Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 5, с. 306 – 311

Волновая турбулентность поверхности жидкости во внешнем тангенциальном электрическом поле

Е. А. Кочурин[1)]

Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 18 октября 2018 г.
После переработки 21 ноября 2018 г.
Принята к публикации 27 декабря 2018 г.

В настоящей работе проведено прямое численное моделирование процесса взаимодействия плоских капиллярных волн на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем тангенциальном электрическом поле с учетом сил вязкости. Показано, что взаимодействие встречных нелинейных волн может привести к возникновению прямого энергетического каскада. В режиме квазистационарной диссипации энергии функции плотности вероятности для углов наклона границы стремятся к нормальному распределению Гаусса, а форма границы приобретает сложную, хаотическую форму. Спектр поверхностных возмущений в этом режиме описывается степенной зависимостью $k^{-5/2}$. В терминах энергии полученный спектр имеет форму $k^{-3/2}$, что совпадает с энергетическим спектром Ирошникова–Крайчнана и свидетельствует о родственной природе наблюдаемой волновой турбулентности поверхности жидкости и слабой магнитогидродинамической турбулентности взаимодействующих Альфвеновских волн.

DOI: 10.1134/S0370274X19050059

Известно, что динамика нелинейных капиллярных волн может быть достаточно сложной. Как показано Захаровым и Филоненко [1], на границе жидкости может развиваться слабая турбулентность капиллярных волн. На основе слабонелинейной модели, когда амплитуды капиллярных волн считаются малыми, авторами было показано, что спектр поверхностных возмущений I_k в мелко-масштабной области (сила тяжести пренебрежимо мала) приобретает степенной характер, а именно,

$$I_k = \langle |\eta_k|^2 \rangle \sim C k^{-(11/4+d)}, \qquad (1)$$

где η_k – Фурье-образ функции η, определяющей форму границы жидкости, k – модуль волнового вектора, C – константа, d – число пространственных переменных функции η. Скобки $\langle * \rangle$ обозначают усреднение по углам.

Первые численные эксперименты, убедительно подтверждающие справедливость спектра (1), были проведены в работе [2], а в работах [3, 4] этот результат был подтвержден физическими экспериментами. В работе [5] наблюдался турбулентный спектр Захарова–Филоненко при моделировании полных сильнонелинейных уравнений гидродинамики. Для волн с большой длиной волны, определяющим фактором в эволюции которых является сила тяжести, могут наблюдаться спектры Филлипса [6] и Колмгорова–Захарова [7]. Таким образом, влияние капиллярных и гравитационных сил на развитие турбулентности поверхностных волн достаточно хорошо изучено (см. обзорную работу [8]).

Ситуация кардинально меняется при включении в рассмотрение внешних силовых электромагнитных полей, которые могут существенно повлиять на эволюцию границы [9]. В настоящее время подробно исследована динамика когерентных структур на поверхности жидкости в электрическом поле, см., например, [10–17]. Хаотическая динамика поверхностных волн во внешнем поле практически не изучена (за исключением пары экспериментальных работ [18, 19]). В этой связи, весьма важным представляется исследование волновой турбулентности поверхности жидкости, возникающей при воздействии сильного внешнего электрического поля. Именно такой задаче посвящена настоящая работа.

В работе будут представлены результаты численного моделирования слабонелинейной динамики плоско-симметричных капиллярных волн на поверхности диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью, находящейся под воздействием внешнего тангенциального электрического поля. В пределе сильного электрического поля, когда влияние капиллярных и гравитационных сил пренебрежимо мало, для этой задачи известны точные аналитические решения, впервые полученные Н.М. Зубаревым в работе [20]. Решения Зубарева описывают бездисперси-

1) e-mail: kochurin@iep.uran.ru

онное распространение нелинейных поверхностных волн произвольной формы в направлении или против направления поля [21, 22]. Взаимодействие встречных волн приводит к формированию на границе особых точек, в которых напряженность поля и скорость жидкости испытывают разрыв, а кривизна поверхности неограниченно возрастает [23–25]. Результаты расчетов, полученных в настоящей работе, свидетельствуют о сглаживании ранее наблюдаемых особенностей при включении сил поверхностного натяжения и вязкости. Кроме того, в режиме распространения электрокапиллярных волн может наблюдаться прямой энергетический каскад и хаотизация эволюции системы. В режиме квазистационарной диссипации энергии спектр поверхностных возмущений стремится к степенной зависимости $k^{-5/2}$.

