою очередь взаимодействие ДМ и магнитное поле не только определяют форму скирмионов, но и приводят к появлению взаимодействия между ними. Более того, данное взаимодействие приводит к нарушению симметрии системы, и как следствие, пространство параметра порядка меняется с $G/H = SO(3)/SO(2)$ в случае БП на $G/H = SO(2) \otimes SO(2)$ [15]. Это означает, что решетку скирмионов лучше описывать как систему абрикосовских вихрей, нежели скирмионов БП (см. [16–18]).

Другой способ описания решетки скирмионов основан на аналогии с одномерным спиральным маг-

1)e-mail: aristov@thd.pnpi.spb.ru

нетиком с анизотропией типа легкая плоскость [19–22], для которого решетка скирмионов и спираль (деформированная внешним магнитным полем) – эквивалентные конфигурации. Двумерная скирмионная решетка схожа (но не совпадает) с суперпозицией трех спиралей, направленных под углом в 120° относительно друг друга [9]. Однако точное решение для подобной конфигурации пока не найдено, а потому представление скирмионной решетки в терминах одиночных скирмионов остается наиболее полезным для изучения аналитическими методами как самой этой структуры, так и ее низкоэнергетической динамики. Ниже будет показано, что форма ядра скирмиона оказывается нечувствительной как к вариации параметров модели (в широком диапазоне), так и к малым деформациям решетки.

В данной работе мы рассматриваем многоскирмионные конфигурации как сумму стереографических проекций индивидуальных скирмионов в духе работы [14]. Сначала мы находим оптимальную форму и размер одного скирмиона на диске конечного радиуса с "однородным" граничным условием. Подобное рассмотрение является естественным для единичного скирмиона, но не годится для решетки скирмионов, однако, относительная устойчивость формы такого скирмионного решения относительно деформаций, позволяет сконструировать многоскирмионную конфигурацию из решений для единичных скирмионов. Энергия, отвечающая такой пробной функции, находится в хорошем согласии с предыдущими расчетами.

Мы также обсуждаем взаимодействие между двумя и тремя скирмионами, причем оказывается, что при рассмотрении реалистичных конфигураций, как например, ячейка гексагонального кристалла, тройным взаимодействием пренебрегать нельзя. Предложенный нами подход позволит относительно просто рассмотреть динамику решетки скирмионов в терминах коллективных переменных, описывающих различные деформации стереографических проекций индивидуальных скирмионов. Соответствующий анализ и особенности динамики будут представлены в отдельной работе.

2. Мы рассматриваем непрерывную модель двумерного ферромагнетика с изотропным обменным взаимодействием C, взаимодействием Дзялошинского–Мории D и внешним магнитным полем B. Классическая энергия модели, $E = \int d\mathbf{r}\,\mathcal{H}$, дается плотностью энергии:

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}C\partial_\mu\varphi^i\partial_\mu\varphi^i - D\epsilon_{\mu ij}\varphi^i\partial_\mu\varphi^j + B(1-\varphi^3), \quad (1)$$

где $\varphi^i = \langle S^i\rangle/S$ есть средняя локальная намагниченность, здесь $\epsilon_{\mu ij}$ – антисимметричный тензор $i = 1, 2, 3$ и $\mu = 1, 2$; мы полагаем ниже $C = 1$. Мы не рассматриваем здесь дальнодействующее магнитодипольное взаимодействие, эффект которого в присутствии взаимодействия ДМ для плоского магнетика сводится к локальной анизотропии обмена в (1) [23].

При нулевой температуре вектор намагниченности имеет постоянную длину $\varphi^i\varphi^i = 1$, так что $\boldsymbol{\varphi} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Перейдем к стереографической проекции

$$\varphi^1 + i\varphi^2 = \frac{2f(z,\bar z)}{1+f(z,\bar z)\bar f(z,\bar z)},\qquad \varphi^3 = \frac{1-f(z,\bar z)\bar f(z,\bar z)}{1+f(z,\bar z)\bar f(z,\bar z)}, \quad (2)$$

где $f(z,\bar z)$ – функция комплексных переменных $z = x+iy$ и $\bar z = x - iy$.

