Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 4, с. 231 – 235 © 2019 г. 25 февраля

Формирование складок в двумерной гидродинамической турбулентности

Е. А. Кузнецов[+*×1)], *Е. В. Серещенко*[×∘∇]

[+]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия*

[×]*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[∘]*Дальневосточный федеральный университет, 690950 Владивосток, Россия*

[∇] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 28 ноября 2018 г.
После переработки 28 ноября 2018 г.
Принята к публикации 6 декабря 2018 г.

Для вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности поле ротора завихренности $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}$ благодаря тенденции к опрокидыванию сосредоточено в окрестности линий, соответствующих положению квази-шоков завихренности. На стадии формирования квази-шоков максимальное значение ротора завихренности $B_{\max}$ растет экспоненциально во времени, при этом толщина $\ell(t)$ максимальной области в поперечном направлении к вектору $\mathbf{B}$ сужается во времени также экспоненциально. Численно показано, что $B_{\max}(t)$ зависит от толщины степенным образом: $B_{\max}(t) \sim \ell^{-\alpha}(t)$, где показатель $\alpha \approx 2/3$. Такое поведение свидетельствует в пользу формирования складок для бездивергентного векторного поля ротора завихренности.

DOI: 10.1134/S0370274X19040052

1. Введение. В двумерной развитой гидродинамической турбулентности (при числах Рейнольдса $Re \gg 1$), как было выяснено в работах [1–4], формирование прямого каскада – каскада Крейчнана [5] с постоянным потоком энстрофии – обязано появлению квази-шоков завихренности, благодаря сжимаемости непрерывно распределенных линий поля ротора завихренности $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}$ (по-английски – "*divorticity*"). Это свойство следует непосредственно из уравнения для $\mathbf{B}$,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}],\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

которое имеет вид уравнения вмороженности. Из этого уравнения немедленно следует, что $\mathbf{B}$ меняется только благодаря компоненте скорости $\mathbf{v_n}$, перпендикулярной вектору *divorticity* (в силу векторного произведения). Из-за вмороженности $\mathbf{B}$ компонента скорости $\mathbf{v_n}$ определяет изменение положения силовых линий этого поля с помощью лагранжевых траекторий, которые находятся из решения уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v_n}(\mathbf{r}, t) = 0,\ \ \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}.$$

Отображение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, как решение этих уравнений, является сжимаемым, поскольку в ситуации общего положения $\mathrm{div}\,\mathbf{v_n} \neq 0$. Сжимаемость этого отображения также следует из уравнения Лиувилля для якобиана отображения J (как меры изменения дифференциально малого элемента площади):

$$\frac{dJ}{dt} = \mathrm{div}\,\mathbf{v_n} \cdot J.$$

Таким образом, якобиан J может принимать произвольные значения, в том числе и нулевые. Именно в этом кроется причина сжимаемости непрерывно распределенных линий *divorticity* и, соответственно, тенденции к опрокидыванию, в результате чего происходит формирование квази-шоков завихренности.

В случае вырождающейся турбулентности этот процесс является доминирующим, приводящим к сильной анизотропии спектров турбулентности из-за наличия джетов, порождаемыми квази-шоками [1–3]. Этот процесс оказывается самым быстрым, в результате чего спектр турбулентности прямого каскада даже при наличии накачки, как показывают численные эксперименты [6], приобретает практически с самого начала степенную зависимость от волнового числа k с крейчнановским показателем: $E_k \sim k^{-3}$ (см.