Итак, рассмотрим потенциальное течение несжимаемой идеальной диэлектрической жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью, помещенной во внешнее однородное горизонтальное электрическое поле. Поскольку в исследуемой задаче есть анизотропия, связанная с выделенным направлением электрического поля, мы будем рассматривать только плоско-симметричные волны, распространяющиеся параллельно внешнему полю. Положим, что напряженность поля направлена вдоль оси x (ось y декартовой системы координат направлена по нормали к ней) и по абсолютной величине равна E. В невозмущенном состоянии форма границы соответствует $y = 0$.

Дисперсионное соотношение для линейных волн на границе жидкости имеет вид [9]

$$\omega^2 = gk + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{\rho} k^2 + \frac{\sigma}{\rho} k^3, \tag{2}$$

где ω – частота, g – ускорение свободного падения, ε_0 – электрическая постоянная, ε и ρ – проницаемость и плотность жидкости соответственно ($\varepsilon \gg 1$), σ – коэффициент поверхностного натяжения. Для дальнейшего анализа удобно ввести безразмерные переменные,

$$y \to y/k_0, \quad x \to x/k_0, \quad t \to t \cdot t_0, \quad E \to \beta \cdot E_0,$$

где $k_0 = (g\rho/\sigma)^{1/2}$, $t_0 = (\sigma/g^3\rho)^{1/4}$, $E_0^2 = (\sigma g \rho)^{1/2}/\varepsilon_0\varepsilon$ – характерные значения волнового числа, времени и напряженности электрического поля, соответственно. К примеру, для воды ($\varepsilon \approx 81$) эти величины оцениваются как, $\lambda = 2\pi/k_0 \approx 1.7$ см, $t_0 \approx 0.01$ с, $E_0 \approx$ ≈ 1.9 кВ/см. Величина $\beta = E/E_0$ соответствует безразмерной напряженности электрического поля.

Далее мы рассмотрим область электрокапиллярных волн $\beta^2 + k \gg 1/k$, т.е. длины волн, для которых эффектом силы тяжести можно пренебречь. В безразмерном виде дисперсионное соотношение (2) имеет вид

$$\omega^2 = (\beta^2 + k)k^2. \tag{3}$$

Уравнения движения границы жидкости с точностью до квадратично-нелинейных слагаемых можно записать как [20],

$$\psi_t = \eta_{xx} + \frac{1}{2}\left[\beta^2(\hat{k}\eta^2 - \eta_x^2) + \hat{k}\psi^2 - \psi_x^2\right] +$$

$$+ \beta^2\left[-\hat{k}\eta + \hat{k}(\eta\hat{k}\eta) + \partial_x(\eta\eta_x)\right] + \hat{D}_k\psi, \tag{4}$$

$$\eta_t = \hat{k}\psi - \hat{k}(\eta\hat{k}\psi) - \partial_x(\eta\psi_x) + \hat{D}_k\eta, \tag{5}$$

где ψ – функция, определяющая потенциал скорости жидкости на границе, $\hat{k}$ – интегральный оператор, в Фурье-пространстве он имеет вид: $\hat{k}f_k = |k|f_k$. Оператор $\hat{D}_k$ отвечает за влияние вязкости, в k-пространстве он определяется как

$$\hat{D}_k = -\gamma(|k| - |k_d|)^2,\ |k| \geq |k_d|; \quad \hat{D}_k = 0,\ |k| < |k_d|,$$

где γ – константа, k_d – волновое число, определяющее пространственный масштаб, на котором происходит диссипация энергии. Отметим, что такое определение вязкости является стандартным при моделировании волновой турбулентности поверхности жидкости в отсутствие электрического поля [26].

Уравнения (4)–(5) являются гамильтоновыми, они могут быть получены путем взятия вариационных производных:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}.$$

Здесь H – гамильтониан системы, задающий полную энергию:

$$H = H_0 + H_1 = \frac{1}{2}\int\left(\psi\hat{k}\psi + \beta^2\eta\hat{k}\eta + \eta_x^2\right)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\eta\left([\hat{k}\psi^2 - \psi_x^2] + \beta^2[\hat{k}\eta^2 - \eta_x^2]\right)dx,$$

где H_0 – слагаемое, соответствующее линейному приближению, H_1 – квадратично-нелинейному. Для слабонелинейной модели должно выполняться условие: $H_1/H_0 \ll 1$.