Вводя обозначения $\partial_z \to \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial y)$ и $\partial_{\bar z} \to \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial y)$, можно переписать энергию $E = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\,\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H}[f] = \frac{4(\partial_z f\partial_{\bar z}\bar f + \partial_z\bar f\partial_{\bar z}f)}{(1+f\bar f)^2} + \frac{2iD(\bar f^2\partial_{\bar z}f + \partial_{\bar z}\bar f - \partial_z f - f^2\partial_z\bar f)}{(1+f\bar f)^2} + \frac{2Bf\bar f}{1+f\bar f}, \quad (3)$$

причем топологический заряд выражается в терминах f как

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\frac{4(\partial_z\bar f\partial_{\bar z}f - \partial_z f\partial_{\bar z}\bar f)}{(1+f\bar f)^2}. \quad (4)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет существенно нелинейный вид

$$2f\partial_z\bar f\partial_{\bar z}\bar f - (1+f\bar f)\partial_z\partial_{\bar z}\bar f - iD(\bar f\partial_{\bar z}\bar f + f\partial_z\bar f) + \frac{1}{4}B\bar f(1+f\bar f) = 0, \quad (5)$$

его решение не может быть найдено аналитически. Однако, в простейшем случае $D = B = 0$ решением этого уравнения является любая голоморфная или антиголоморфная функция [14]. В частности, решению с единичным скирмионом соответствует $f = z_0/\bar z$, с произвольным комплексным z_0. Многоскирмионное же решение дается суммой

$$f(z) = \sum_j \frac{z_0^{(j)}}{\bar z - \bar z_j}. \quad (6)$$

Это наблюдение позволяет нам выбрать пробную функция для одного скирмиона при $D, B \neq 0$ в виде:

$$f(z,\bar z) = \frac{e^{i\alpha}\kappa(z\bar z)}{\bar z}, \quad (7)$$

с вещественной функцией $\kappa(z\bar{z})$. В случае БП для одного скирмиона κ есть константа, равная характерному масштабу скирмиона и его размеру, см. ниже.

В случае $D, B \neq 0$ функция κ находится численно, является гладкой функцией и экспоненциально спадает на больших расстояниях. Фаза скирмиона определяется равенством $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sign D и зависит от знака взаимодействия ДМ; это значит, что намагниченность в каждой точке направлена перпендикулярно направлению $\mathbf{r}$.

Следует обсудить несколько пространственных масштабов, возникающих в задаче.

i) Главным масштабом в задаче является $L = C/D$, ассоциирующийся с шагом спирали, возникающей в образце при низких температурах, при отсутствии внешнего магнитного поля.

ii) Другой характерной длиной в задаче является масштаб скирмиона, а именно, вычет функции стереографической проекции в центре скирмиона. Его величина определяется, в том числе, расстоянием до других скирмионов и обозначена z_0.

iii) Радиус скирмиона дается условием $\langle\varphi^3\rangle = 0$ или $|f(z,\bar{z})| = 1$, если центр скирмиона отвечает значению $\langle\varphi^3\rangle = -1$, т.е. максимальной проекции $|f(z,\bar{z})| \to \infty$.

iv) Экспоненциальный характер убывания скирмионного "хвоста" определяется другим масштабом, а именно, корреляционной длинной в однородном ферромагнетике, $\ell = (C/B)^{1/2}$.

v) Наконец, имеется период гексагональной решетки скирмионного кристалла, a, см. рис. 1.

