Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 5, с. 312 – 319

О темпе диссипации океанских волн, вызванной их обрушением[1)]

А. О. Короткевич[+*2)], *А. О. Прокофьев*[*], *В. Е. Захаров*[*×]

[+]*Факультет Математики, Университет Нью-Мексико, Альбукерке, 87131-0001 Нью-Мексико, США*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия*

[×]*Факультет Математики, Университет Аризоны, 85721-0089 Тусон, Аризона, США*

Поступила в редакцию 13 декабря 2018 г.
После переработки 13 декабря 2018 г.
Принята к публикации 27 декабря 2018 г.

В данной работе мы вычисляем темп диссипации энергии океанских волн, возникающей благодаря их обрушению. Было проведено два независимых численных эксперимента. В первом из них мы решали приближенные уравнения Эйлера, описывающие потенциальное течение глубокой жидкости со свободной поверхностью в полной трехмерной геометрии. Уравнения были получены в результате разложения гамильтониана по степеням крутизны поверхности, учитывая трех- и четырехволновые взаимодействия. Этот подход применим только при умеренных значениях крутизны $\mu < 0.09$. Во втором эксперименте мы решали точные уравнения Эйлера, но в двумерной геометрии. Мы совершили конформное отображение жидкости на нижнюю полуплоскость. Этот подход применим при любых значениях крутизны. В обоих экспериментах получены близкие результаты. Обрушение волн является пороговым процессом, возникающим при средней крутизне, превышающей $\mu > \mu_{cr} \simeq 0.055$. Темп диссипации энергии благодаря обрушениям очень быстро растет с ростом крутизны. Сравнение полученных нами “функций диссипации” с функциями, используемыми в операционных моделях предсказания ветрового волнения, показывает, что последние дают значение темпа диссипации на порядок выше для типичных значений крутизны.

DOI: 10.1134/S0370274X19050060

1. Введение. Образование обрушающихся гребней на поверхности жидкости – это знакомое практически всем физическое явление. Это мощный механизм диссипации энергии и импульса волнения, переносящий эти интегралы движения от потенциального течения внутри волн в турбулентное течение жидкости в приповерхностном слое. Определение “функции диссипации” – скорости переноса энергии от потенциального течения к турбулентному в возбужденном ветром море является необходимым условием для правильного предсказания ветрового волнения в рамках операционных моделей. В течение последних двух десятилетий процесс улучшения точности основных операционных моделей (WAM3, WAM4, WAVEWATCH) замедлился. По нашему мнению, основной причиной для этого является использование недостаточно обоснованных, если не сказать ошибочных, функций диссипации. Поэтому правильная, физически обоснованная параметризация функций диссипации является вопросом большой практической значимости. В настоящий момент применяются как минимум три различные функции диссипации [1]. Все они чисто эвристические, ни одна не подтверждалась прямым экспериментом или аналитически.

Изучение процесса обрушения волн имеет и большое теоретическое значение. Обрушение волн – это яркий пример локализации энергии во времени и пространстве в результате сильно нелинейных процессов. Другой важный класс подобных процессов – это волновые коллапсы, как, например, самофокусировка в нелинейной оптике [2] или коллапс ленгмюровских волн в плазме [3]. Волновые коллапсы, как и обрушение волн, суть механизмы образования “горячих точек”, в которых происходит диссипация энергии, однако, более детальное обсуждение этой темы выходит за рамки данной статьи. Мы только заметим, что теория волновых коллапсов гораздо более развита, чем теория обрушения волн [2, 3].

С математической точки зрения, коллапс является точкой формирования сингулярности в уравнениях, описывающих данный физический процесс, причем сингулярность возникает за конечное время. Как правило, этот процесс описывается автомодельным

[1)]См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

[2)]e-mail: alexkor@math.unm.edu

решением [2] соответствующих уравнений. Это решение является, как минимум, локальным, а иногда и глобальным аттрактором, так что коллапсы имеют стандартную универсальную структуру. Обрушение волн – это гораздо более сложное и менее понятое явление. Типичный сценарий включает в себя формирование узкой струи (“языка”) на гребне обрушающейся волны. Струя быстро становится неустойчивой, турбулентной и превращается в облако капель. До сих пор не ясно, существует ли универсальный сценарий обрушения. Построение аналитической модели обрушения является чрезвычайно трудной задачей (см. обзор [4], в недавней работе [5] описано численное моделирование начальной стадии обрушения и образования капель).