В переделе сильного поля ($\beta \gg 1$), т.е. в отсутствии капиллярных сил и сил вязкости уравнения движения границы (4)–(5) допускают пару точных решений в виде

$$\psi = \pm\beta\hat{H}\eta,$$

где $\hat{H}$ – преобразование Гильберта, $\hat{H}f_k = i\,\mathrm{sign}(k)f_k$. Эти решения представляют собой решения Зубарева

[20]. Как отмечалось ранее, они описывают распространение волн без искажений в направлении или против направления поля (в зависимости от знака перед β).

Для минимизации влияния когерентных структур (коллапсов или солитонов) начальные условия для уравнений (4)–(5) выберем в виде двух взаимодействующих волновых пакетов, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\eta_1(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cos(k_i x), \quad \eta_2(x) = \sum_{i=1}^{3} b_i \cos(p_i x), \quad (6)$$

$$\eta(x,0) = \eta_1 + \eta_2, \qquad \psi(x,0) = \beta(\hat{H}\eta_1 - \hat{H}\eta_2).$$

В настоящей работе мы представим результаты численных экспериментов, проведенных для трех значений напряженности поля: $\beta_1^2 = 35$, $\beta_2^2 = 30$, $\beta_3^2 = 25$. Расчет пространственных производных и интегральных операторов производился при помощи псевдоспектральных методов с полным числом гармоник N, а интегрирование по времени – явным методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности с шагом dt. Для стабилизации численной схемы амплитуды высших гармоник с волновым числом больше k_s приравнивались к нулю на каждом шаге по времени, т.е. использовался фильтр нижних частот (аналогично работе [2]).

Для всех трех экспериментов наблюдалось качественно подобное поведение. В расчетах не использовалась механическая накачка энергии системы, как следствие, средний уровень крутизны границы $\mu = \langle|\eta_x|\rangle$ определялся только начальными условиями (6). Параметры расчета были следующими: $N = 2048$, $dt = 10^{-5}$, $\gamma = 10$, $k_d = 500$, $k_s = 624$. Во всех численных экспериментах наблюдалось формирование инерционного интервала на масштабах волновых чисел $30 < k < 150$. Интересно, что при уменьшении напряженности поля увеличивался порог нелинейности, необходимый для формирования прямого энергетического каскада. Так, средняя крутизна границы для трех экспериментов составила значения $\mu_1 \approx 0.116$, $\mu_2 \approx 0.121$, $\mu_3 \approx 0.127$, соответственно.

Представим подробнее результаты расчета для $\beta_1^2 = 35$ (при больших напряженностях поля в экспериментах наблюдались сильные особенности, которые могут соответствовать формированию вертикальных струй жидкости [27]). Амплитуды и волновые числа в начальных условиях (6) подбирались эмпирически, чтобы минимизировать отклонение модели от слабонелинейной. Для расчетов, представленных ниже, эти параметры выбирались как:

$$a_1 = 0.01125, \quad a_2 = 0.0165, \quad a_3 = 0.01,$$

$$b_1 = 0.0125, \quad b_2 = 0.0145, \quad b_3 = 0.01,$$

$$k_1 = 4, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = 8, \quad p_1 = 5, \quad p_2 = 7, \quad p_3 = 9.$$

На рисунке 1a показана временная зависимость относительного изменения энергии системы ΔH. Можно видеть, что начиная с некоторого момента времени, диссипация энергии происходит практически с постоянной скоростью. Этот факт хорошо коррелирует с рис. 1b, на котором представлена зависи-

