Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 6, с. 423 – 428

Переход типа Изинг-XY в трехмерных фрустрированных антиферромагнетиках с коллинеарным спиновым упорядочением

А. О. Сорокин[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Петербургский институт ядерной физики, 188300 Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 21 ноября 2018 г.
После переработки 24 января 2019 г.
Принята к публикации 25 января 2019 г.

Методом Монте-Карло исследуется критическое поведение в двух моделях фрустрированных XY антиферромагнетиков с коллинеарным спиновым упорядочением и дополнительным двукратным вырождением основного состояния. Рассматривается классический антиферромагнетик на объемноцентрированной кубической решетке с дополнительным обменным взаимодействием между спинами, следующими за ближайшими, а также ферромагнетик на простой кубической решетке с дополнительным антиферромагнитным внутрислойным обменом. Найдено, что в обоих моделях переход как по дискретному, так и по непрерывному параметрам порядка происходит одновременно в виде перехода первого рода. В случае примерного равенства величин конкурирующих обменов наблюдается псевдоскейлинг с показателями, согласующимися с известными показателями XY магнетиков с планарным спиновым упорядочением типа антиферромагнетика на слоисто-треугольной решетке и спиральных магнетиков, принадлежащих тому же симметрийному классу. Также мы предлагаем возможное объяснение наблюдающемуся псевдоскейлинговому поведению.

DOI: 10.1134/S0370274X19060146

Критические явления во фрустрированных магнитных системах чрезвычайно интересны из-за реализации в них множества различных сценариев нарушения симметрии [1, 2]. На протяжении нескольких десятилетий обсуждалась возможность того, что магнетики с планарным спиновым упорядочением типа антиферромагнетика на слоисто-треугольной решетке и спиральных магнетиков [3] принадлежат новому классу универсальности, характеризующемуся набором показателей, отличных от показателей обычной $O(N)$-модели. Большое количество численных и экспериментальных результатов, в которых наблюдается скейлинговое и почти универсальное поведение в критической точке, подтверждают эту гипотезу (для обзора см. [4]). Однако наиболее надежные результаты указывают [5–7], что в физически интересных случаях XY ($N=2$) и изотропных ($N=3$) спинов переход — слабого первого рода. Это также подтверждается методами ренормгруппы (РГ) [8–15].

Наблюдаемое (псевдо)скейлинговое поведение, имитирующее характерные для перехода второго рода сингулярности, типично для перехода слабого первого рода [16]. Если переход почти непрерывный, то при рассмотрении систем малого размера и/или при отклонении от критической температуры переход становится неотличим от перехода второго рода. То есть в критическом поведении наблюдается кроссовер между степенным поведением в области параметров, где корреляционная длина мала, и поведением, характерным для перехода первого рода. В терминах РГ подобный кроссовер может объясняться тем, что соответствующая РГ-траектория проходит через область РГ- диаграммы, характеризующейся очень медленным РГ-потоком. Наглядным примером модели с переходом слабого первого рода и псевдоскейлинговым поведением служит двумерная 5-позиционная модель Поттса [17]. В недавней работе [18] для данной модели подобный кроссовер был детально исследован.

Псевдоуниверсальность также может быть объяснена в терминах РГ в случае, когда область замедления потока оказывается притягивающей для РГ-траекторий, стартующих с достаточно обширной области начальных параметров. Одна из ситуаций, когда подобная притягивающая область может появиться, связана с неподвижной точкой с комплексными координатами, но небольшой мнимой частью. Именно такая ситуация реализуется в $O(N)\otimes O(2)$-модели, описывающей фрустрированные магнетики

[1)]e-mail: aosorokin@gmail.com

с планарным спиновым упорядочением, для случаев $N = 2$ и $N = 3$ [8–10, 14, 15]. Однако для случая $N = 2$, которым мы интересуемся в данной работе, область, в которой РГ-поток существенно замедляется, довольно велика, и поэтому наблюдается широкий разброс в значениях псевдоиндексов для различных решеточных моделей. Более того, в некоторых моделях из рассматриваемого симметрийного класса наблюдается ярко выраженный переход первого рода (см., например, [19]).