Тем не менее, построение научно обоснованной функции диссипации не является безнадежной задачей. Все возможные сценарии обрушения начинаются с быстрого роста кривизны поверхности в некоторой небольшой области (см. недавнюю работу [5] с описанием одного из механизмов этого процесса). Можно переместиться в движущуюся систему отсчета, связанную с этой областью, и сформулировать простую и правдоподобную гипотезу: вся энергия и весь импульс, сосредоточенные в области обрушения, будут потеряны для потенциального течения. Приняв эту гипотезу, мы перестаем интересоваться деталями данного процесса. Потеряв часть энергии и импульса, мы начинаем вычисления с нового начального условия. Тут полезна следующая аналогия: если мы сбрасываем камень с обрыва, детальное описание его вращения на пути к земле нам не нужно. Просто этот камень потерян.

Этой гипотезе можно придать и другую интерпретацию, совершив преобразования Фурье по пространственным переменным. Обрушению предшествует образование зоны большой кривизны. Формирование этой зоны есть ни что иное, как образование в Фурье пространстве “толстого хвоста” у пространственного спектра волнения. Гипотеза, сформулированная выше, означает, что энергия и импульс, сосредоточенные в “хвосте”, быстро диссипируют, так что “хвост отрезается”. Этот процесс не может быть изучен в рамках кинетического уравнения Хассельманна. Его можно описать, только применяя динамические (разрешающие фазы) уравнения, точные или приближенные. Диссипация может быть искусственно введена в эти уравнения в виде “гипервязких” диссипативных членов, реагирующих только на коротковолновую часть спектра и сосредоточенных в физическом пространстве только в зонах повышенной кривизны. В силу закона сохранения энергии, количество энергии, поглощенной гипервязкостью, которое может быть легко измерено, в точности равно энергии, теряемой волнением в акте обрушения.

Мы реализовали эту стратегию, произведя два обширных численных эксперимента, которые описаны ниже. Мы получили близкие, почти совпадающие результаты, ведущие к фундаментальному наблюдению, – обрушение волн суть пороговый процесс. Эта идея не является новой, она была высказана М. Баннером и его соавторами [6–8] почти два десятилетия назад. В данной статье мы приводим новые аргументы в поддержку этой идеи, основанные на прямых численных экспериментах.

В описании океанского волнения критическую роль играет безразмерный параметр – крутизна. Существуют разные ее определения. Пусть $\eta(\mathbf{r},t)$ – это форма поверхности (отклонение от невозмущенного горизонтального состояния). Дисперсия отклонения поверхности определяется как $\sigma^2 = \langle\eta^2\rangle$. Естественное “физическое” определение крутизны μ – это

$$\mu^2 = \langle|\boldsymbol{\nabla}\eta|^2\rangle, \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{\nabla}$ – это градиент, вычисленный в плоскости поверхности жидкости, обычно в плоскости XY. Это определение вводит среднеквадратичный наклон поверхности. Однако, эта “физическая” крутизна с трудом поддается измерению в натурном эксперименте. По этой причине удобно ввести “океанографическую” крутизну

$$S^2 = k_p^2\sigma^2, \tag{2}$$

здесь k_p – волновое число спектрального пика. Для чисто монохроматической волны эти два определения совпадают. В реальном море, где спектр имеет степенной “хвост”, физическая крутизна оказывается выше океанографической. В наших экспериментах спектры были близки к монохроматическим, поэтому мы не различаем эти два определения крутизны, обозначая ее везде одной и той же буквой μ.

В согласии с ранее сформулированной М. Баннером и его соавторами [6–8] концепции, мы обнаружили, что обрушение волн – это пороговый процесс с пороговым значением крутизны $\mu_{cr} \simeq 0.056$. Если $\mu < \mu_{cr}$, обрушение практически отсутствует. При $\mu \geq \mu_{cr}$, функция диссипации S_{diss} быстро растет от $(\mu - \mu_{cr})$.

Полученная нами зависимость функции диссипации от средней крутизны μ существенно отличается от общепринятой параметризации функции диссипации $S_{\mathrm{diss}} \simeq \mu^4$ [9]. Хотелось бы подчеркнуть, что наши результаты прекрасно согласуются с экспериментальными наблюдениями в океане и на озере Вашингтона, выполненными Баннером, Бабаниным и

Янгом [6–8]. Они не измеряли энергию, диссипируемую при обрушениях, но изучали вероятность появления “белых гребней” (“барашков”), сигнализирующих, что происходит обрушение. Ими был получен такой же результат – появление “барашков” является пороговым процессом. Вероятность их появления почти ноль, если $\mu < \mu_{cr}$ и быстро растет с увеличением $\mu - \mu_{cr}$. Это ровно то, что мы наблюдали в наших численных экспериментах, причем величина μ_{cr} у нас и группы Баннера практически совпадает.