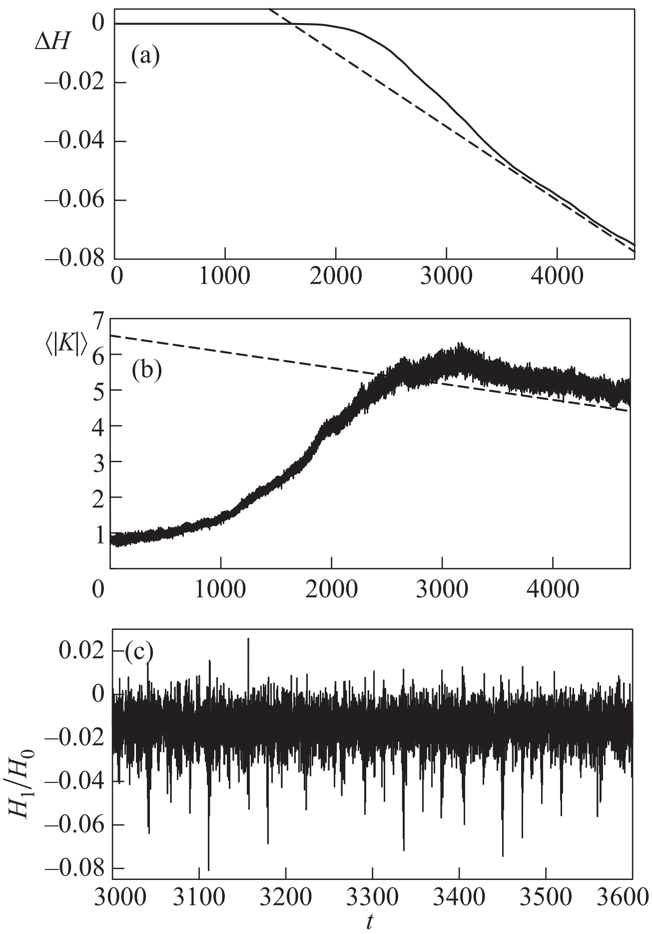

Рис. 1. Временные зависимости: (a) – относительного изменения энергии системы; (b) – среднего модуля кривизны границы; (c) – уровня нелинейности

мость среднего по пространственному периоду модуля кривизны границы $\langle|K|\rangle$ от времени. Достигая максимума при $t \approx 3.2 \cdot 10^3$, величина $\langle|K|\rangle$ начинает почти монотонно убывать. На рисунке 1c представлена временная зависимость величины H_1/H_0, характеризующей уровень нелинейности системы. Как видно, подобного переходного режима на графике не наблюдается, и величина H_1/H_0 остается малой в течение всего интервала интегрирования по времени. Средний уровень нелинейности в процессе эволюции системы составил малую величину порядка $1.5 \cdot 10^{-2}$.

На рисунке 2 представлена форма границы жидкости в начальный момент и в момент времени $t = 3.16 \cdot 10^3$, можно видеть, что в режиме квазистационарной диссипации энергии она приобретает сложную нерегулярную форму. При этом функции плотности вероятности для углов наклона границы становятся очень близкими к нормальному распределению Гаусса, см. рис. 3. Этот факт свидетельствует об отсутствии сильных пространственно-временных корреляций, а, значит, и о возможном возникновении колмогоровского спектра волновой турбулентности.

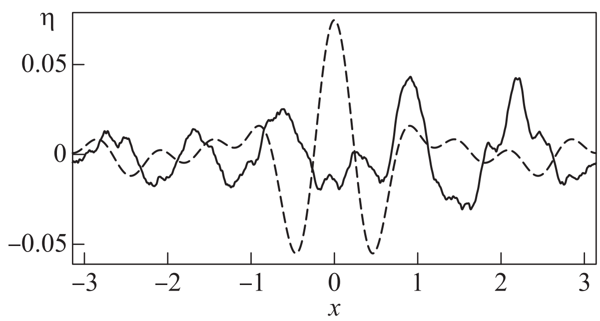

Рис. 2. Форма границы жидкости в начальный момент (пунктирная линия) и в момент времени $t = 3.16 \cdot 10^3$ (сплошная линия)