Случай $N = 2$ $O(N) \otimes O(2)$-модели выделен тем, что упорядоченная фаза описывается двумя параметрами: дискретным и непрерывным. В общем случае нарушается $O(N)/O(N-2)$ симметрия, что для $N = 2$ сводится к группе $O(2) = \mathbb{Z}_2 \otimes SO(2)$, отвечающей симметрии относительно глобальных поворотов спинов и инверсии. В данной работе мы рассматриваем две модели фрустрированных XY антиферромагнетиков с *коллинеарным* спиновым упорядочением и дополнительным нарушением $\mathbb{Z}_2$ подгруппы группы симметрии решетки, так что нарушенной симметрией также оказывается группа $\mathbb{Z}_2 \otimes SO(2)$. Первая модель – это антиферромагнетик на объемноцентрированной кубической решетке с дополнительным обменным взаимодействием между спинами, следующими за ближайшими. Вторая модель – это так называемая слоисто-J_1-J_2 модель, описывающая ферромагнетик на простой кубической решетке с дополнительным внутрислойным обменом. На самом деле, эти модели эквивалентны двум взаимодействующим антиферромагнитным подрешеткам и имеют дополнительное бесконечное вырождение основного состояния, которое снимается температурными флуктуациями так, что только остаются только *две* неэквивалентные конфигурации (рис. 1, 2) [20, 21]. Отметим,

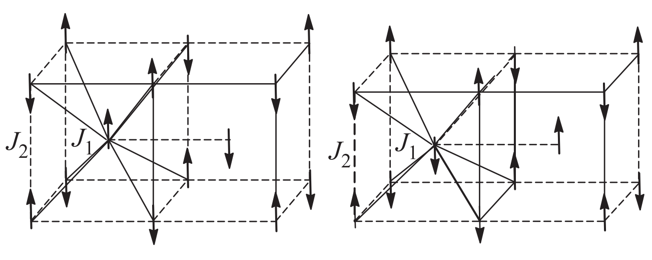

Рис. 1. Обменные взаимодействия в ОЦК модели. Приведены две конфигурации противоположной киральности, которые нельзя свести друг к другу с помощью глобальных поворотов спинов и инверсии

что модели классических фрустрированных XY антиферромагнетиков с коллинеарным спиновым упорядочением исследовались ранее для других решеток, например, простой кубической [22, 23], гранецентрированной кубической [24, 25], гексагональной плотноупакованной [26, 27] и слоисто-треугольной решеток [28, 29]. Для этих моделей дополнительное вырождение основного состояния трехкратно, и переход ярко выраженного первого рода происходит с нарушением $\mathbb{Z}_3 \otimes SO(2)$ симметрии.

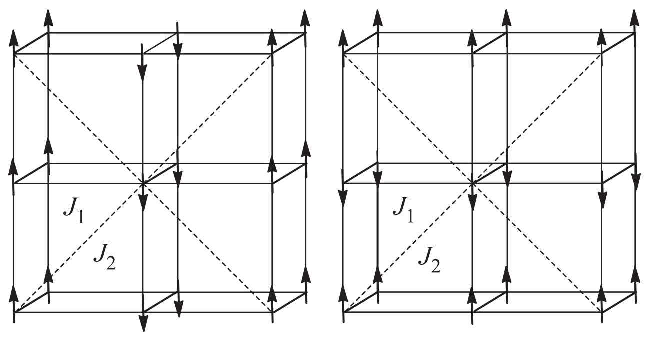

Рис. 2. Обменные взаимодействия в слоисто-J_1-J_2 модели. Приведены две конфигурации противоположной киральности, которые нельзя свести друг к другу с помощью глобальных поворотов спинов и инверсии

В данной работе мы покажем, что в обеих моделях для широкого диапазона отношения величин обменов наблюдается переход слабого первого рода одновременно по обоим параметрам порядка с псевдоскейлинговым поведением. Более неожиданно, что критические показатели имеют значения, близкие к показателям, наблюдающимся в треугольном антиферромагнетике и спиральных магнетиках (см. табл. 1). Основываясь на РГ-анализе [30], мы предлагаем возможное объяснение наблюдающемуся псевдоскейлингу.