[1)]e-mail: kuznetso@itp.ac.ru

оригинальную работу Крейчнана [5]). При этом формирование квази-шоков завихренности носит экспоненциальный характер; в соответствии с этим области максимального ротора завихренности сужаются в направлении, перпендикулярном линиям постоянной завихренности. Как показывает численный эксперимент [1–4], для типичных начальных условий рост ротора завихренности составляет 2–2.5 порядка, а поперечный размер максимальной области $\mathbf{B}$ существенно уменьшается. Объяснение этого роста связано с возможностью частичного интегрирования уравнения (1) в терминах отображения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_a)\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{B_0}(\mathbf{a})$ – начальное значение поля $\mathbf{B}$, представляющее собой аналог инварианта Коши. Аналогичная формула для трехмерного уравнения Эйлера является основной для так называемого представления вихревых линий [7, 8]. Ключевым здесь для понимания является сжимаемость поля ротора завихренности – возможность обращения J в нуль. Как известно, опрокидывание в газовой динамике возникает за счет сжимаемости газа. При подходе к точке опрокидывания происходит формирование квазидвумерных каустик (см., например, [9]). Аналогично этому происходит формирование квази-шоков завихренности.

В данной работе нами исследован вопрос, как максимальное значение *divorticity* меняется в зависимости от толщины максимальной области, чтобы выяснить, можно ли рассматривать этот процесс как формирование складки (что такое складка – см., например, [10]). В результате численного моделирования на сетке 16384×16384 мы обнаружили, что между максимальным значением $B_{\max}$ и толщиной ℓ на стадии экспоненциального роста возникает степенная зависимость: $B_{\max} \sim \ell^{-\alpha}$, где показатель α близок к 2/3. Следует отметить, что такого рода зависимость была обнаружена при формировании вихревых структур блинного типа, возникающих для невязких трехмерных течений [11]. Этот результат свидетельствует о том, что формирование квази-шоков можно рассматривать как процесс образования складки для бездивергентного векторного поля – поля ротора завихренности. Если для трехмерного уравнения Эйлера появление степенной зависимости между максимальной завихренностью $\omega_{\max}$ и толщиной блина ℓ вида $\omega_{\max} \sim \ell^{-2/3}$ можно было бы отнести к соотношению колмогоровского типа, то зависимость $B_{\max} \sim \ell^{-2/3}$ свидетельствует о том, что в двумерной гидродинамике Эйлера мы имеем дело с образованием именно складки, никак не связанной с колмогоровским поведением. Объединяет оба этих случая – формирование трехмерных вихревых структур блинного типа и квази-шоков завихренности для двумерных течений, вмороженность как поля завихренности в трехмерном уравнении Эйлера, так и поля *divorticity*. Несмотря на несжимаемость поля скорости, оба поля – трехмерная завихренность и поле *divorticity* – являются сжимаемыми (см. [11]). По-видимому, благодаря этому свойству вмороженных полей можно ожидать, что закон 2/3 является универсальным для любых полей этого типа.

2. Результаты численных экспериментов. В данной работе при численном интегрировании двумерных уравнений Эйлера, записанных в терминах завихренности (уравнение Гельмгольца),

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\omega = 0, \qquad (3)$$

мы используем алгоритм, подробно изложенный в наших предыдущих публикациях [3, 4, 6]. Область интегрирования уравнения (3) представляла собой квадрат с размерами $2\pi \times 2\pi$, граничные условия были периодическими по обеим координатам. Скорость $\mathbf{v}$ и завихренность ω находилась через функции тока ψ по стандартным формулам. По заданному значению ω находилась функция тока, обращая оператор Лапласа с помощью быстрого преобразования Фурье, а затем определялась скорость. Как и ранее, в качестве начальных условий использовались два набора вихрей гауссовой формы с положительной и отрицательной завихренностью с нулевой общей завихренностью. Размер каждой пары был случайным в диапазоне 0.2–0.6, расположение вихрей тоже было случайным. В отличие от предыдущих работ

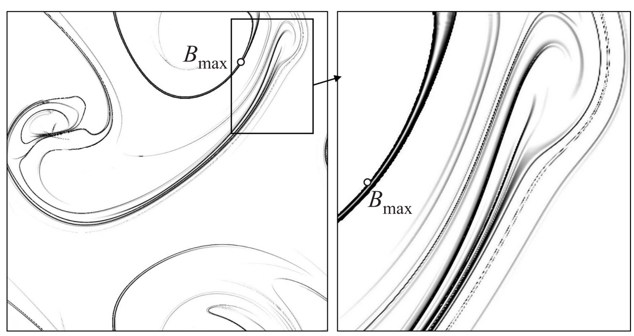

Рис. 1. Распределение $|B|$ при $t = 12$

[3, 4] мы ограничили число вихрей 8 (4 положительных и 4 отрицательных), чтобы более точно определить требуемые зависимости – поле $\mathbf{B}$ и его геометрические характеристики: положения максимумов, продольные и поперечные размеры квази-шоков и