Результаты наших численных экспериментов приводят к важному практическому выводу: существующие операционные модели сильно переоценивают роль диссипации за счет обрушений, особенно для “зрелого” или “старого” моря, когда значение средней крутизны μ мало. Функция диссипации должна быть значительно уменьшена, особенно для длинных волн в области спектрального пика. Мы осознаем, что это означает полную переоценку уравнений энергетического баланса в области “универсальности” спектра и выбор более реалистичных моделей накачки ветром S_{in}. Однако, эти вопросы выходят за рамки данной статьи.

Предварительные результаты нашей работы были опубликованы в [10]. Недавно был проведен другой численный эксперимент [11], в котором использовалась существенно упрощенная версия динамических уравнений, верная лишь в двумерной геометрии. Данный эксперимент полностью подтверждает результаты нашей статьи и поддерживают наш главный вывод: диссипационные функции, используемые в операционных моделях, переоценивают вклад обрушений волн в баланс волновой энергии и должны быть пересмотрены.

2. Основные модели. Мы рассматриваем потенциальное движение идеальной невязкой жидкости с потенциалом скорости $\phi = \phi(x, y, z; t)$, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0. \tag{3}$$

Жидкость является глубокой, так что мы решаем уравнение (3) в области $-\infty < z < \eta(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{r} = (x, y)$ – координаты на спокойной поверхности. Пусть $\psi = \phi|_{z=\eta}$ – потенциал скорости, вычисленный на поверхности. Введение $\eta = \eta(\mathbf{r}, t)$, $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ вместе с граничным условием $\phi_z \to 0$, $z \to -\infty$ определяет однозначно разрешимую задачу Дирихле–Неймана для уравнения Лапаласа. Как было показано в [12], η и ψ подчиняются уравнению Гамильтона:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \tag{4}$$

здесь H – это Гамильтониан системы

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(g\eta^2 + \int_{-\infty}^{\eta} |\nabla\phi|^2 \mathrm{d}z \right).$$

К сожалению, H не может быть выражена в явном виде через η и ψ. Однако, можно ограничиться первыми тремя членами в разложении гамильтониана по степеням η и ψ [12]

$$\begin{gathered} H = H_0 + H_1 + H_2 + ..., \\ H_0 = \frac{1}{2}\int \left(g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ H_1 = \frac{1}{2}\int \eta \left[|\nabla\psi|^2 - (\hat{k}\psi)^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ H_2 = \frac{1}{2}\int \eta(\hat{k}\psi) \left[\hat{k}(\eta(\hat{k}\psi)) + \eta\Delta\psi \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\hat{k}$ – линейный оператор $\left(\hat{k} = \sqrt{-\Delta}\right)$, в Фурье пространстве он соответствует умножению гармоник ($\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi}\int \psi_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{kr}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$) на $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Для гравитационных волн этот упрощенный Гамильтониан описывает взаимодействия до четырехволновых включительно.

В таком случае, динамические уравнения (4) принимают следующую форму:

$$\begin{gathered} \dot{\eta} = \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \\ + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \frac{1}{2}\Delta[\eta^2\hat{k}\psi] + \frac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\Delta\psi] - \widehat{F}^{-1}[\gamma_k\eta_k], \\ \dot{\psi} = -g\eta - \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2 \right] - \\ - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\Delta\psi - \widehat{F}^{-1}[\gamma_k\psi_k]. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь точка означает производную по времени, $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа, $\widehat{F}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье, γ_k – диссипативный член (согласно работе [13] он должен быть включен в оба уравнения), который описывает гипервязкость на малых масштабах. Подробное описание использованного численного алгоритма решения системы (6) опубликовано в нашей недавней работе [14].

