Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 1, стр. 55 – 57 *10 января 1989 г.*

СПИН И СТАТИСТИКА СОЛИТОНОВ В ПЛЕНКЕ СВЕРХТЕКУЧЕГО ^{3}He-A

Г.Е.Воловик, А.Соловьев, В.М.Яковенко

Частицеподобный солитон с целочисленным топологическим зарядом Q в пленке ^{3}He-A обладает спином $s = (\hbar/2)n\,|\,Q\,|$, где целочисленный параметр n зависит от толщины пленки. Тем самым в определенных интервалах толщин пленки солитон с $|\,Q\,| = 1$ подчиняется статистике Ферми.

В двумерных системах с параметром порядка в виде единичного вектора $\mathbf{d}(x, y, t)$ гидродинамическое действие может содержать топологический член Черна–Саймонса, или θ -член $S_\theta = \hbar\theta H$, где H – целочисленный инвариант Хопфа для поля $\mathbf{d}$ [1]. Индекс Хопфа выражается через $\mathbf{d}$ посредством вспомогательного калибровочного поля A_μ $(\mu = 0, 1, 2)$:

$$H = \frac{1}{32\pi^2}\int dxdydt\, e^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda}\ , \tag{1}$$

$$F_{\nu\lambda} = \partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu = \mathbf{d}\cdot[\partial_\nu \mathbf{d},\ \partial_\lambda \mathbf{d}\,]\,. \tag{2}$$

θ – член ответственен за квантовую статистику частицеподобных солитонов с топологическим зарядом

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int dxdyF_{12}\ . \tag{3}$$

При перестановке двух тождественных солитонов с зарядом Q индекс H меняется на Q^2, так что статсумма умножается на $\exp(i\theta Q^2)$. Из-за унитарности θ может принимать лишь значения πn [2], поэтому элементарные солитоны являются фермионами при нечетном n и бозонами при четном n. В работе [2] предполагалось, что $n = 1$ для гайзенберговского антиферромагнетика со спином 1/2, однако оказалось, что в этом магнетике θ -член отсутствует (см., например, [3]). Это связано с тем, что инвариант Хопфа, а вместе с ним и θ -член, не инвариантны относительно временной и пространственной инверсии [4].

В работе [4] показано, что в пленке ^{3}He-A благодаря сочетанию спинового антиферромагнетизма с орбитальным ферромагнетизмом, симметрия допускает существование θ -члена в виде

$$S_\theta = \hbar\theta(\mathbf{l}\cdot\hat{\mathbf{z}})H, \tag{4}$$

где $\mathbf{l}$ – орбитальный вектор ферромагнетизма в ^{3}He-A, который в случае пленки фиксирован вдоль нормали $\hat{\mathbf{z}}$ к пленке, $\mathbf{l} = \pm\mathbf{z}$. При инверсии времени, а также при преобразовании $(x, y, z) \to (x, -y, -z)$, играющем роль инверсии в двумерном пространстве (x, y), инвариант Хопфа H меняет знак, но это компенсируется переворотом вектора $\mathbf{l} \to -\mathbf{l}$, так что действие остается инвариантным относительно этих преобразований. К сожалению вычисление величины θ в работе [4] оказалось некорректным. Здесь мы покажем, что $\theta = \pi n$, где n – число уровней энергии поперечного квантования в пленке и может быть четным или нечетным в зависимости от толщины пленки. Таким образом в определенных интервалах толщин пленки элементарный солитон (с $|Q| = 1$) является фермионом.

Результат был получен двумя способами. В первом использовалось чисто калибровочное $SU(2)$ поле

$$\mathbf{A}_\mu = -\mathbf{d}A_\mu + [\mathbf{d}, \partial_\mu \mathbf{d}], \tag{5}$$

которое соответствует зависящему от координат и времени трехмерному повороту, переводящему поле $\mathbf{d}(x, y, t)$ в однородное поле $\mathbf{d}(\infty)$. Прямое разложение статсуммы пленки ^{3}He-A по A_μ при постоянном поле $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\infty)$ приводит к выражению (4) с $\theta = \pi n$, где H следующим образом выражается через $\mathbf{A}_\mu$:

$$H = -\frac{1}{96\pi^2}\int dx\,dy\,dt\, e^{\mu\nu\lambda}\, \mathbf{A}_\mu \cdot [\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\lambda]. \tag{6}$$

Второй способ, который мы здесь изложим, использует связь рассматриваемого явления с аналогом квантового эффекта Холла (КХЭ), рассмотренного в [5]. А именно, холловский ток в пленке ^{3}He-A и аномальный спиновый ток, возникающий из-за θ -члена, связаны между собой, что позволяет выразить параметр θ через холловскую проводимость σ_{xy}: $\theta/\pi = 4\pi\hbar\sigma_{xy} = n$.