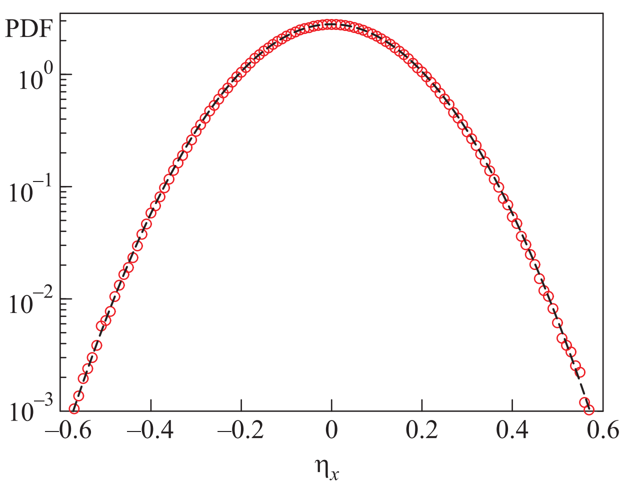

Рис. 3. (Цветной онлайн) Маркерами показана функция плотности вероятности PDF (*probability density function*) для крутизны границы, пунктирная линия соответствует нормальному распределению Гаусса

На рисунке 4 представлен усредненный по времени спектр поверхностных возмущений границы жидкости:

$$I_\beta = (T)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} |\eta_k|^2 dt,$$

где $T = t_2 - t_1$ – период усреднения по времени (усреднение проводилось в стационарном режиме).

Как видно из рис. 4, полученный спектр поверхностных возмущений далек от классического спектра Захарова–Филоненко и с большой точностью может быть аппроксимирован степенной зависимостью $k^{-2.5}$. Примечательно, что наклон спектра в режиме волновой турбулентности одинаков для всех проведенных расчетов. На рисунке 5 представлены скомпенсированные спектры для трех численных экспериментов с различными β. Рисунок 5 показывает, что полученная эмпирическая зависимость очень хорошо описывает данные численных экспериментов. В целом, результаты расчетов можно интерпретировать как обнаружение нового спектра волновой турбулентности поверхности жидкости, отличного от классических спектров для капиллярных и гравитационных волн.

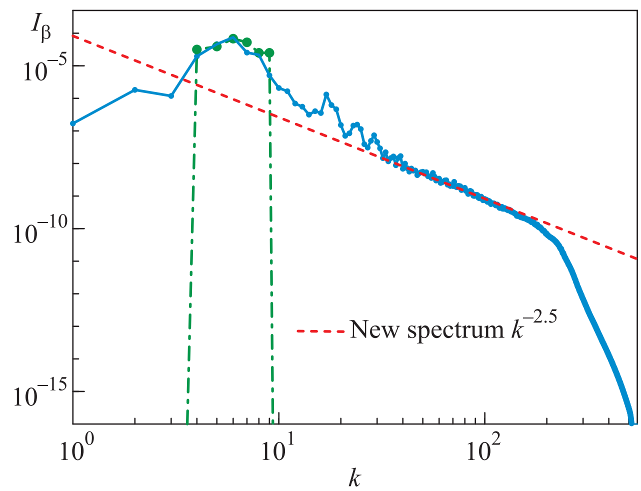

Рис. 4. (Цветной онлайн) Спектр возмущений поверхности I_β (сплошная синяя кривая), спектр начального возмущения (штрих-пунктирная зеленая линия), степенная зависимость $k^{-2.5}$ (пунктирная красная линия)

Представленные расчеты проводились для достаточно сильных внешних электрических полей. При уменьшении напряженности поля увеличивался уровень нелинейности, необходимый для реализации прямого каскада энергии. При нулевом внешнем электрическом поле нам не удалось получить турбулентный спектр Захарова–Филоненко (1). Этот факт

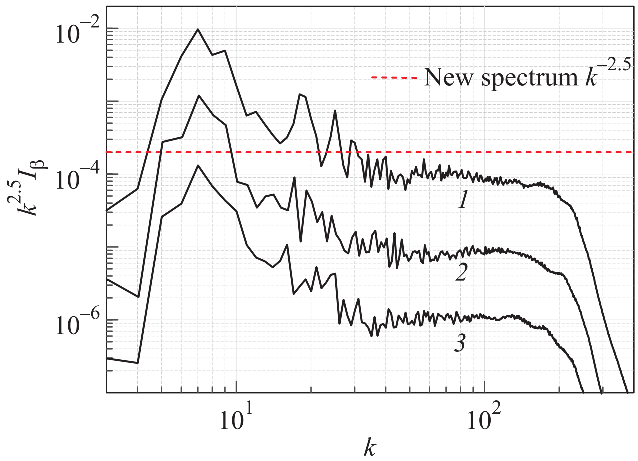

Рис. 5. (Цветной онлайн) Скомпенсированные спектры поверхностных возмущений для различных значений напряженности электрического поля: *1* – $k^{2.5} I_\beta$ ($\beta^2 = 35$); *2* – $0.1k^{2.5} I_\beta$ ($\beta^2 = 30$); *3* – $0.01k^{2.5} I_\beta$ ($\beta^2 = 25$), пунктирная красная линия соответствует степенной зависимости $k^{-2.5}$