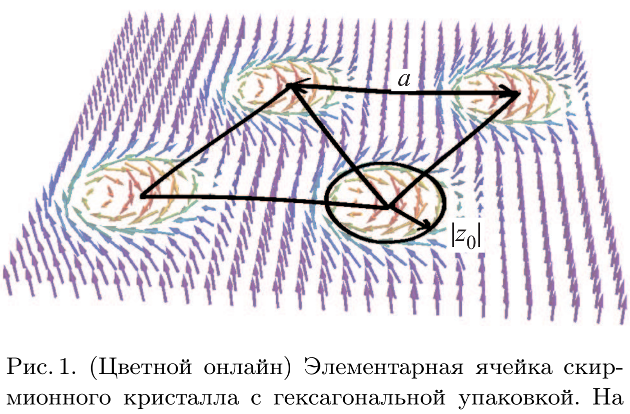

Рис. 1. (Цветной онлайн) Элементарная ячейка скирмионного кристалла с гексагональной упаковкой. На рисунке показаны два масштаба: параметр решетки a, и размер скирмиона, z_0

Оказывается, что в рассматриваемой области параметров все эти масштабы длины - одного порядка. В этом смысле мы имеем дело со скирмионом малого радиуса, в отличии от [24].

3. Решение БП (6) интересно тем, что при $D = B = 0$ скирмионы не взаимодействуют друг с другом. В нашем же случае это не так, поэтому рассмотрение статической мультискирмионной конфигурации проводится в несколько шагов. В характерном диапазоне параметров задачи единичный скирмион вносит вклад в энергию $\mu \sim C$, что соответствует химическому потенциалу. Мультискирмионная конфигурация формируется на следующем шаге, причем расстояние между отдельными скирмионами a определяется их взаимодействием. При этом отталкивание между отдельными скирмионами может уменьшаться за счет некоторого увеличения энергии одного скирмиона при изменения функции κ. На последнем шаге мы рассмотрим гексагональную решетку скирмионов, в которой каждый скирмион испытывает давление со стороны шести своих соседей. Чтобы определить изменение функции профиля при наличии такого высокосимметричного окружения, мы рассмотрим скирмион на диске конечного радиуса.

Вид функции профиля дается уравнением

$$\kappa(B\kappa^2 - 4\kappa(D+2\kappa') + x(B+8\kappa'^2)) = 4x(x+\kappa^2)\kappa'', \quad (8)$$

где $x = z\bar{z}$, $\kappa'(x) = d\kappa(x)/dx$ и т.д. В случае БП, при $B = D = 0$, уравнение имеет два решения: скирмионное, $\kappa \sim 1$, $\kappa \sim x$, и меронное, $\kappa = x^{1/2}$.

Мы решаем уравнение (8) на диске большого радиуса $R \gg L$, с граничным условием $\kappa(R^2) = 0$, методом "стрельбы" для не очень больших R. Вид $\kappa(x)$ в пределе $R \to \infty$ дается сшиванием решений при малых x с асимптотикой на больших расстояниях.

Сравнивая решения, полученные для различных R, мы обнаруживаем интересное свойство функции $\kappa(x)$. В диапазоне значений от $R = \infty$ до $R = 4/D$ функция $\kappa(x)$ меняет свою амплитуду, но не свою форму.

Чтобы это увидеть, введем безразмерную величину $b = BC/D^2 = L^2/\ell^2$, и перепишем вычет в точке $\bar{z} = 0$ выражения (7) в безразмерной форме $\kappa(0) = Lk$. Заметим, что k есть функция радиуса диска R, см. рис. 2. Далее введем безразмерную функцию

$$\widetilde{\kappa}(y) = (kL)^{-1}\kappa\left(y\,k^2L^2\right), \quad (9)$$

график которой показан на рис. 3 для различных значений R.

На этом рисунке видно, что для дисков различных радиусов меняется только "хвост" решения $\widetilde{\kappa}(y)$, в то время как "ядро" остается неизменным. Это интересное свойство сохранения формы ядра скир-