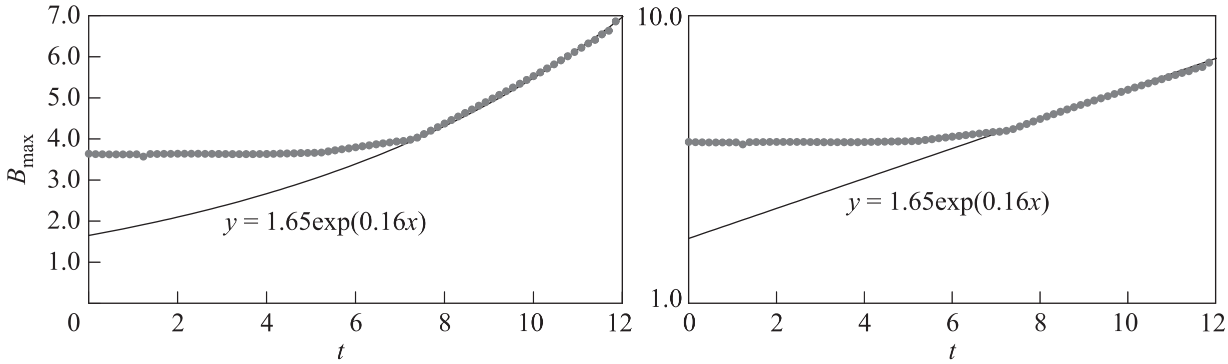

Рис. 2. Зависимость максимума ротора завихренности от времени (слева – обычный масштаб, справа – логарифмический). Точки соответствуют численным результатам, а линия – экспоненте

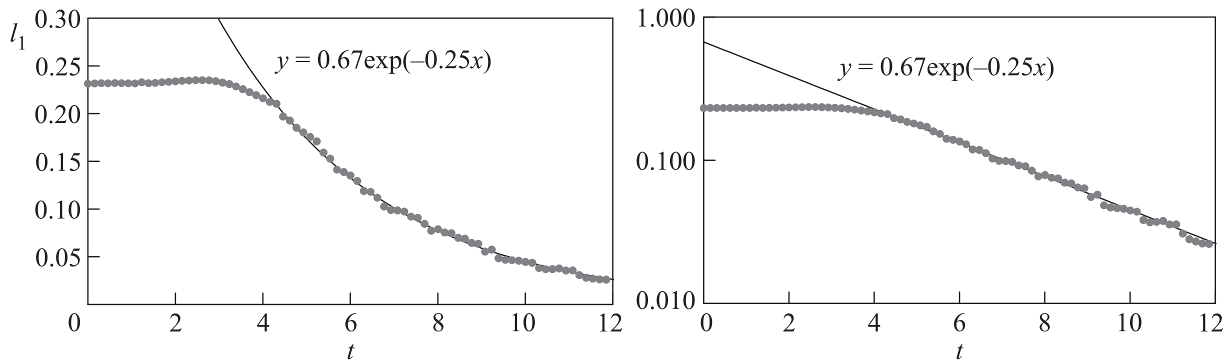

Рис. 3. Зависимость толщины ℓ_1 от времени (слева – обычный масштаб, справа – логарифмический). Точки соответствуют численным результатам, а линия – экспоненте