может быть связан с отсутствием условий для реализации трехволнового резонанса капиллярных волн в одномерной геометрии. Действительно, несложно показать, что для капиллярных волн ($\omega^2 = k^3$) условия трехволнового резонанса

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad k = k_1 + k_2, \tag{7}$$

в 1D-геометрии не могут быть выполнены. При включении сильного электрического поля, т.е. при $\beta \gg 1$, дисперсионное соотношение (3) в области малых волновых чисел $k < \beta^2$ можно записать как

$$\omega^2 = \beta^2 k^2.$$

Для этого соотношения условия (7) выполняются при любых k. Таким образом, при увеличении напряженности поля увеличивается и вероятность реализации условий трехволнового квазирезонанса для электрокапиллярных волн (3).

Стоит отметить, что исследованная в настоящей работе волновая турбулентность очень напоминает волновую магнитогидродинамическую (МГД) турбулентность взаимодействующих альфвеновских волн. Известно, что волны в идеально проводящей жидкости могут распространяться без искажений вдоль направления внешнего магнитного поля. Взаимодействие возможно только между встречными волнами, и оно является упругим [28]. Идентичными свойствами обладают исследуемые в настоящей работе поверхностные волны в режиме сильного электрического поля [23]. Классическим результатом в исследовании волновой МГД турбулентности является спектр Ирошникова–Крайчнана [29, 30]. Приведем кратко рассуждения о выводе этого спектра и покажем, что полученная эмпирическая зависимость $I_\beta \sim k^{-5/2}$ может быть тесно связана с волновой МГД турбулентностью.

В переделе сильного поля время взаимодействия τ встречных "квазичастиц" (гармоник) магнитного поля (в нашем случае электрического поля) с длиной волны $\lambda \sim k^{-1}$ и скоростью v_k можно оценить как

$$\tau \sim 1/kV_A,$$

где V_A – аналог альфвеновской скорости для нашей задачи: $V_A = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon E^2/\rho}$. Возмущения скорости являются малыми, т.е. $v_k/V_A \ll 1$. Спектральная плотность кинетической энергии $E_T(k)$ в одномерном случае связана со скоростью v_k, как $v_k \sim [E_T(k)k]^{1/2}$. Для упругого взаимодействия волн спектральные плотности кинетической E_T и потенциальной (электростатической) энергии E_U пропорциональны друг другу $E_T \sim E_U$. При элементарном взаимодействии происходит искажение волнового пакета $\Delta v_k \sim v_k^2/V_A$ (это выражение есть следствие предположения о доминирующем влиянии квадратично-нелинейных слагаемых). Количество "столкновений" N_{int}, необходимое для существенного искажения волнового пакета, оценивается как [31]

$$N_{\text{int}} = \frac{V_A}{\Delta v_k} \sim \left(\frac{V_A}{v_k}\right)^2 \gg 1.$$

Теперь можно ввести время перераспределения энергии $\tau_E \sim N_{\text{int}}/kV_A$. Скорость диссипации энергии s не должна зависеть от волнового числа (условие локального характера перекачки энергии)

$$v_k^2/\tau_E = s.$$

Подставляя в это равенство выражение для τ_E, можно получить спектральные распределения для скорости v_k и, как следствие, для кинетической E_T и потенциальной энергии E_U в турбулентном режиме,

$$v_k^2 \sim (sV_A)^{1/2} k^{-1/2}, \quad E_U \sim E_T \sim (sV_A)^{1/2} k^{-3/2}. \tag{8}$$

Выражение (8) представляет собой классический спектр Ирошникова–Крайчнана. Теперь необходимо вернуться к нашему спектру поверхностных возмущений $\langle |\eta_k|^2 \rangle = I_\beta$. В пределе сильного поля связь между флуктуациями скорости v_k и возмущениями поверхности η_k имеет вид $v_k \sim V_A k \eta_k$. В итоге из (8) получаем искомый спектр поверхностных возмущений

$$\langle |\eta_k|^2 \rangle = I_\beta \sim s^{1/2} V_A^{-3/2} k^{-5/2}. \tag{9}$$

Таким образом, наблюдаемый в численных экспериментах спектр I_β качественно согласуется с полученным выражением (9), являющимся прямым следствием энергетического спектра Ирошникова–Крайчнана (8) для волновой МГД турбулентности.