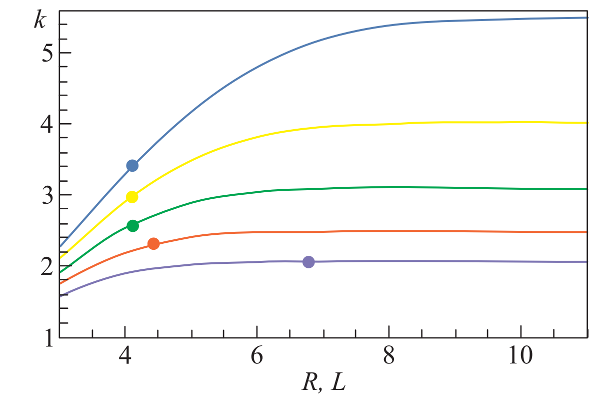

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость значения безразмерного вычета k, для полей $b = 0.4$, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, кривые сверху вниз соответственно, от радиуса диска R, на котором ищется решение. Жирными точками указаны значения, отвечающие минимуму плотности энергии скирмионного кристалла

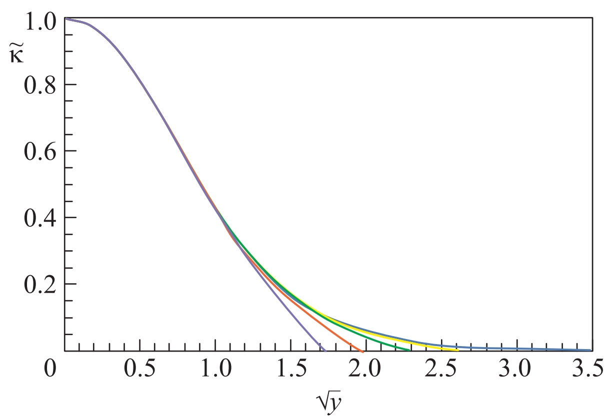

Рис. 3. (Цветной онлайн) Профильные функции $\widetilde{\kappa}(y)$, уравнение (9), полученные для различных значений радиуса диска в интервале от $R = 5L$ до $R = 11L$ при $b = 0.6$. При небольших значениях аргумента форма функции почти не зависит от R

миона происходит из уравнения (8). Раскладывая $\widetilde{\kappa}(y) = 1 + c_1 y + c_2 y^2/2 + \ldots$ в уравнении (8), находим

$$c_1 = \frac{1}{8}k(bk-4) = -\frac{1}{2b} + \frac{b}{8}\left(k - \frac{2}{b}\right)^2,$$
$$c_2 = \frac{1}{3b} + \frac{1}{48}\left(k - \frac{2}{b}\right)\left(b^2k^3 - 4bk(k-1) + 8\right). \tag{10}$$

Оказывается, что в рассматриваемом диапазоне $b \in (0.3, 0.8)$ значения k, отвечающие минимуму плотности энергии, определяются соотношением $bk \approx 2$, как видно на рис. 2. Это приводит к малости вторых членов в разложении $c_{1,2}$, таким образом, коэффициенты $c_1 \simeq -\frac{1}{2b}$, $c_2 \simeq \frac{1}{3b}$, слабо зависят от k, что проявляется в квазиинвариантности безмасштабной профильной функции $\widetilde{\kappa}(y)$ при $y \lesssim 1$, см. рис. 3. Профильная функция может быть с хорошей точностью аппроксимирована функцией Гаусса $\widetilde{\kappa}(y) \simeq \exp(-y/(2b))$ для $y/b \sim |z|^2\ell^2/L^4$. На больших расстояниях, $y \gg 1$, квазиинвариантность теряется, поскольку настоящая асимптотика дается функцией $\widetilde{\kappa}(y) \sim y^{1/4}\exp(-k\sqrt{by})$; для нашего дальнейшего анализа это неважно. Радиус скирмиона r, определяющийся условием $|F(r/z_0)| = 1$, всегда меньше, чем$|z_0|$ так как $\tilde{\kappa}(x) \leq 1$; мы имеем r в диапазоне от $r \simeq 0.6|z_0|$ при $b = 0.2$, до $r \simeq 0.72|z_0|$ при $b = 0.8$.