Разложение (5) верно в полном трехмерном случае. В более простой двумерной геометрии зависимость от y исчезает и можно ввести комплексную координату $Z = x + \mathrm{i}z$, в физической плоскости и выполнить конформное отображение на нижнюю полуплоскость “математической” плоскости $W = u + \mathrm{i}v$. Конформное преобразование полностью характеризуется Якобианом $R = W_Z = \frac{1}{Z_W}$. Течение жидкости определяется комплексным потенциалом скорости $\Phi = \Psi + \mathrm{i}\widehat{H}\Psi$. Здесь $\widehat{H}$ — это преобразование Гильберта: $\widehat{H}\Psi = \frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Psi(s)}{s-u}\mathrm{d}s$. Комплексная скорость получается из уравнения $V = \mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$. Обе функции R и Φ аналитические в нижней полуплоскости $v < 0$. Дьяченко А.И. показал, что R и V удовлетворяют "уравнениям Дьяченко" [15]:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \mathrm{i}(UR' - RU'),\ \frac{\partial V}{\partial t} = \mathrm{i}(UV' - RB') + g(R-1). \tag{7}$$

Здесь $U = P^-(R\bar{V} + \bar{R}V)$ и $B = P^-(V\bar{V})$. $P^- = 1/2(1+\mathrm{i}\widehat{H})$ – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость. Хотелось бы подчеркнуть, что (7) являются **точными** уравнениями, полностью эквивалентными уравнениям Эйлера. Численный алгоритм для их решения был аналогичен использованному в работе [16].

3. Результаты экспериментов.

3.1. Трехмерный эксперимент. Мы моделировали уравнения (6) в периодической области размера $2\pi \times 2\pi$ со спектральным разрешением 512×4096. Мы не прикладываем внешние силы, но изучаем распад заранее созданной волновой турбулентности, которая является почти одномерной зыбью, и вследствии этого может быть промоделирована на столь анизотропной сетке. Мы использовали следующее затухание:

$$\gamma_k = \begin{cases} 0, k < k_d, & k_d = 1024, \\ -\gamma(k-k_d)^2, k \geq k_d, & \gamma = 2.86 \cdot 10^{-3}. \end{cases} \tag{8}$$

Ускорение силы тяжести $g = 1$, шаг по времени $\Delta t = 4.23 \cdot 10^{-4}$.

Начальное условие для спектра – это Гауссиана, расположеная вокруг точки $\mathbf{k}_0 = (0; 100)$ с шириной $D_i = 30$. Амплитуды всех гармоник были случайны со следующим средним

$$\begin{cases} |a_{\mathbf{k}}| = A_i \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|^2}{D_i^2}\right), |\mathbf{k}-\mathbf{k}_0| \leq 2D_i, \\ |a_{\mathbf{k}}| = 10^{-12}, |\mathbf{k}-\mathbf{k}_0| > 2D_i. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $a_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}}\eta_{\mathbf{k}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{2\omega_k}}\psi_{\mathbf{k}}$ – нормальные переменные [14]. Случайные значения фаз были равномерно распределены на интервале $[0; 2\pi)$. Значение амплитуды A_i менялось так, чтобы обеспечить требуемые значения средней крутизны, которые принадлежали интервалу от 0.05 до 0.09.

Во время эксперимента мы наблюдали динамику начального спектрального распределения в течение времени $100T_0$, здесь T_0 – период волны спектрального максимума. Это примерно в десять раз дольше "нелинейного времени", за которое развиваются вынужденные гармоники. Этого времени достаточно, чтобы проследить эволюцию начального распределения к квазистационарному автомодельному состоянию. За это время происходит формирование степенных "хвостов", соответствующих спектру Колмогорова–Захарова (КЗ) [17, 18], которые обычно наблюдаются в полевых и лабораторных экспериментах (например, см. [19]).

В нашем эксперименте у нас есть примерно одна декада по волновым векторам. Это позволяет нам наблюдать формирование длинного спектрального "хвоста" и при этом быть уверенными, что область затухания не влияет на область спектрального максимума напрямую. Хотелось бы отметить, что это недалеко от реальности. При ветровом волнении инерционный интервал гравитационных волн занимает приблизительно следующий диапазон (см. [19])

$$\omega_p < \omega < 3.5\omega_p,$$

здесь ω_p – угловая частота спектрального максимума, соответствующая волновому числу k_p. Данный спектральный диапазон достаточно широк, чтобы обеспечить формирование острых гребней, в которых локальная крутизна много выше средней. Гамильтониан разлагается по степеням канонических переменных, что накладывает ограничение на величину среней крутизны. Слишком большая начальная крутизна может привести к появлению неустойчивости счета и к "взрыву" схемы. С другой стороны, крутизна должна быть достаточно большой, чтобы преодолеть эффект дискретной сетки (см. [20]). Мы балансировали между этими двумя противоречивыми требованиями, и в этом заключалась основная сложность эксперимента.