Модель антиферромагнетика на объемноцентрированной кубической решетке (для краткости – ОЦК модель) описывается гамильтонианом

$$H = J_1 \sum_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{kl} \mathbf{S}_k \mathbf{S}_l, \qquad (1)$$

где сумма ij перечисляет все пары ближайших спинов на решетке, сумма kl перечисляет все пары спинов, следующих за ближайшими (рис. 1). Спин $\mathbf{S}$ – классический 2-компонентный вектор, $J_1, J_2 > 0$. При $J_2 < 2J_1/3$ основное состояние эквивалентно двум ферромагнитным подрешеткам, взаимодействующим антиферромагнитно, и фрустрации не возникает. Но при $J_2 > 2J_1/3$ подрешетки становятся антиферромагнитными. Два неэквивалентных основных состояния показаны на рис. 1.

Слоисто-J_1-J_2 модель описывается гамильтонианом

$$H = -J_1 \sum_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{kl} \mathbf{S}_k \mathbf{S}_l, \qquad (2)$$

где сумма ij перечисляет все пары ближайших спинов простой кубической решетки, а сумма kl перчисляет все пары следующих за ближайшими спинов внутри слоев (рис. 2). При $J_2 < J_1/2$, основное состояние упорядочено ферромагнитно. При $J_2 > J_1/2$ основному состоянию соответствуют два типа конфигураций: волновыми векторами $\mathbf{q} = (\pi, 0, 0)$ и $\mathbf{q} = (0, \pi, 0)$. Данная модель эквивалентна двум простым тетрагональным антиферромагнитным подрешеткам с векторами решетки $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, встроенным друг в друга, и сдвинутым относительно друг друга на вектор $(1, 0, 0)$. Причем, обмен J_2 отвечает внутреннему взаимодействию в подрешетках, а J_1 – взаимодействие между подрешетками. В двух измерениях данная модель численно исследовалась в [31], где было найдено, что переходы по непрерывному и дискретному параметрам порядка происходят при разных температурах. Вообще говоря, в двумерных моделях из того же симметрийного класса переходы происходят либо при различных температурах, либо одновременно в виде перехода первого рода [32, 33, 34].

Предлагаемые модели (1) и (2) исследуются методом Монте-Карло с помощью сверхрелаксационного алгоритма [35, 36]. Для определения рода перехода мы используем метод анализа гистограмм. Термализация проводится за $2 \cdot 10^5$ шагов алгоритма на спин, а вычисление термодинамически усредненных величин за $3.4 \cdot 10^6$ шагов. Используются периодические граничные условия, и рассматриваются решетки размеров $16 \leq L \leq 100$. Выбираются следующие значения соотношения обменов: $J_2/J_1 = 0.7$, 0.8, 0.9, 1,1.5, 2 и 10.

Магнитный (непрерывный) параметр порядка в обоих моделях определяется через введение четырех подрешеток

$$\mathbf{m}_i = \frac{4}{L^3} \sum_{\mathbf{x}_i} \mathbf{S}_{\mathbf{x}_i}, \quad \bar{m} = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \langle \mathbf{m}_i^2 \rangle}, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_i$ пробегает все узлы i-й подрешетки, L^3 – объем системы (число спинов в ОЦК модели равно $2L^3$). Киральность в слоисто-J_1-J_2 модели определяется следующим образом

$$k = \frac{1}{4L^3} \sum_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{S}_{\mathbf{x}} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}\right) \left(\mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\right),$$
$$\bar{k} = \langle |k| \rangle, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_\mu$ – единичный вектор вдоль соответствующего направления решетки. В ОЦК модели киральный параметр порядка определен как

$$k = \frac{1}{8L^3} \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{a}} \left(\mathbf{S}_{\mathbf{x}} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} + \right.$$
$$\left. + \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} + \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} + \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} - \mathbf{S}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – вектор сдвига антиферромагнитных подрешеток.