Далее мы пользуемся свойством квазиинвариантности $\widetilde{\kappa}(y)$ в наиболее важной области $r \lesssim L$. Сначала мы вычисляем функцию $\kappa(x)$, при заданном b, в пределе большого радиуса диска $R/L \to \infty$, будем называть ее $\tilde{\kappa}_\infty(y)$. Далее мы определяем анзац для функции одного скирмиона (ср. (7))

$$f(z,\bar{z}) = F\left(\frac{\bar{z}}{z_0}\right) \equiv \frac{z_0}{\bar{z}}\tilde{\kappa}_\infty\left(\left|\frac{\bar{z}}{z_0}\right|^2\right), \tag{11}$$

с комплексной величиной z_0, рассматриваемой в качестве вариационного параметра. Выражения (3), (11) приводят к квадратичному выражению для энергии

$$E_1(z_0) = C(a_1 - a_2 \mathrm{Im}\,(z_0)/L + a_3|z_0|^2/\ell^2). \tag{12}$$

По построению минимум энергии достигается при чисто мнимом значении z_0, с $|z_0| = k_{R=\infty}L$, равном масштабу одного скирмиона на плоскости.

4. Пользуясь свойством квазиинвариантности формы одиночного скирмиона, мы предлагаем моделировать многоскирмионное решение суммой:

$$f(z) = \sum_j F\left((\bar{z} - \bar{z}_j)/z_0^{(j)}\right) \equiv \sum_j f_j, \tag{13}$$

где z_j – центр j-го скирмиона, а $z_0^{(j)}$ – его масштаб. В случае $D = B = 0$, эта формула переходит в уравнение (6). Ниже мы рассматриваем случай скирмионов одинакового масштаба $z_0^{(j)} = z_0$, имеющего чисто мнимое значение.

Рассматриваемый анзац (7) автоматически отвечает условию $Q = 1$ на топологический заряд для одиночного скирмиона. Сумма (13) стереографических проекций N скирмионов отвечает топологическому заряду, равному N, что можно легко увидеть для $\tilde{\kappa} \equiv 1$, и доказать в общем случае, пользуясь непрерывной деформацией $\kappa(z\bar{z})$, при которой топологический заряд не меняется. Мы также проверили это свойство численно.

Взаимодействие между скирмионами есть не что иное, как разница между энергией всей конфигурации и суммой энергий отдельных скирмионов:

$$U = \mathcal{H}\left[\sum_j f_j\right] - \sum_j \mathcal{H}[f_j]. \tag{14}$$

Выражение (3) для $\mathcal{H}[f]$ весьма громоздкое и приводит к возникновению как парного взаимодействия, так и заметного по величине тройного взаимодействия скирмионов. Взаимодействие последнего типа может оказаться важным для стабилизации решетки скирмионов.

Парное взаимодействие двух скирмионов одинакового масштаба z_0, расположенных на расстоянии a друг от друга, мы определяем следующим образом:

$$U_2(z_0, a) = \mathcal{H}[f_1 + f_2] - \mathcal{H}[f_1] - \mathcal{H}[f_2]. \tag{15}$$

Если положить радиусы скирмионов радиусам, найденным для одиночных решений, то отталкивающее взаимодействие окажется весьма большим, а именно, $\sim C$ для $R \sim |z_0|$, см. рис. 4. Для фиксированного

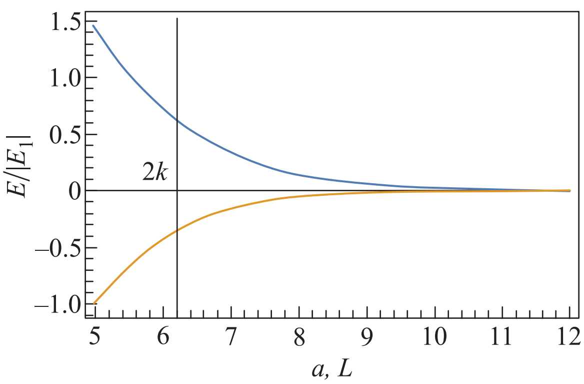

Рис. 4. (Цветной онлайн) Парное и непарное взаимодействие скирмионов с $z_0 = k$ для $b = 0.6$, верхняя и нижняя кривая, соответственно. Вертикальная линия отмечает величину взаимодействия при расстоянии между скирмионами, равном двум радиусам одиночного скирмиона "$2k$"

a минимум энергии достигается "сжатием" скирмионов, что с одной стороны увеличивает энергию каждого из них в отдельности, но уменьшает взаимодействие между ними.