т.д. Вначале численно находились пространственно-временные зависимости завихренности, а затем определялась временная эволюция поля ротора завихренности. Анализ распределения поля ротора завихренности (*divorticity*) показал, что основная его масса сосредоточена в малых окрестностях линий с максимальным значением $|B|$ в виде сужающихся двумерных лент, которые формируют сложную паутину, при больших временах – турбулентную. На рисунке 1 приведена структура $|B|$ при $t = 12$. Вставка (zoom) показывает, что между максимальными линиями ротора завихренности значения $|B|$ существенно меньше максимальных. Для завихренности этому соответствует террасы со ступеньками переменной высоты. Каждая из таких ступенек представляет собой квази-ударную волну завихренности. Как уже отмечалось, максимум амплитуды ротора завихренности $B_{\max}$ на начальном этапе растет по экспоненциальному закону, а затем после достижения своего максимума претерпевает небольшие осцилляции вблизи этого максимума. На рисунке 2 представлена зависимость $B_{\max}$ от времени на начальном этапе. Как видно из этих графиков, экспоненциальный рост наблюдается на временах от $t = 4$ до $t = 12$ с инкрементом, равным 0.16. Для нахождения поперечного размера в окрестности максимума $B_{\max}$ вычислялась матрица Гессиана $\partial_i\partial_j|B|$ в максимальной точке и затем по ее собственным значениям находились поперечный (по отношению к ленте) размер ℓ_1 ($\equiv \ell$) и продольный ℓ_2 как $\ell_i = (2|\lambda_i|/B_{\max})^{1/2}$, где λ_i – собственные значения матрицы $\partial_i\partial_j|B|$. На рисунке 3 представлена зависимость ширины ℓ_1 от времени: вначале ℓ_1 практически не меняется, а далее, начиная с $t = 4$, идет экспоненциальное сужение до $t = 14$ с декрементом 0.25.

При $t = 14$ число точек на толщине было порядка 20. При больших временах это число уменьшается. Так при $t = 20$ ширина достигает значения 0.00045, сопоставимого с размером сетки $2\pi/16384 = 0.00038$, т.е. последующий анализ становится уже некорректным. Следует отметить, что при $t > 14$ экспоненциальный рост $B_{\max}$ прекращается – возникает насыщение с небольшими осцилляциями (ср. с [1, 3]).

Что касается продольного масштаба ℓ_2, то он вплоть до $t = 14$ растет экспоненциально с инкрементом 0.06 (см. рис. 4). При больших временах ℓ_2 рост

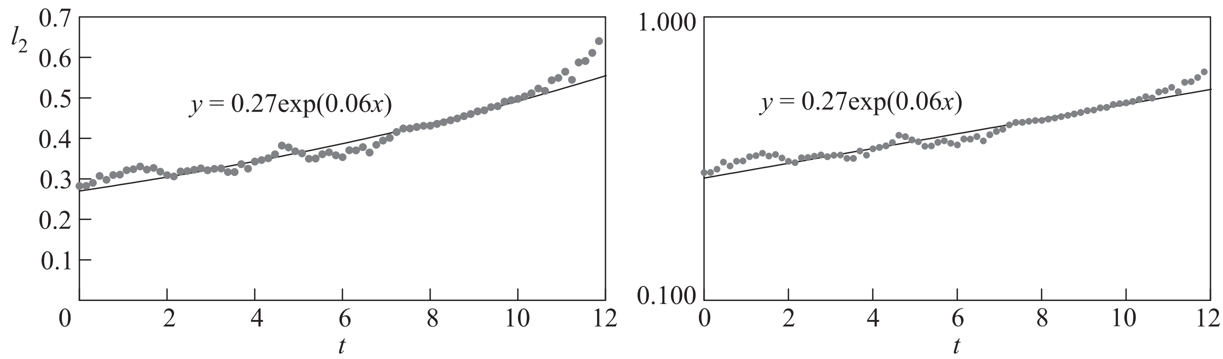

Рис. 4. Зависимость продольного размера ℓ_2 от времени (слева – обычный масштаб, справа – логарифмический). Точки соответствуют численным результатам, а линия – экспоненте

прекращается, а далее наблюдается даже экспоненциальное падение, которое, по нашему мнению, связано с дискретностью сетки и является некорректным.