Для оценки температуры перехода по одному из параметров порядка $p = \bar{m}, \bar{k}$, а также для оценки точности определения этой температуры используется метод пересечения кумулянтов Биндера [37, 38]

$$U_p = 1 - \frac{\langle p^4 \rangle}{3 \langle p^2 \rangle^2}. \tag{6}$$

Критический показатель ν оценивается с помощью следующего кумулянта [39]

$$V_p = \frac{\partial}{\partial (1/T)} \ln \langle p^2 \rangle = L^2 \left(\frac{\langle p^2 E \rangle}{\langle p^2 \rangle} - \langle E \rangle \right), \tag{7}$$

причем оценка показателей проводится для обоих параметров порядка. Основные скейлинговые соотношения:

$$\max(V_p) \sim L^{\frac{1}{\nu}}, \ \bar{p}|_{T=T_c} \sim L^{-\frac{\beta}{\nu}}, \ \chi_p|_{T=T_c} \sim L^{\frac{\gamma}{\nu}}, \tag{8}$$

где χ_p – восприимчивость, соответствующая тому или иному параметру порядка p [37]

$$\chi_p = \frac{L^d}{T} \langle p^2 \rangle, \quad T \geq T_c. \tag{9}$$

Основной результат моделирования заключается в том, что в обеих моделях наблюдается один переход первого рода одновременно по обоим параметрам порядка. Чтобы увидеть скачок внутренней энергии, типичный для переходов первого рода, мы рассматривали большие решетки размера $L = 80$, 90 и 100. Схожие размеры решеток использовались для определения рода перехода в треугольном антиферромагнетике [7] и спиральных магнетиках [40, 41]. Двухпиковая структура распределения по энергии в критической точке, показанная на рис. 3, указывает на наличие внутренней теплоты перехода. Отметим, что первый род перехода становится слабее с ростом отношения величин обменов J_2/J_1.

Первый род перехода был также найден в [30] с помощью алгоритма Вонга–Ландау. К тому же, это подтверждается РГ-анализом непрерывного предела решеточных моделей (1) и (2), описываемого функционалом Гинзбурга–Ландау

$$F = \int d^3x \left((\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 + r(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \right.$$
$$\left. u\left(\phi_1^4 + \phi_2^4\right) + 2w(\phi_1 \phi_2)^2 + 2v \phi_1^2 \phi_2^2 \right), \tag{10}$$

Таблица 1. Сравнение критических (псевдо)показателей, полученных в данной работе для $J_2/J_1 = 1$ (помечены как [*]), с известными показателями других классов универсальности. Обозначения: Helix – спиральные магнетики, STA – антиферромагнетик на слоисто-треугольной решетке, SJJ – слоисто-J$_1$-J$_2$ модель, BCC – ОЦК модель, FSS – типичные показатели для перехода первого рода в теории конечноразмерных систем

Class G/H	Model	Ref.	ν	ν_k	β	$\beta_k/2$	γ	$\gamma_k+\beta_k$
$\mathbb{Z}_2$	Ising	[47]	0.630		0.327		1.236	
$SO(2)$	$O(2)$	[47]	0.671		0.348		1.317	
$SO(4)/SO(3)$	$O(4)$	[47]	0.75		0.39		1.47	
Tricritical	Mean-field		0.5	0.5	0.25	0.25	1.00	1.00
First order	FSS		0.33	0.33	0	0	1.00	1.00
$\mathbb{Z}_2\otimes SO(2)$	Helix	[40]	0.55	0.56	0.25	0.21	1.16	1.29
$\mathbb{Z}_2\otimes SO(2)$	STA	[44]	0.54	0.55	0.25	0.23	1.13	1.22
$\mathbb{Z}_2\otimes SO(2)$	SJJ	[*]	0.565(8)	0.572(10)	0.260(6)	0.251(8)	1.18(4)	1.22(5)
$\mathbb{Z}_2\otimes SO(2)$	BCC	[*]	0.568(10)	0.571(9)	0.262(7)	0.258(10)	1.18(5)	1.20(8)