В процессе численного эксперимента мы вычисляли обратную нормализованную временную производную полного волнового действия:

$$\gamma_{\text{diss}} = \frac{N'}{\omega_0 N} = 2\frac{N(t+10T_0) - N(t)}{10T_0\omega_0(N(t+10T_0)+N(t))},$$

здесь $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$, было вычислено в три разных момента времени $t = 70T_0$, $t = 80T_0$ и $t = 90T_0$. Поскольку начальное волновое поле было случайным, в первом приближении мы можем считать эти три счета тремя независимыми экспериментами с тремя независимыми спектральными ансамблями. Результаты экспериментов представлены на рис. 1.

Заметим, что при $\omega \simeq 3.5\omega_p$ КЗ-спектр $\sim \omega^{-4}$ переходит при довольно общих условиях в спектр Филлипса [21, 22]. Этот переход дожен быть изучен более тщательно. Некоторые предварительные результаты изложены в работах [23, 24].

3.2. Двумерный эксперимент. В этом эксперименте мы численно решали уравнения Дьяченко (7)

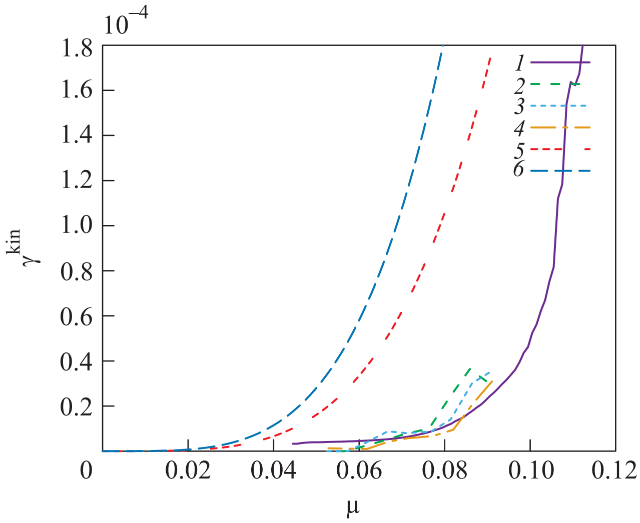

Рис. 1. (Цветной онлайн) Диссипативный член $\gamma_{\rm diss}$ как функция от средней крутизны. Результат трехмерного и двумерного экспериментов. Кривая *1* – полностью нелинейный двумерный эксперимент; кривая *2* – трехмерный эксперимент, производная посчитана на промежутке времени от $70T_0$ до $80T_0$; кривая *3* – трехмерный эксперимент, производная посчитана на промежутке времени от $80T_0$ до $90T_0$; кривая *4* – трехмерный эксперимент, производная посчитана на промежутке времени от $90T_0$ до $100T_0$; кривая *5* – $2.58\mu^4$, что соответствует модели $WAM3$ для волнового пакета в форме $\delta(\mathbf{k})$; кривая *6* – $4.48\mu^4$, что соответствует модели $WAM4$ для волнового пакета в форме $\delta(\mathbf{k})$

в области длины 2π с периодическими граничными условиями. Был использован спектральный код с разрешением в 8192 гармоники. Мы заменили производную по времени в уравнениях для R и V на

$$\frac{\partial}{\partial t} := \frac{\partial}{\partial t} - \gamma_p(k) + 2.0\times 10^{-12}k^4. \qquad (10)$$

Здесь $\gamma_p(k)$ – симметричная в k-пространстве накачка, сконцентрированная вблизи $k = k_0 = 35$. В качестве начальных данных мы использовали $R = 1$, V – белый шум со случайными фазами и амплитудой 10^{-20}.

В начальной стадии эксперимента накачка формирует квазимонохроматическую стоячую волну с очень большой крутизной $\mu = \sqrt{\langle(\eta'(x))^2\rangle} \simeq 0.2$. После этого, мы отключали накачку и измеряли $\gamma_{\rm diss} = \frac{N'}{\omega_p N}$, где ω_p – частота k_p. Идея была в том, чтобы достичь крутизн, которые далеко за пределами применимости усеченного Гамильтониана, использованного в трехмерном эксперименте, и потом дождаться естественного уменьшения крутизны до того уровня, который мы наблюдали в трехмерных экспериментах. Мы наблюдали, что диссипация очень быстро приводит к уменьшению крутизны до уровня $\mu \simeq 0.1$, после чего резко замедляется. Результаты представлены на рис. 1 вместе с результатами трехмерного эксперимента. Скорость диссипации для больших крутизн представлена на рис. 2. Видно, что крутые