Аномальный спиновый ток получается варьированием θ -члена в действии по $\mathbf{A}_i$. Нас интересует поток проекции спина на ось $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{j}^i_{spin} = \frac{\hbar\theta}{16\pi^2}\mathbf{d}\cdot[\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_0]e^{ijk}l_k = \frac{\hbar\theta}{16\pi^2}e^{ijk}l_k\mathbf{d}\cdot[\partial_j\mathbf{d}, \partial_t\mathbf{d}], \qquad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Мы также воспользуемся теоремой Лармора, согласно которой спиновое вращение с угловой скоростью $[\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}]$ эквивалентно действию на спины магнитного поля $\mathbf{H} = \frac{1}{\gamma}[\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}]$, где γ – гиромагнитное отношение для ядер ^{3}He. Поэтому в разложении спинового тока должен быть следующий член, линейный по $\mathbf{H}$ и по градиенту поля $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{j}^i_{spin} = \frac{\hbar\theta}{16\pi^2}e^{ijk}l_j\gamma\mathbf{H}\cdot\partial_k\mathbf{d}, \tag{8}$$

который мы сейчас найдем из аналогии с КХЭ.

Для этого мы воспользуемся эквивалентным описанием ^{3}He-A как жидкости, имеющей две сверхтекучих компоненты: одна компонента состоит из куперовских пар фермионов на ферми-сфере с проекцией спина вверх, а другая – со спином вниз. Причем ось квантования спина должна быть перпендикулярна вектору $\mathbf{d}$, поскольку проекция спина куперовских пар на ось $\mathbf{d}$ равна нулю в обычном описании ^{3}He-A.

Согласно результатам работы [5] каждая из сверхтекучих компонент в присутствии градиента химпотенциала $\partial_k \mu$ несет свой холловский поток частиц, перпендикулярный к $\partial_k \mu$:

$$j_\downarrow^i = j_\downarrow^i = \frac{1}{2}\,\sigma_{xy}\, e^{ijk} l_j \partial_k \mu, \qquad \sigma_{xy} = n/2h, \tag{9}$$

где n – число уровней поперечного квантования в пленке под ферми-поверхностью. В присутствии действующего на спины магнитного поля, которое диктует направление оси квантования спина, химпотенциалы для разных проекций спина раздвигаются:

$$\mu_\uparrow = \mu - \frac{\hbar}{2}\gamma H, \qquad \mu_\downarrow = \mu + \frac{\hbar}{2}\gamma H \tag{10}$$

в результате возникает следующий поток проекции спина на магнитное поле

$$\frac{\hbar}{2}\,(j_\uparrow^i - j_\downarrow^i) = -\,\frac{n\hbar}{16\pi}\, e^{ijk}\, l_j \gamma \partial_k H\,. \tag{11}$$

При обобщении (11) на случай произвольного направления магнитного поля при неоднородном в пространстве поле $\mathbf{d}$, нужно учесть, что локальная ось квантования спина всегда перпендикулярна к $\mathbf{d}$. Поэтому векторное обобщение выражения (11) дается заменой $H \to \mathbf{H}_\perp = \mathbf{H} - \mathbf{d}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{H})$, в результате для спинового тока и его проекции на ось $\mathbf{d}$ имеем

$$\mathbf{j}_{spin}^i = -\,\frac{n\hbar}{16\pi}\, e^{ijk} l_j \gamma \partial_k \mathbf{H}_\perp\,, \qquad \mathbf{d}\cdot\mathbf{j}_{spin}^i = \frac{n\hbar}{16\pi}\, e^{ijk} l_j \gamma \mathbf{H}\cdot\partial_k \mathbf{d}\,. \tag{12}$$

Сравнивая (12) с выражением (8), получаем искомое $\theta = \pi n$. Таким образом солитоны с нечетным подчиняются квантовой статистике Ферми–Дирака, если толщина пленки такова, что ей соответствует нечетное число уровней поперечного квантования, лежащих ниже энергии Ферми.

В отношении Ферми-статистики солитонов пленка ^{3}He-A не должна быть уникальной. Следует искать среди магнитных сред такие двумерные электронные структуры, в которых спиновый ферро- или антиферромагнетизм сочетается с орбитальным ферро- или антиферромагнетизмом таким образом, чтобы симметрия не запрещала существование θ-члена. Аналогичным образом могут существовать и трехмерные магнитные структуры, симметрия которых допускает наличие θ-члена, например, вида $\int d^3x dt A_\mu J^\mu$ (см. [6]), где A_μ – электромагнитное поле, а J^μ – плотность топологического заряда частицеподобного солитона в трехмерном пространстве. Такой θ-член приводит к дробному квантованию электрического заряда солитонов.

Авторы благодарны П.Б.Вигману за ценные обсуждения.

Литература

1. *Wilczek F., Zee A.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 2250.
2. *Dzyaloshinskii I., Polyakov A., Wiegmann P.* Phys. Lett., **A**, 1988, **127**, 112.
3. *Haldane F.D.M.* Phys. Rev. Lett., 1988, **61**, 1029.
4. *Volovik G.E.* Physica Scripta, 1988, **38**, 321.
5. *Воловик Г.Е.* ЖЭТФ, 1988, **94**, 123.
6. *Witten E.* Nucl. Phys. B, 1983, **223**, 422.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1988 г.