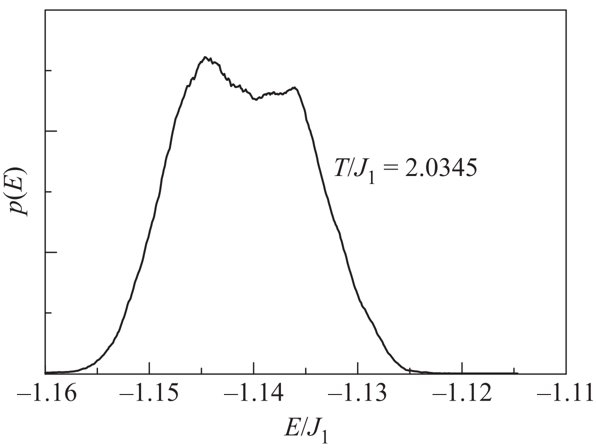

Рис. 3. Гистограмма распределения внутренней энергии для $L = 90$ в окрестности критической температуры в слоисто-J$_1$-J$_2$ модели с $J_2/J_1 = 1$

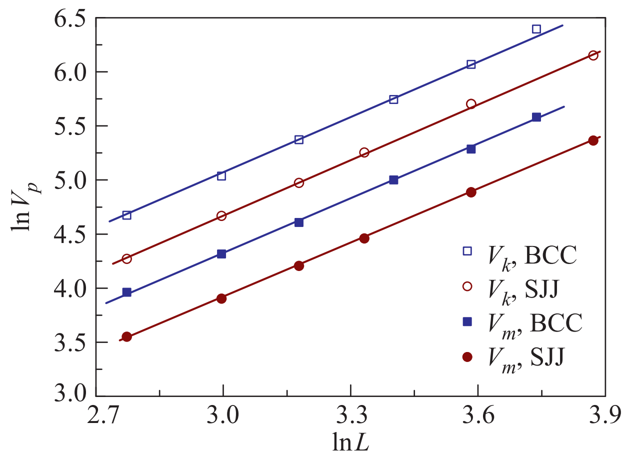

Рис. 4. (Цветной онлайн) Оценка показателя ν_p с использованием кумулянта (7) для обеих моделей с $J_2/J_1 = 1$. SJJ обозначает слоисто-J$_1$-J$_2$ model, BCC – ОЦК модель

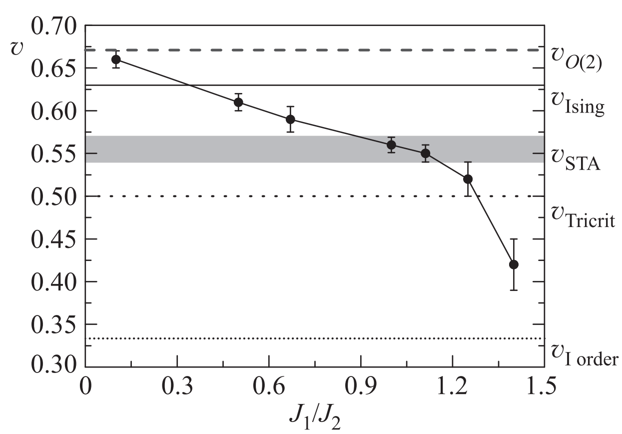

Рис. 5. Зависимость показателя ν от отношения обменов J_1/J_2 для слоисто-J$_1$-J$_2$ модели

где $u > 0$, $w < 0$, $u + v + w > 0$, а $\phi_{1,2}$ – N-компонентное векторное поле. В случае $N = 2$ в области $w < 0$, отвечающей коллинеарному основному состоянию $\phi_1||\phi_2$, неподвижные точки отсутствуют.