Важно отметить, что до $t = 14$ суммарное значение декремента ℓ_1 и инкремента ℓ_2 отрицательно: $-0.25 + 0.06 = -0.19$, что свидетельствует о сжимаемости области максимального значения $B_{\max}$. Аналогичное поведение масштабов наблюдается при образовании вихревых структур блинного типа в трехмерной гидродинамике [12].

Полученные зависимости для $B_{\max}$ и ширины ℓ показывают, что на экспоненциальной стадии между этими величинами имеется степенная зависимость $B_{\max} = C\ell^{\alpha}$ с показателем $\alpha = 0.16/(-0.25) = -0.64 \approx -2/3$, C – константа (см. рис. 5). Следует

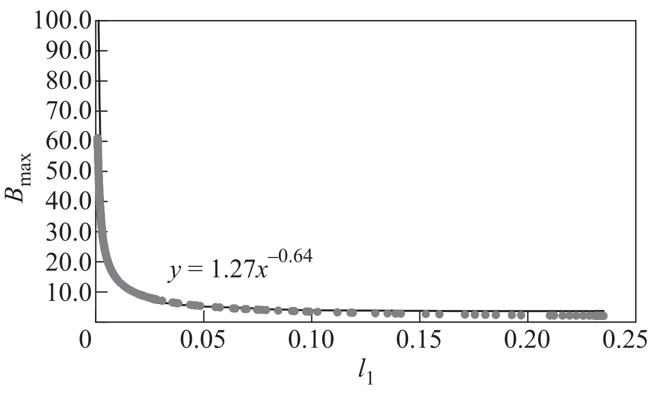

Рис. 5. Зависимость максимума ротора завихренности от толщины ℓ. Точки соответствуют численным результатам, а линия – степенной зависимости $B_{\max} \sim \ell^{-2/3}$

отметить, что это поведение $B_{\max}$ от ℓ в виде закона 2/3 было проверено нами также для других начальных условий (напомним, что положение вихрей и их размеры были случайными). Это дает основание нам считать, что указанное соотношение можно рассматривать как универсальное.

3. Заключение. Основной вывод этой работы состоит в том, что формирование степенной зависимости $B_{\max}$ от ширины ℓ – закон 2/3 – можно рассматривать как проявление формирования складки, подчеркнем, для бездивергентного векторного поля – ротора завихренности. Как уже отмечалось во введении, такой же скейлинг был обнаружен при формировании вихревых структур блинного типа для трехмерной гидродинамики Эйлера [12, 11]. В этом случае скейлинг 2/3 был установлен между максимальной завихренностью и толщиной блина: $\omega_{\max} \sim \ell^{-2/3}$. Объединяет оба этих явления вмороженность поля завихренности для трехмерных течений и ротора завихренности для двумерной гидродинамики. Является ли этот закон универсальным для любых вмороженных полей для несжимаемых течений? Этот вопрос остается пока открытым, особенно он интересен для магнитной гидродинамики, где магнитное поле в бездиссипативном пределе является вмороженным.

Данная работа выполнялась при поддержке гранта Российского научного фонда # 14-22-00174.

1. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. J. Rasmussen, Phys. Fluids **19**, 105110 (2007).
2. E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, and J. J. Rasmussen, Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, 253 (2010).
3. А. Н. Кудрявцев, Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма ЖЭТФ **96**, 783 (2012) [JETP Lett. **96**, 699 (2013)].
4. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма ЖЭТФ **102**, 870 (2015) [JETP Lett. **102**(11), 760 (2015)].
5. R. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 1417 (1967).
6. Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко, Письма ЖЭТФ **105**, 70 (2017) [JETP Lett. **105**, 83 (2017)].

7. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма ЖЭТФ **67**, 1015 (1998) [JETP Lett. **67**, 1076 (1998)].
8. E. A. Kuznetsov, V. P. Ruban, Phys. Rev. E **61**, 831 (2000).
9. S. F. Shandarin and Ya. B. Zeldovich, Rev. Mod. Phys. **61**, 185 (1989).
10. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Знание, М. (1981).
11. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **30**, 095104 (2018).
12. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, Phys. Fluids **27**, 085102 (2015).