Мы нашли, что энергия двух скирмионов в единицах C примерно равна (ср. (12))

$$E_2 \simeq 2\tilde{a}_1 + 2\tilde{a}_3(x-1)^2 + u_2 x^4 \exp{(2r_0 - a)}/\ell, \tag{16}$$
$$\tilde{a}_1 = a_1 - \tilde{a}_3, \quad \tilde{a}_3 = \frac{a_2^2}{4ba_3}, \quad x = |z_0|/r_0,$$

где $\tilde{a}_1 \simeq -5$, $\tilde{a}_3 \simeq 20$, $u_2 \simeq 3.6$ при значении $b = 0.6$; последнее слагаемое в (16) соответствует $U_2(z_0, a)$.

Тройное взаимодействие вычисляется сходным образом, оно зависит от нескольких расстояний между скирмионами. Для простоты мы ограничиваемся обсуждением непарного взаимодействия для скирмионов, расположенных в вершинах правильного треугольника. Результаты для трех скирмионов можно здесь опустить и сразу перейти к конфигурации четырех скирмионов, расположенных в вершинах ромба с ребром a. Такая конфигурация образует элементарную ячейку в скирмионном кристалле, как показано на рис. 1, с параметром ячейки a и радиусом скирмионов $|z_0|$, соответствующим оптимальному значению для единичного скирмиона. Непарное взаимодействие может быть представлено в виде:

$$U_3(a) = \mathcal{H}\left[\sum_{j=1,\ldots 4} f_j\right] - 4\mathcal{H}[f_1] - 5U_2(a). \tag{17}$$

Оно оказывается достаточно велико и имеет характер притяжения, см. рис. 4. Было найдено, что энергия взаимодействия четырех скирмионов, расположенных в вершинах ромба на рис. 1, с хорошей точностью совпадает с удвоенной энергией трех скирмионов в вершинах правильного треугольника, это говорит о том, что взаимодействием двух самых удаленных друг от друга скирмионов можно пренебречь.

Все вышесказанное позволяет нам перейти к рассмотрению гексагональной решетки скирмионов. Следует учесть, что каждый скирмион принадлежит четырем соседним элементарным ячейкам, а четыре из пяти вкладов парных взаимодействий относятся к двум соседним ячейкам. Таким образом энергия, приходящаяся на одну ячейку, дается выражением

$$E_{\text{cell}} = \mathcal{H}[f_1] + 3U_a(a) + U_3(a). \tag{18}$$

Вычисление плотности энергии на элементарную ячейку приводит к хорошему численному согласию с предыдущими расчетами плотности энергии для одного скирмиона на диске, что говорит в пользу выбранного нами анзаца (13).

5. Полученные нами выражения позволяют рассмотреть низкоэнергетическую динамику решетки скирмионов. Одним из возможных способов это сделать является рассмотрение вариации аргумента функции $F\left(\frac{\bar{z}}{z_0}\right) \to F\left(\frac{\bar{z}+\delta\bar{z}}{z_0}\right)$, так что

$$\delta\bar{z} = \varepsilon_0\bar{z} + \sum_{m\geq 1}(\varepsilon_m \bar{z}^{m+1} + \varepsilon_{-m} z^{m-1}) \tag{19}$$

с комплексными ε_m. Дилатация и закрутка скирмиона описываются параметром ε_0, сдвигу центра скирмиона отвечает ε_{-1}, специальное конформное преобразование (рассмотренное для случая БП [25]) отвечает ε_1. Эллиптическим деформациям [26] соответствуют $\varepsilon_{\pm 2}$.