Тем не менее, первый род перехода оказывается слабым при $J_2/J_1 \gtrsim 0.8$, а потому можно наблюдать псевдоскейлинговое поведение (пример на рис. 4). Данное поведение не универсально, и значения псевдопоказателей зависят от отношения обменов J_2/J_1. Подобная зависимость показана на рис. 5. Отметим, что для больших J_2/J_1, когда решеточные модели сводятся к двум слабо взаимодействующим антиферромагнитным подрешеткам, показатели имеют значения, близкие к показателям $O(2)$-модели. Однако, и это более неожиданно, что вдали от маргинальных значений отношения обменов (т.е. при $J_2/J_1 \approx 1$) критическое поведение похоже на известные результаты для треугольного антиферромагнетика и спиральных магнетиков. Подробное сравнение критических показателей приведено в табл. 1.

Как обсуждалось выше, для $O(N)\otimes O(2)$-модели псевдоскейлинговое поведение может быть объяснено в терминах РГ, если РГ-траектория (стартующая из точки, отвечающей решеточной модели) проходит через область с очень медленным РГ-потоком. Обычно такая область соответствует окрестности неподвижной точки, даже если данная точка имеет комплексные координаты. На границе рассматриваемой области $w < 0$ находятся три неподвижных точки (НТ): гейзенберговская НТ, отвечающая $O(4)$-модели; несвязанная НТ, отвечающая двум невзаимодействующим $O(2)$-моделям; и биконическая НТ [30]. Несвязанная НТ описывает критическое поведение при больших J_2/J_1, когда $w \approx 0$. Но ни одна из этих точек не объясняет показатели, наблюдающиеся в случае $J_2/J_1 \approx 1$ (см. табл. 1), включая биконическую НТ, расположенную при $N = 2$ очень близко к несвязанной НТ [42, 43].

В случае $N = 2$ имеется две неподвижных точки с комплексными координатами. Вещественная часть координат попадает на подмногообразие $v = u - w$ и $w > 0$, отвечающее $O(N)\otimes O(2)$-модели. Предыдущие исследования этой модели для $N = 2$ с использованием непертурбативной РГ [8–10, 14, 15] показали, что область замедления РГ-потока достаточно широка и не имеет ярко выраженного центра, ассоциируемого с локальным минимумом РГ-потока (в отличие от случая $N = 3$). Более того, данная область включает окрестность гейзенберговской НТ с $w = 0$, соответствующей $O(4)$-модели. Это объясняет разброс в значениях псевдопоказателей, наблюдающийся в численных исследованиях и эксперименте (для обзора см. [4]). Показатели могут принимать значения, близкие как к кавамуровским индексам для треугольного антиферромагнетика [44], так и к показателям $O(4)$ модели. Мы полагаем, что область замедления РГ-потока заходит и в сектор $w < 0$. Такая обширная область может включать траектории, на которых имитируемый скейлинг описывается показателями, близкими к результатам Кавамуры, но без универсальности.

Когда w достаточно мало, возможно и другое объяснение наблюдаемой псевдоуниверсальности, связанное с трикритическим поведением. Такая возможность уже обсуждалась для треугольного антиферромагнетика в [45]. В таблице 1 приведены значения показателей трикритической точки, которые оказываются близкими к показателям для систем с нарушенной $\mathbb{Z}_2\otimes SO(2)$ симметрией. Поскольку член функционала (10) $w(\phi_1\phi_2)^2$ мал, скейлинг будет определяться членами типа $w_6(\phi_1\phi_2)^3$. Обычно подобные члены не существенны в критической точке, но они могут приводить к кроссоверу между трикритическим и критическим поведением, заметному при моделировании на решетках конечного размера. Отметим, что подобный кроссовер наблюдался в схожей модели в двух измерениях [46].

Данная работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований грантами # 14-02-31448 и 16-32-60143.