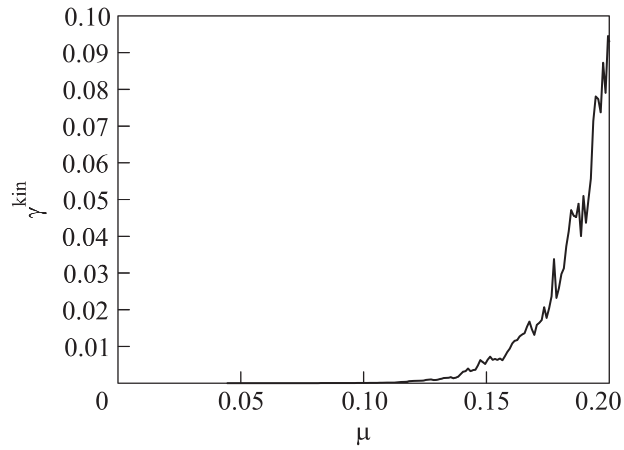

Рис. 2. Диссипативный член $\gamma_{\rm diss}$ как функция от средней крутизны $\mu = \sqrt{\langle|\eta'(x)|^2\rangle}$

волны теряют энергию очень быстро, буквально за несколько периодов.

3.3. Сравнение с моделями предсказания волнения. Широко используемые модели предсказания WAM3 и WAM4 используют диссипационную функцию, зависящую от волнового числа k следующим образом:

$$\gamma_{\mathbf{k}} = C_{ds}\tilde{\omega}\frac{k}{\tilde{k}}\left((1-\delta)+\delta\frac{k}{\tilde{k}}\right)\left(\frac{S}{S_{PM}}\right)^p, \qquad (11)$$

здесь k и ω – волновое число и частота, тильда означает среднее значение; C_{ds}, δ и p – подгоночные параметры; $S = k_p\sigma$ – “океанографическая” крутизна; $S_{PM} = (3.02\times 10^{-3})^{1/2}$ – величина $\tilde{S}$ для спектра Пирсона–Московица.

Значения подгоночных параметров для *WAM3* следующие:

$$C_{ds} = 2.35\times 10^{-5},\ \ \delta = 0,\ \ p = 4, \qquad (12)$$

а для модели *WAM4* они таковы:

$$C_{ds} = 4.09\times 10^{-5},\ \ \delta = 0.5,\ \ p = 4. \qquad (13)$$

Поскольку нас интересуют только грубые оценки, мы можем положить $S \simeq \mu$ и что спектр сосредоточен возле спектрального максимума $k = \tilde{k}$, $\omega = \tilde{\omega}$. В результате мы получили следующие нормализованные на частоту ω значения темпа диссипации $\gamma_{\rm diss} \simeq 2.58\mu^4$ для модели WAM3 и $\gamma_{\rm diss} \simeq 4.48\mu^4$ для модели WAM4. Соответствующие кривые приведены на рис. 1. Видно, что для крутизны $\mu \simeq 0.06$, типичной для ветрового волнения, обе модели переоценивают гибкость диссипации на порядок величины.

Мы должны подчеркнуть, что описанный "пороговый эффект" имеет место только в тех экспериментах, в которых спектральный пик k_p и область начала искусственной диссипации k_d достаточно разделены в k-просттранстве. Если они достаточно близки (скажем $k_d \sim 3k_p$ или даже $k_d \sim 5k_p$, мы проводили такие эксперименты), наблюдается гладкая зависимость функции диссипации от крутизны, подобно тому, как это имеет место в моделях WAM. Это происходит за счет утечки энергии в область диссипации через последовательную генерацию нерезонансных вынужденных гармоник. Можно даже, в точности, воспроизвести результат WAM3 ($p = 4$), положив $k_d \sim 3k_p$. Однако, в реальном море области возбуждения волн ветром и области их естественной диссипации, за счет вязкости, разделены по k более, чем на порядок величины.

4. Обсуждение результатов. Можно задаться вопросом: "Почему авторы использовали эти две модели с такими разными начальными условиями?" Ответ прост. Если механизм диссипации, который мы предлагаем (доминирующая генерация кратных гармоник, когда начинают формироваться локальные сингулярности, которой помогает прямой каскад энергии) является универсальным, тогда результаты этих двух моделей (просто напомним, четырехволновые резонансные взаимодействия в двумерной гидродинамике отсутствуют, что означает совершенно другую физику нелинейных взаимодействий, в то время как генерация кратных гармоник точно такая же) будут не обязательно одинаковыми, но близкими. А еще, используя полностью нелинейные уравнения, можно достичь крутизн, соответствующих штормовому морю. Как мы и ожидали, наше численное моделирование дает аргументы в пользу универсальности предложенного механизма диссипации. Результаты обсуждаются в подробностях ниже.