Динамика системы [27] может быть проанализирована при учете кинетической части Лагранжиана $\sim \dot{\phi}\cos\theta$. Эффективное действие находится вариацией по смещениям ϵ_m в гармоническом приближении [28]. Можно показать, что фаза ε_m является каноническим импульсом для абсолютной величины $|\varepsilon_m|^2$, наиболее просто это показать для дилатаций ε_0. В общем случае ситуация осложняется тем, что даже при рассмотрении одиночного скирмиона коллективные переменные ε_m и ε_{-m} гибридизуются. Исследование динамики мультискирмионной конфигурации сведется к рассмотрению эффективного действия в терминах коллективных переменных $\varepsilon_m^{(j)}$ для каждого скирмиона в решетке. Такой анализ весьма сложен и будет рассмотрен в дальнейшем.

Авторы выражают благодарность Б.А. Иванову, К.Л. Метлову, М. Гарсту и А.В. Цыпильникову за полезные обсуждения.

1. N. Nagaosa and Y. Tokura, Nature Nanotech. **8**, 899 (2013).
2. M. Garst, J. Waizner, and D. Grundler, J. Phys. D: Appl. Phys. **50**, 293002 (2017).
3. N. Bogdanov and D. A. Yablonskii, Sov. Phys. JETP **68**, 101 (1989).
4. N. Bogdanov and A. Hubert, J. Magn. Magn. Mater. **138**, 255 (1994).
5. U. K. Roßler, N. Bogdanov, and C. Pfleiderer, Nature **442**, 797 (2006).
6. B. Binz, A. Vishwanath, and V. Aji, Phys. Rev. Lett. **96**, 207202 (2006).
7. T. Okubo, S. Chung, and H. Kawamura, Phys. Rev. Lett. **108**, 017206 (2012).
8. S. Heinze, K. von Bergmann, M. Menzel, J. Brede, A. Kubetzka, R. Wiesendanger, G. Bihlmayer, and S. Blügel, Nature Phys. **7**, 713 (2011).
9. S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Boni, Science **323**, 915 (2009).
10. X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, and Y. Tokura, Nature **465**, 901 (2010).
11. C. Pfleiderer, Nature Phys. **7**, 673 (2011).
12. P. Bak and M. H. Jensen, J. Phys. C: Solid State Phys. **13**, L881 (1980).
13. O. Nakanishi, A. Yanase, A. Hasegawa, and M. Kataoka, Solid State Commun. **35**, 995 (1980).
14. A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. **22**, 245 (1975).
15. A. O. Sorokin, JETP **118**, 417 (2014).
16. J. Garaud, K. A. H. Sellin, J. Jäykkä, and E. Babaev, Phys. Rev. B **89**, 104508 (2014).
17. D. F. Agterberg, E. Babaev, and J. Garaud, Phys. Rev. B **90**, 064509 (2014).
18. M. S. Scheurer and J. Schmalian, Nature Commun. **6**, 6005 (2015).
19. D. N. Aristov and A. Luther, Phys. Rev. B **65**, 165412 (2002).
20. A. B. Borisov, J. Kishine, I. G. Bostrem, and A. S. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **79**, 134436 (2009).
21. V. V. Kiselev and A. A. Raskovalov, Theor. Math. Phys. **173**, 1565 (2012).
22. Y. Togawa, T. Koyama, K. Takayanagi, S. Mori, Y. Kousaka, J. Akimitsu, S. Nishihara, K. Inoue, A. S. Ovchinnikov, and J. Kishine, Phys. Rev. Lett. **108**, 107202 (2012).
23. A. O. Leonov, T. L. Monchesky, N. Romming, A. Kubetzka, A. N. Bogdanov, and R. Wiesendanger, New. J. of Phys **18**, 065003 (2016).
24. V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, U. K. Roßler, J. van den Brink, and Yu. Gaididei, Phys. Rev. B **97**, 064403 (2018).
25. D. N. Aristov, S. S. Kravchenko, and A. O. Sorokin, JETP lett. **102**, 455 (2015).
26. N. Bogdanov and A. Hubert, Phys. Stat. Sol. (b) **186**, 527 (1994).
27. D. D. Sheka, B. A. Ivanov, and F. G. Mertens, Phys. Rev. B **64**, 024432 (2001).
28. K. L. Metlov, Phys. Rev. B **88**, 014427 (2013).