---

1. D. Loison, in *Frustrated Spin Systems*, ed. by H. T. Diep, World Scientific, Singapore (2004), ch. 4, p. 177.
2. A. O. Sorokin and A. V. Syromyatnikov, Solid State Phenom. **190**, 63 (2012).
3. H. Kawamura, J. Appl. Phys. **63**, 3086 (1988).
4. B. Delamotte, D. Mouhanna, and M. Tissier, Phys. Rev. B **69**, 134413 (2004).
5. M. Itakura, J. Phys. Soc. Jpn. **72**, 74 (2003).
6. A. Peles, B. W. Southern, B. Delamotte, D. Mouhanna, and M. Tissier, Phys. Rev. B **69**, 220408 (2004).
7. V. . Ngo and H. T. Diep, J. Appl. Phys. **103**, 07C712 (2008).
8. G. Zumbach, Phys. Rev. Lett. **71**, 2421 (1993).
9. G. Zumbach, Phys. Lett. A **190**, 225 (1994).
10. G. Zumbach, Nucl. Phys. B **413**, 771 (1994).
11. S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, and K. B. Varnashev, Phys. Lett. A **208**, 161 (1995).
12. A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Nucl. Phys. B **607**, 605 (2001).
13. P. Calabrese and P. Parruccini, Nucl. Phys. B **679**, 568 (2004).
14. M. Tiesser, B. Delamotte, and D. Mouhanna, Phys. Rev. Lett. **84**, 5208 (2000).
15. M. Tiesser, B. Delamotte, and D. Mouhanna, Phys. Rev. B **67**, 134422 (2003).
16. A. I. Larkin and S. A. Pikin, Sov. Phys. JETP **29**, 891 (1969).
17. P. Peczak and D. P. Landau, Phys. Rev. B. **39**, 11932 (1989).
18. S. Iino, S. Morita, A. W. Sandvik, and N. Kawashima, arXiv 1801.02786.
19. D. Loison and K. D. Schotte, Eur. Phys. J. B **5**, 735 (1998).
20. E. F. Shender, Sov. Phys. JETP **56**, 178 (1982).
21. C. L. Henley, Phys. Rev. Lett. **62**, 2056 (1989).
22. C. Pinettes and H. T. Diep, J. Appl. Phys. **83**, 6318 (1998).
23. V. T. Ngo, D. T. Hoang, and H. T. Diep, Phys. Rev. E **82**, 041123 (2010).
24. C. L. Henley, J. Appl. Phys. **61**, 3962 (1986).
25. H. T. Diep and H. Kawamura, Phys. Rev. B **40**, 7019 (1989).
26. H. T. Diep, Phys. Rev. B **45**, 2863 (1992).

27. D. T. Hoang and H. T. Diep, Phys. Rev. E **85**, 041107 (2012).
28. D. Loison and H. T. Diep, J. Appl. Phys. **73**, 5642 (1993).
29. E. H. Boubcheur, D. Loison, and H. T. Diep, Phys. Rev. B **54**, 4165 (1996).
30. A. O. Sorokin, Phys. Lett. A **382**, 3455 (2018).
31. D. Loison and P. Simon, Phys. Rev. B **61**, 6114 (2000).
32. S. E. Korshunov, Phys. Usp. **49**, 225 (2006).
33. A. O. Sorokin and A. V. Syromyatnikov, Phys. Rev. B. **85**, 174404 (2012).
34. A. O. Sorokin and A. V. Syromyatnikov, JETP Lett. **96**, 410 (2012).
35. F. R. Brown and T. J. Woch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2394 (1987).
36. M. Creutz, Phys. Rev. D **36**, 515 (1987).
37. K. Binder, Z. Phys. B **43**, 119 (1981).
38. K. Binder, Phys. Rev. Lett. **47**, 693 (1981).
39. A. M. Ferrenberg and D. P. Landau, Phys. Rev. B **44**, 5081 (1991).
40. A. O. Sorokin, JETP **118**, 417 (2014).
41. A. O. Sorokin and A. V. Syromyatnikov, JETP **113**, 673 (2011).
42. P. Calabrese, A. Pelissetto, and E. Vicari, Phys. Rev. B **67**, 054505 (2003).
43. A. Eichhorn, D. Mesterházy, and M. M. Scherer, Phys. Rev. E **88**, 042141 (2013).
44. H. Kawamura, J. Phys. Soc. Jpn. **61**, 1299 (1992).
45. M. L. Plumer and A. Mailhot, Phys. Rev. B **50**, 16113 (1994).
46. S. Fujimoto, Phys. Rev. B **73**, 184401 (2006).
47. A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rep. **368**, 549 (2002).