Первое, оба эксперимента ясно показывают, что функции диссипации, широко используемые в операционных моделях, далеки от реальности и сильно переоценивают диссипацию от обрушений в энергетическом балансе ветрового волнения. Другая, менее очевидная причина такой ситуации была сформулирована в работе [4].

Сравнение трехмерного и двумерного экспериментов для "реалистичных" значений крутизны $0.06 < \mu < 0.08$ показывает, что в трехмерном случае диссипация несколько сильнее. Этот факт имеет естественное объяснение. Как упоминалось выше, имеются два совершенно разных механизма переноса энергии по спектру в область малых масштабов, где волны затухают. Один – это поток энергии колмогоровского типа обусловленный четырехволновыми резонансными взаимодействиями (см., к примеру, [25]). Второй – это прямое формирование "барашков" на гребнях волн. Сильная локальная нелинейность приводит к быстрому росту кратных вынужденных гармоник, который много быстрее, чем каскад энергии. В двумерном случае работает только второй механизм. Мы не можем прямо сравнить эффективность данных механизмов для высоких крутизн ($\mu > 0.08$) так как для настолько крутых волн любые слабонелинейные модели перестают быть верны. Тем временем, двумерные эксперименты показывают, что обрушение крутых волн (после $\mu \simeq 0.1$) является чрезвычайно мощным процессом, так что волны, близкие к критической стоксовой волне ($\mu > 0.3$), просто не могут существовать в реальности. Они очень быстро разрушаются. Механизм регуляризации таких процессов посредством формирования предельных капилярных волн недавно был промоделирован и описан в работе [5].

Наши трехмерные эксперименты подтвердили идею Баннера и соавторов [7] о "пороговом" характере обрушений волн. Имеются несколько экспериментальных аргументов в поддержку сравнения обрушения волн с фазовым переходом второго рода (например, см. [23]). Пороговый уровень $\mu_{cr} \simeq 0.055$ прекрасно согласуется с экспериментальными данными [4, 7]. Результаты двумерного эксперимента не на столько очевидны. Как видно из рис. 1, некоторая диссипация сохраняется даже для волн малой крутизны. Эта остаточная диссипация вовсе не зависит от крутизны. Это не что иное, как численный артефакт. Нам не удалось стабилизировать численную схему без введения искусственной гипервязкости во всем диапазоне масштабов. Недавние эксперименты [11], выполненные в рамках менее точной (и более устойчивой) модели двумерных волн, подтверждают пороговый характер феномена обрушения волн.

Нашей следующей задачей является формулировка диссипативной функции, более реалистичной, чем (11). Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [24]. Здесь мы предлагаем, в качестве первых предварительных результатов формулы, полученные методом нелинейных наименьших квадратов (алгоритм Маркарда–Левенберга, реализованный в программе Gnuplot [26]) для двух возможных функций. Возможно, наиболее интересным является область сравнительно малых крутизн, соответствующих "старому" или не слишком бурному морю ($0.055 \le \mu \le 0.1$). Мы рассмотрели два типа функци, экспоненциальную:

$$\gamma_k^{\mathrm{lowExp}}(\mu) = (1.248 \times 10^{-7}) \exp(59.40\mu), \tag{14}$$

и степенную от разницы крутизн $\mu - \mu_{cr}$:

$$\gamma_k^{\mathrm{lowPoly}}(\mu) = (1.040 \times 10^{-2}) |\mu - 0.055|^{1.756}. \tag{15}$$

Для крутизн, соответствующих бурному морю (вплоть до $\mu = 0.2$), мы получили другие коэффициенты. Экспоненциальная функция дала такую зависимость:

$$\gamma_k^{\mathrm{highExp}}(\mu) = (8.679 \times 10^{-7}) \exp(58.00\mu), \tag{16}$$

в то время как степенная функция дала такой результат:

$$\gamma_k^{\mathrm{highPoly}}(\mu) = (1.468 \times 10^{5}) |\mu - 0.055|^{7.398}. \tag{17}$$

Необходимо отметить, что данный выбор функций несколько случаен. Как дополнительный материал к статье мы предоставляем измеренные зависимости диссипации от крутизны для каждого эксперимента, так что исследователи могут предложить функцию, которую считают более правильной и попытаться найти соответствующие коэффициенты, используя любой из стандартных вычислительных пакетов.