В заключение отметим, что полученные результаты применимы для ферромагнитной жидкости с высокой проницаемостью во внешнем магнитном поле. В совокупности с результатами работ [18, 19] полученные данные свидетельствуют о реализации нового спектра волновой турбулентности поверхности жидкости во внешнем магнитном (электрическом) поле.

Автор выражает глубокую признательность Н.М. Зубареву и Н.Б. Волкову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке проекта Уральского отделения РАН # 18-2-2-15 и Российского фонда фундаментальных исследований проект # 17-08-00430.

1. В.Е. Захаров, Н.Н. Филоненко, ПМТФ **8**(4), 62 (1967).
2. A.N. Pushkarev and V.E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **76**(18), 3320 (1996).
3. М.Ю. Бражников, Г.В. Колмаков, А.А. Левченко, Л.П. Межов-Деглин, Письма в ЖЭТФ **73**(8), 443 (2001).
4. M.Yu. Brazhnikov, G.V. Kolmakov, A.A. Levchenko, and L.P. Mezhov-Deglin, Europhys. Lett. **58**(4), 510 (2002).
5. L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu, and E. Falcon, Phys. Rev. Lett. **112**, 234501 (2014)
6. O.M. Phillips, J. Fluid Mech. **4**, 426 (1958).
7. V.E. Zakharov and N.N. Filonenko, Sov. Phys. Dokl. **11**, 881 (1967).
8. S. Nazarenko and S. Lukaschuk, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **7**, 61 (2016).
9. J.R. Melcher, Phys. Fluids **4**, 1348 (1961).
10. А.И. Жакин, УФН **183**(2), 153 (2013).
11. D. Koulova, H. Romat, and C.L. Louste, IEEE Trans. Diel. Electr. Insul. **25**(5), 1716 (2018).
12. B. Tao and D.L. Guo, Comput. Math. Appl. **67**, 627 (2014).
13. B. Tao, Comput. Math. Appl. **76**, 799 (2018).
14. N.M. Zuabrev, Phys. Rev. E **65**, 055301 (2002).
15. N.M. Zuabrev, Phys. Fluids **18**, 028103 (2006).
16. T. Gao, P.A. Milewski, D.T. Papageorgiou, and J.-M. Vanden-Broeck, J. Eng. Math. **108**, 107 (2018).
17. Z. Wang, Proc. R. Soc. A **473**, 20160817 (2017).
18. S. Dorbolo and E. Falcon, Phys. Rev. E **83**, 046303 (2011).
19. F. Boyer and E. Falcon, Phys. Rev. Lett. **101**, 244502 (2008).
20. N.M. Zubarev, Phys. Lett. A **333**, 284 (2004).
21. Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева, Письма в ЖТФ **32**(20), 40 (2006).
22. Н.М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **89**, 317 (2009).
23. Н.М. Зубарев, Е.А. Кочурин, Письма в ЖЭТФ **99**(11), 729 (2014).
24. Е.А. Кочурин, ПМТФ **59**(1), 91 (2018).
25. E.A. Kochurin and N.M. Zubarev, IEEE Trans. Diel. Electr. Insul. **25**(5), 1723 (2018).
26. A.O. Korotkevich, A.I. Dyachenko, and V.E. Zakharov, Physica D **321–322**, 51 (2016).
27. E.A. Kochurin and N.M. Zubarev, J. Phys.: Conf. Ser. **946**, 012021 (2018).
28. P. Goldreich and S. Sridhar, Astrophys. J. **438**, 763 (1995).
29. П.С. Ирошников, Астрономический журнал **40**, 742 (1963).
30. R.H. Kraichnan, Phys. Fluids **8**, 1385 (1965).
31. P. Goldreich and S. Sridhar, Astrophys. J. **485**, 680 (1997).