В силу этого, давайте опишем формат и файлы дополнительных материалов. Все файлы являются простым текстом, содержащим две колонки: первая – это средняя крутизна, а вторая – измеренная величина темпа диссипации γ. Файл `mu_gamma_3D.data` содержит данные для трехмерных экспериментов. Для каждого эксперимента мы усреднили три значения, полученные от временных интервалов $80-70T_0$, $90-80T_0$, и $100-90T_0$ как объяснено выше в соответствующем разделе. Усреднялись обе величины (крутизна и темп диссипации). Файл `mu_gamma_2D.data` содержит данные двумерного эксперимента. Видно, что для значений крутизны $\mu < 0.065$ искусственная вязкость оказывает влияние на результаты, как подробно обсуждалось выше. Поэтому мы решили объединить оба набора данных и использовать все точки из трехмерного эксперимента, дополненные точками для более высоких крутизн из двумерного эксперимента для подгонки коэффициентов предлагаемых функций. Этот комбинированный набор данных представлен файлом `mu_gamma_2D_3D.data`. Мы выражаем надежду, что эти начальные результаты могут быть использованы научным сообществом для улучшения диссипационных функций применяемых в настоящее время в различных моделях предсказания волнения.

В заключение авторы выражают благодарность за поддержку гранту по Программе РАН 0033-2018-0014. А. О. Короткевичем отмечает поддержку гранта Национального Научного Фонда (США) OCE 1131791. Анализ экспериментальных данных был выполнен А. О. Короткевичем с поддержкой гранта Ведущих Научных Школ НШ-9697.2016.2.

1. H. L. Tolman, *User manual and system documentation of WAVEWATCH III,* U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Weather Service, National Centers for Environmental Prediction (2009).
2. C. Sulem and P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*, Springer-Verlag, N.Y. (1999).
3. V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **35**(5), 908 (1972).
4. A. Pushkarev and V. E. Zakharov, Ocean Modeling **103**, 18 (2016).
5. S. A. Dyachenko and A. C. Newell, Stud. Appl. Math. **137**(2), 199 (2016).
6. M. L. Banner and X. Tian, J. Fluid Mech. **367**(1), 107 (1998).
7. M. L. Banner, A. V. Babanin, and I. R. Young, J. Phys. Oceanogr. **30**, 3145 (2000).
8. J.-B. Song and M. L. Banner, J. Phys. Oceanography **32**(9), 2541 (2002).
9. G. J. Komen, L. Cavaleri, M. Donelan, K. Hasselmann, and P. A. E. M. Janssen, *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1994).
10. V. E. Zakharov, A. O. Korotkevich, and A. O. Prokofiev, AIP Proceedings, CP1168 **2**, 1229 (2009).
11. A. I. Dyachenko, D. I. Kachulin, and V. E. Zakharov, JETP Lett. **102**(8), 513 (2015).
12. V. E. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**(2), 190 (1968).
13. F. Dias, A. I. Dyachenko, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **372**(8), 1297 (2008).
14. A. O. Korotkevich, A. I. Dyachenko, and V. E. Zakharov, Physica D **321–322**, 51 (2016).
15. A. I. Dyachenko, Dokl. Math. **63**(1), 115 (2001).
16. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, Eur. J. Mech. B - Fluids **25**(5), 677 (2006).
17. A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, and V. E. Zakharov, JETP Lett. **77**(10), 546 (2003).
18. A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **92**(13), 134501 (2004).
19. M. A. Donelan, J. Hamilton, and W. H. Hui, Phil. Trans. R. Soc. London A **315**, 509 (1985).

20. V. E. Zakharov, A. O. Korotkevich, A. Pushkarev, and A. I. Dyachenko, JETP Lett. **82**(8), 487 (2005).
21. A. O. Korotkevich, Phys. Rev. Lett. **101**(7), 074504 (2008).
22. A. O. Korotkevich, Math. Comput. Simul. **82**(7), 1228 (2012).
23. A. C. Newell and V. E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **69**, 1149 (1992).
24. V. E. Zakharov and S. I. Badulin, arXiv:1212.0963.
25. V. E. Zakharov, Phys. Scripta T **142**, 014052 (2010).
26. `http://gnuplot.info`. Gnuplot, command-driven interactive function plotting program 1986–2018.